गणित

कक्षा–9

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड राजस्थान, अजमेर

पाठ्य पुस्तक निर्माण समिति

पुस्तक – गणित कक्षा–9

संयोजक :– डॉ. अरुण कुमार अरोड़ा, पूर्व सहायक निदेशक, कॉलेज शिक्षा
95, दानमल माथुर कॉलोनी, गुलाबबाड़ी, अजमेर

लेखकगण :–
1. डॉ. सुशील कुमार बिस्सु, सह आचार्य
   सम्राट पृथ्वीराज चौहान राजकीय महाविद्यालय, अजमेर
2. डॉ कमल मिश्रा
   सहायक निदेशक, कॉलेज शिक्षा, जयपुर
3. डॉ. देवेन्द्र भटनागर, सेवानिवृत प्रधानाचार्य
   स्कूल शिक्षा, जयपुर
4. नागार्जुन शर्मा, पूर्व प्रधानाचार्य
   रा.उ.मा.वि. खड़देवत, निवाई, टोंक
5. राजनारायण शर्मा, सेवानिवृत प्रधानाचार्य
   जयपुर
6. महिपाल सिंह राठौड वरि. अध्यापक
   रा.उ.मा.वि. प्रतापनगर, उदयपुर
7. आलोक चतुर्वेदी वरि. अध्यापक
   रा.उ.मा.वि. दुर्गापुरा, जयपुर
8. नवीन कुमार शर्मा वरि. अध्यापक
   रा.उ.मा.वि. द्वितीय चौमूं, जयपुर

पाठ्यक्रम समिति

पुस्तक – गणित कक्षा–9

संयोजक :– सुशील कुमार बिस्सु, सह आचार्य
सम्राट पृथ्वीराज चौहान राजकीय महाविद्यालय, अजमेर

सदस्य :–

1. राजनारायण शर्मा, सेवानिवृत प्रधानाचार्य
   न्यू सांगानेर, सोडाला, जयपुर
2. श्री शम्भू सिंह लाम्बा, प्रधानाचार्य
   राजकीय उ.मा.वि. तोपदड़ा, अजमेर
3. श्री नागार्जुन शर्मा, पूर्व प्रधानाचार्य
   राजकीय उ.मा.वि. निवाई, टोंक
4. श्री रामलाल जाट, प्रधानाचार्य
   राजकीय उ.मा.वि. खड़बामनिया, राजसमंद
5. श्री चन्द्र प्रकाश कुर्मी, प्राध्यापक
   राजकीय उ.मा.वि. टोडारायसिंह, टोंक
6. श्री भगवान सिंह शेखावत वरि. अध्यापक
   राजकीय वरि.उपाध्याय संस्कृत विद्यालय, पुष्कर, अजमेर

प्राक्कथन

भारत वर्ष, गणित शास्त्र की दृष्टि से विश्व में सदैव अग्रणी रहा है। यहाँ की संस्कृति, परम्परा सार्वभौम एवं सर्वसमावेश के चिन्तन का प्रभाव ही है जिसके कारण शून्य अंक पद्धति, दशमलव पद्धति अनेक प्रकार की गणनाओं के लिए सरल, लघु एवं त्रुटि रहित विधियाँ भारत विश्व को दे सका है। आवश्यकता इस बात की है कि गणित की इस प्रभावी विधा ''वैदिक गणित'' के आलोक में विद्यालय एवं उच्च शिक्षा में इसके प्रयोग के लिए अनुसंधान एवं शौध किये जाये। इस विचार से ही प्रस्तुत पुस्तक में एक अध्याय वैदिक संस्कल्पना पर आधारित दिया गया है। थोडे प्रयास से ही विद्यार्थियों को इन वैदिक विधियों की उपयोगिता को पहचानने में कठिनाई नहीं होगी।

यह पुस्तक माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान की कक्षा 9वीं के नवीन पाठ्यक्रम के अनुसार लिखी गई है। पुस्तक को प्रस्तुत करते समय नये पाठ्यक्रम की मूल भावना को ध्यान में रखते हुए भारत की समृद्ध वैज्ञानिक परम्पराओं से छात्रों को अवगत कराने हेतु पुस्तक में यथोचित स्थान पर भारतीय वैज्ञानिकों के योगदान का उल्लेख किया गया है। विषय–वस्तु को सरल एवं स्पष्ट भाषा से प्रस्तुत करने का भरसक प्रयास किया गया है। विभिन्न संकल्पनाओं का विवेचन पर्याप्त विस्तार से किया गया है। हिन्दी भाषा के साथ जहां आवश्यक हो अंग्रेजी शब्दों का प्रयोग भी किया गया है। पुस्तक में अन्तर्राष्ट्रीय अंक प्रणाली, प्रतीकों, चिह्नों एवं भारत सरकार द्वारा निर्धारित पारिभाषिक शब्दावली का प्रयोग किया गया है।

विद्यार्थियों के हितों को ध्यान में रखकर पर्याप्त संख्या में दृष्टांतीय उदाहरण दिये गये हैं। प्रश्नमाला में भी पर्याप्त मात्रा में सभी प्रकार के प्रश्नों का समावेश किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अन्त में महत्वपूर्ण बिन्दु के रूप में अध्याय का सारांश दिया गया है जो अध्याय को दोहराने में विद्यार्थियों के लिए अत्यन्त सहायक सिद्ध होगा। प्रत्येक अध्याय में विविध प्रश्नमाला के अन्तर्गत वस्तुनिष्ठ प्रश्न एवं लघु उत्तरात्मक सहित पर्याप्त संख्या में प्रश्न दिये गये हैं।

आशा है प्रस्तुत पुस्तक विद्यार्थियों के लिए उपयोगी सिद्ध होगी। विद्यार्थियों, शिक्षकों तथा समीक्षकों से अनुरोध है कि अपनी टिप्पणी, सुझाव तथा पुस्तक में रही किसी भी कमी से लेखकों को अवगत कराते रहें ताकि पुस्तक के स्तर में वांछित सुधार किया जा सके।

लेखकगण

गणित पाठ्यक्रम

विषय कोड 09

समय 3.15 घण्टे **पूर्णांक–100**

क्र. सं.	इकाई का नाम	अध्याय का नाम	अंक भार	इकाई के कुल अंक
1.	वैदिक गणित (Vedic Mathematics)	1. वैदिक गणित	8	8
2.	संख्या पद्धति (Number System)	1. संख्या पद्धति	6	6
3.	बीज गणित (Algebra)	1. बहुपद 2. दो चरों वाले रैखिक समीकरण	10 10	20
4.	ज्यामिति (Geometry)	1. ज्यामिति का परिचय 2. सरल रेखीय आकृतियाँ 3. त्रिभुजों की सर्वांगसमता एवं असमिकाएँ 4. त्रिभुजों की रचनाएँ 5. चतुर्भुज और चतुर्भुजों की रचनाएँ 6. त्रिभुज एवं चतुर्भुज के क्षेत्रफल सम्बंधी प्रमेय	2 6 4 4 6 4	26
5.	मेन्सुरेशन (Mensuration)	1. समतलीय आकृतियों का क्षेत्रफल 2. घन, घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन	7 8	15
6.	त्रिकोणमिति (Trigonmetry)	1. कोण एवं उनके माप 2. न्यूनकोण के त्रिकोणमितिय अनुपात 3. त्रिकोणमितिय सर्वसमिकाएँ	3 4 3	10
7.	सांख्यिकी (Statistics)	1. सांख्यिकी	10	10
8.	सड़क सुरक्षा शिक्षा	1. सड़क सुरक्षा शिक्षा	5	5

Details of the Syllabus

इकाई–1 वैदिक गणित — 8 अंक

1. वैदिक गणित की मूल संकल्पना (भाग–1)–

एकाधिकेन पूर्वेण व एक न्यूनेन पूर्वेण सूत्रों के अर्थ एवं अनुप्रयोग, विनकुलम् (ऋणांक) संख्या, आधार, उपाधार, विचलन, सूत्र निखिलम् नवतः चरमं दशतः के अर्थ एवं अनुप्रयोग, उत्तर जांचने की योग, व्यवकलन तथा गुणन संक्रिया के लिए नवांक एवं एकादशांक विधि।

इकाई–2 संख्या पद्धति — 6 अंक

परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर पुनरावलोकन, अपरिमेय संख्या, वास्तविक संख्या एवं उसके दशमलव प्रसार, संख्या रेखा पर अपरिमेय संख्याओं का निरुपण, उत्तरेक्त आवर्धन प्रक्रम, वास्तविक संख्या का ज्यामितिय रुप से निरुपण, वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ, वास्तविक संख्याओं के लिए घातॉंक नियम।

इकाई–3 — 20 अंक

1. बहुपद– — 10 अंक

एक चर वाले बहुपद की परिभाषा, इसके गुणॉंक, अचर बहुपद, शून्य बहुपद, रैखिक बहुपद, बहुपद के शून्यक, शेषफल प्रमेय, बहुपदों के गुणनखण्ड, बीजीय सर्वसमिकाएँ

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y), \quad (x+a)(x-b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx, \quad (x \pm y)^3 = x^3 \pm y^3 \pm 3xy(x \pm y)$

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

2. दो चरों वाले रैखिक समीकरण — 10 अंक

परिचय, दो चर वाले रैखिक समीकरण, आयतीय निर्देशांक पद्वति, दो चरों की रैखिक समीकरण आलेखन, युगपत समीकरणों का बीजीय हल, (i) विलोपन विधि (प्रतिस्थापन द्वारा गुणांकों को समान करना) (ii) वज्रगुणन विधि, साधनीयता के लिए प्रतिबन्ध, दो चर वाले रैखिक समीकरणों के अनुप्रयोग।

इकाई–4 ज्यामिति — 26 अंक

1. ज्यामिति का परिचय — 02 अंक

आधारभूत संकल्पनाएँ, प्रमेय निर्मेय, ज्यामितिय चिह्य, कोण व उसका मापन, प्रतिच्छेदी रेखा व समान्तर रेखा, आधारभूत रचनाएँ

निर्मेय – किसी दिए हुए रेखा खण्ड समद्विभाजन करना।

किसी दिए हुए कोण समद्विभाजन करना, परकार व पटरी की सहायता से 60^0, 120^0, 30^0, 90^0, 45^0, 135^0 कोणों की रचना करना।

किसी दी हुई रेखा पर स्थित किसी बिन्दु पर एक दिए हुए कोण के समान कोण की रचना। परकार

व स्केल की सहायता से किसी भी माप के कोण की रचना करना।
किसी दी हुई सरल रेखा पर किसी दिये हुए बिन्दु से जो सरल रेखा से बाहर है, लम्ब खींचना, किसी दी हुई सरल रेखा के किसी बिन्दु पर लम्ब खींचना।

2. सरल रेखीय आकृतियां **06 अंक**

त्रिभुज एवं उसके कोण, त्रिभुजों का वर्गीकरण, सरल रेखीय आकृतियां।

3. त्रिभुजों की सर्वांगसमता एवं असमीकाएं **04 अंक**

प्रमेय कोण, भुजा कोण, नियम, त्रिभुज के विशेष गुण धर्म, त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियां, भुजा–भुजा–भुजा, नियम, आर.एच.एस. नियम, त्रिभुज की असमीकाएं, रेखा की बाह्य बिन्दु से लम्बवत दूरी।

4. त्रिभुजों की रचनाएं **04 अंक**

त्रिभुज की रचना, जिसकी तीनों भुजाएं ज्ञात हो, दो भुजाएं और उनके बीच का कोण, एक भुजा और दो कोण दिये गये हो। समकोण त्रिभुज की रचना करना, त्रिभुज की रचना जिसमें दो भुजाएं तथा उनमें से एक के सामने का कोण दिया गया हो।
त्रिभुज की कठिन रचनाएं।

5. चतुर्भुज एवं चतुर्भुजों की रचनाएं **06 अंक**

चतुर्भुजों के प्रकार, समांतर चतुर्भज के गुणधर्म, मध्य बिन्दु प्रमेय, चतुर्भुज की रचना, जब चार भुजाएं एवं एक विकर्ण दिया गया हो, तीन भुजाएं एवं इनके बीच के दो कोण, दो क्रमागत भुजाएं एवं उनके बीच का कोण एवं दो अन्य कोण, समान्तर एवं समलम्ब चतुर्भुज की रचना।

6. त्रिभुजों एवं चतुर्भुजों के क्षेत्रफल **04 अंक**

प्रस्तावना, क्षेत्रफल, एक ही आधार एवं एक ही समान्तर युग्म के मध्य बनी आकृतियां।

* एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच के समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

*एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

* यदि दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हो और एक त्रिभुज की एक भुजा, दूसरे त्रिभुज की एक भुजा के बराबर हो तो उनके संगत शीर्ष लम्ब बराबर होते हैं।

बोद्वायन प्रमेय

* किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग अन्य दोनों भुजाओं पर बने वर्गो के योग के बराबर होता है।

* (बोद्वायन प्रमेय का विलोम) – किसी त्रिभुज में यदि एक भुजा का वर्ग अन्य दोनों भुजाओं के वर्गो के योग के बराबर हो तो इस भुजा के सामने का कोण एक समकोण होता है।

इकाई–5 मेन्सुरेशन — 15 अंक

1. समतलीय आकृतियों का क्षेत्रफल — **07 अंक**

प्रस्तावना, त्रिभुज का क्षेत्रफल, हीरो का सूत्र, समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल, समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल, समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल, चतुर्भुज का क्षेत्रफल, समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, विभिन्न चतुर्भुजों का क्षेत्रफल (चक्रीय चतुर्भुज, सम चतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल) को ज्ञात करने में इसका अनुप्रयोग। विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

2. घन और घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन — **08 अंक**

प्रस्तावना, घन, घनाभ, घन और घनाभ के विकर्ण, घन और घनाभ का आयतन।

इकाई–6 त्रिकोणमिति — 10 अंक

1. कोण एवं उनके माप — **03 अंक**

त्रिकोणमिति, धनात्मक एवं ऋणात्मक दूरियां, कोण, धनात्मक एवं ऋणात्मक कोण, किसी भी परिमाण के कोण एवं कोणों की माप, षाष्टिक पद्वति, शतिक पद्वति, वृत्तीय पद्वति, पाई (π) का मान, रेडियन का मान।

2. न्यूनकोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात — **04 अंक**

समकोण त्रिभुज, न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात, त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर सम्बन्ध, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएं।

3. त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएं — **03 अंक**

इकाई–7 सांख्यिकी — 10 अंक

1. सांख्यिकी

परिचय : प्राथमिक आंकड़ें, द्वितीयक आंकड़ें, आकड़ों का प्रस्तुतिकरण, आकड़ों का आलेखीय निरुपण, दण्ड आलेख, आयत चित्र, (आधार लम्बाई परिवर्तन के साथ), बारंबारता बहुभुज, केन्द्रीय प्रवृति के माप–माध्य, माध्यक एवं बहुलक।

इकाई–8 सड़क सुरक्षा शिक्षा — 05 अंक

प्रतिशत (उद्देश्य, विषयवस्तु, गतिविधि), वृत्त (उद्देश्य, विषयवस्तु, गतिविधि), सांख्यिकी (उद्देश्य, विषयवस्तु, गतिविधि), चतुर्भुज (उद्देश्य, विषयवस्तु, गतिविधि), सड़क संकेत, प्रायिकता (उद्देश्य), आंकड़े।

QR कोड उपयोग करने हेतु निर्देश

इस पाठ्यपुस्तक में, आप इस तरह के रूप में मुद्रित किए हुए कई QR कोड देखेंगे

QR कोड से जुड़े हुए दिलचस्प अध्याय, वीडियो, दस्तावेज़, आदि देखने के लिए अपने मोबाइल, टेबलेट या कंप्यूटर का प्रयोग करें |

QR कोड से जुड़े सामग्री देखने के लिए अपने आंड्राय्ड मोबाइल या टेबलेट का प्रयोग करने पर :

चरण	**विवरण**
1.	प्ले स्टोर से DIKSHA एप डाउनलोड करने के लिए **http://diksha.gov.in/rj/get** पे जायें
2.	**इनस्टॉल** पे टैप करें
3.	सफल डाउनलोड और स्थापना के बाद, एप्लिकेशन को खोलें
4.	अपनी भाषा चुनें
5.	**Guest User** के रूप में जारी रखें
6.	**Student** चुनें
7.	ऊपर दाईं ओर दिए गये QR code scanner आइकोन को टैप करें और पाठ्यपुस्तक में मुद्रित किए गये एक QR कोड को स्केन करें या सर्च ईकोन को टैप करें और QR कोड आइकोन के नीचे दिए गये कोड को सर्च बार में टाइप करें	
8.	जुड़े हुए विषयों की एक सूची प्रदर्शित होगी	
9.	वांछित सामग्री को देखने के लिए किसी भी लिंक को टैप करें	

नोट : यदि आपके पास पहले से कोई आधिकारिक लॉगिन आईडी है तो कृपया QR कोड का प्रयोग करने के लिए इसका उपयोग करें।

QR कोड से जुड़े सामग्री देखने के लिए अपने कंप्यूटर का प्रयोग करने पर

1.	**http://diksha.gov.in/rj/get** पे जायें
2.	QR कोड आइकान के नीचे दिए गये कोड को ब्राउज़र सर्च बार में टाइप करें	
3.	जुड़े हुए विषयों की एक सूची प्रदर्शित होगी	
4.	वांछित सामग्री को देखने के लिए किसी भी लिंक को क्लिक करें	

उच्च क्षमता वाले राज्य के अधिकारियों और शिक्षकों के संवर्ग ने इस तकनीकी नवाचार को राजस्थान के लिए एक वास्तविकता बनाने के लिए बहुत प्रयास किए हैं। कुछ मूल्यवान योगदानकर्ताओं के नाम इस QR कोड के साथ प्रदान किए गये हैं योगदानकर्ताओं की सूची देखने हेतु उपर्युक्त निर्देशों का प्रयोग करते हुए इस QR कोड को स्केन करें |

RKKUL9

अनुक्रमणिका

अध्याय

1

7V44DH

वैदिक गणित
(Vedic Mathematics)

1.01 प्रस्तावना

पुरी के शंकराचार्य स्वामी भारती कृष्णतीर्थ वैदिक गणित के आद्य संशोधक एवं प्रणेता माने जाते हैं। उन्होंने श्रृंगेरी मठ में रह कर आठ वर्ष कठोर तपस्या की। साधना की उच्च कोटि की सिद्ध अवस्था में उन्होंने प्राचीन भारतीय ग्रन्थों वेद, ब्राह्मण, संहिता, वेदांग आदि में उल्लेखित गणितीय सूत्रों का अन्तः दर्शन किया और उन्हें अपनी देवभाषा संस्कृत में सूत्रबद्ध किया। स्वामी जी के द्वारा रचित वैदिक गणित इन्हीं गणितीय सोलह सूत्रों एवं तेरह उपसूत्रों पर आधारित है। ये सूत्र–उपसूत्र बड़े उपयोगी, अनेक अर्थ वाले, सर्वव्यापी तथा अत्यन्त प्रभावी हैं। इन सूत्रों द्वारा गणित विषय की अनेक शाखाओं की समस्याओं का हल बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

1.02 वैदिक गणित की उपादेयता :

इन वैदिक गणितीय सूत्रों के प्रयोग से गणनाएँ छोटी एवं सरल हो जाती हैं। गणना में समय भी कम लगता है। छात्र के मानसिक विकास में सहयोगी भी है। वैदिक गणित द्वारा उपलब्ध उत्तर जांच से छात्र का आत्म विश्वास बढ़ता है। छात्र के द्वारा होने वाली त्रुटि की संभावना नगण्य रह जाती है। इन सूत्रों से छात्र में गणित के प्रति रूचि पैदा हो जाती है। परिणामस्वरुप छात्र गणित विषय में श्रेष्ठ उपलब्धियाँ प्राप्त करता है। सूत्रों आधारित विधियों के अल्प अभ्यास से छात्र लम्बी एवं जटिल गणनाओं का हल मौखिक ज्ञात कर सकता है। इसी कारण गणित जगत में वैदिक गणित को मानसगणित भी पुकारा जाता है। स्वामीजी के अनुसार वैदिक गणित अभ्यास से छात्रों की क्षमता एवं गणना गति पाँच गुनी बढ़ जाती है तथा उनकी बुद्धि एवं मेधा में अप्रत्याशित वृद्धि होती है।

वैदिक गणितीय सूत्रों, उपसूत्रों की सूची

सूत्र	उपसूत्र
1. एकाधिकेन पूर्वेण	1. आनुरुप्येण
2. निखिलम् नवतश्चरमं दशतः	2. शिष्यतेशेष संज्ञः
3. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्	3. आद्यमाद्येनान्त्यमन्त्येन

4. परावर्त्य योजयेत्
5. शून्यं साम्य समुच्चये
6. (आनुरुप्ये) शून्यमन्यत्
7. संकलन व्यवकलनाभ्याम्
8. पूरणापूरणाभ्याम्
9. चलन कलनाभ्याम्
10. यावदूनम्
11. व्यष्टिसमष्टिः
12. शेषाण्यङ्केन चरमेण
13. सोपान्त्य द्वयमन्त्यम्
14. एकन्यूनेन पूर्वेण
15. गुणित समुच्चयः
16. गुणक समुच्चयः

4. केवलैः सप्तकं गुण्यात्
5. वेष्टनम्
6. यावदूनं तावदूनम्
7. यावदूनंतावदूनीकृत्यवर्ग च योजयेत्
8. अन्त्ययोर्दशकेऽपि
9. अन्त्ययोरेव
10. समुच्चय गुणितः
11. लोपस्थापनाभ्याम्
12. विलोकनम्
13. गुणित समुच्चयः समुच्चयगुणितः

विशेष सूत्रों के अर्थ एवं अनुप्रयोग

1.03 सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण :

(क) अर्थ : सूत्र दो शब्द 'एकाधिक' और 'पूर्व' से बना है। सूत्र का अर्थ है ''पहले के अंक या संख्या का एकाधिक करने की क्रिया द्वारा।'' संख्या का एकाधिक करना हो तो उसमें एक जोड़ना अथवा उसके इकाई अंक पर एकाधिक चिह्न $(\cdot)$ लगाना जैसे –

12 का एकाधिक $=1\dot{2}=12+1=13$

संख्या के किसी अंक का एकाधिक करना हो तो उस अंक के उपर एकाधिक चिह्न $(\cdot)$ लगाना और नवीन संख्या का मान ज्ञात करना। जैसे –

1534 में अंक 3 का एकाधिक करने पर नवीन संख्या $=15\dot{3}4=1544$

पूर्व का अर्थ है ''से पहले का''। संख्या में स्थानमान की दृष्टि से किसी अंक के पूर्व अंक की ओर अथवा दी हुई संख्या के पूर्व संख्या की ओर यह संकेत करता है जैसे –

685 में अंक 5 का पूर्व अंक 8 है तथा 62×99 में 99 की पूर्व संख्या 62 है। ऊपर की सभी क्रियाएँ मौखिक सम्पन्न की जा सकती है।

(ख) अनुप्रयोग :

(i) योग संक्रिया : योग संक्रिया के सभी प्रकार के प्रश्नों में सूत्र आधारित विधि प्रभावी है।

विधि : प्रश्न में दी हुई संख्याओं को स्तम्भ रचना में ऊपर नीचे लिखिए। इकाई स्तम्भ में ऊपर से नीचे जोड़ना प्रारम्भ कीजिए। जिस अंक पर योग दस या दस से अधिक हो जाए, उस अंक के पूर्व अंक पर एकाधिक चिह्न लगाइये। इस क्रिया की आवृत्ति कीजिए। अन्त में जो शेष रहे, उस अंक को उत्तर के स्थान पर नीचे लिख दीजिए। इसी प्रकार अन्य स्तम्भों का योग कीजिए। निम्न उदाहरणों से विधि को

उदाहरण 1: योग कीजिए।

$$\begin{array}{cccccc} & 3 & 7 & 9 & 9 & 5\downarrow \\ \dot{0} & \dot{6} & \dot{8} & \dot{9} & \dot{8} & 6 \\ & \dot{7} & \dot{5} & \dot{4} & 3 & 8 \\ \dot{0} & \dot{5} & \dot{8} & 9 & \dot{0} & 9 \\ \hline 2 & 4 & 1 & 3 & 2 & 8 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) प्रथम स्तम्भ में : $5+6=11$
अतः 6 के पूर्व अंक 8 पर एकाधिक,

(ii) 11 के इकाई अंक : $1+8=9$

(iii) $9+9=18$ अतः 9 के पूर्व अंक 0 पर एकाधिक तथा 18 का इकाई अंक 8 लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर।

(iv) अन्य स्तम्भों का योग इसी प्रकार कीजिए।

उदाहरण 2: योग कीजिए।

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{किमी.} & & & \text{मी.} & & \\ & 2 & 8 & & 0 & 8 & 4 \\ & \dot{3} & 2 & & \dot{3} & 6 & 5 \\ \dot{0} & 6 & \dot{5} & & 7 & \dot{2} & 5 \\ & \dot{3} & 8 & & \dot{2} & 5 & 0 \\ \hline 1 & 6 & 4 & & 4 & 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) मीटर में तीन स्तम्भ। कोई स्तम्भ खाली न रह जाय अतः 84 मी. को 084 लिखें।

(ii) अब सामान्य स्तम्भों के समान इस विधि द्वारा योग कर दीजिए।

(ii) व्यवकलन संक्रिया : वैदिक गणित में व्यवकलन संक्रिया की चार–पाँच विधियाँ हैं परन्तु इन सबमें सबसे सरल और श्रेष्ठ विधि (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण + परम मित्र अंक) आधारित विधि है। व्यवकलन का हॉसल वाला प्रत्येक प्रश्न इस विधि से सरल किया जा सकता है। जिन दो अंकों का योग दस (= आधार) होता है, वे अंक एक दूसरे के परम मित्र अंक अथवा पूरक अंक कहलाते हैं जैसे 8 का परममित्र अंक = 2, 4 का परममित्र अंक = 6, तथा $\dot{9}$ का परममित्र अंक अथवा पूरक अंक = 0.

विधि : जब ऊपर वाले अंक (वियोज्य) में से नीचे वाला अंक (वियोजक) नहीं घटता है तो नीचे वाले अंक का परम मित्र अंक ऊपर वाले अंक में जोड़कर योगफल उत्तर के स्थान पर नीचे लिख दीजिए तथा नीचे वाले अंक के पूर्व अंक पर एकाधिक चिह्न लगा दीजिए। इस क्रिया की आवृत्ति से शेषफल ज्ञात हो जायेगा।

यदि ऊपर का अंक नीचे वाले अंक से बड़ा अथवा बराबर है तो फिर परम मित्र अंक जोडने की आवश्यकता नहीं है। सामान्य रूप से घटाइये। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा हैं।

उदाहरण 3: व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{cccccc} & 5 & 7 & 6 & 2 & 5 \\ - & \dot{2} & \dot{9} & \dot{8} & 4 & 3 \\ \hline & 2 & 7 & 7 & 8 & 2 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) $5-3=2$ लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर

(ii) 2 में से 4 नहीं घटता अतः 4 का परम मित्र अंक 6 जोड़ा 2 में तथा योग 8 लिखा नीचे उत्तर के स्थान पर साथ ही 4 के पूर्व अंक 8 पर एकाधिक चिह्न। इसी प्रकार घटाने की क्रिया पूरी कीजिए।

उदाहरण 4: व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{ccc} \text{घं.} & \text{मि.} & \text{से.} \\ 24 & 12 & 15 \\ \dot{0}\dot{6} & \dot{2}\dot{4} & 30 \\ \hline 17 & 47 & 45 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(1) मापन इकाई 'समय' में स्तम्भसः आधार भिन्न भिन्न

(2) मिनट व सेकण्ड के स्तम्भ में दो आधार रहेंगे।

(क) दोनों के इकाई स्तम्भ में आधार = 10

(ख) दोनों के दहाई स्तम्भ में आधार = 6

(3) घंटे के स्तम्भ में आधार = 10

(4) मिनट व सेकण्ड के दहाई स्तम्भ में परम मित्र अंक निकालने का आधार = 6 रहेगा तथा शेष में आधार = 10 रहेगा।

टिप्पणी : दाशमिक संख्या पद्धति में सामान्यतः आधार = 10 माना जाता है।

(iii) गुणन संक्रिया :

वैदिक गणित में गुणन की भिन्न–भिन्न स्थितियों में विभिन्न सूत्र आधारित विधियाँ हैं। सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण आधारित विधि प्रभावी है तथा कुछ विशेष गुणन विधियाँ बड़ी सरल एवं आकर्षक हैं। इस विधिको नवीन पदों के परिचय के साथ स्पष्ट किया जा रहा है। संख्या के इकाई अंक को चरमं अंक तथा शेष सभी अंको को निखिलम् अंक कहा जाता है जैसे संख्या 7 2 3 का चरमं अंक = 3 तथा सभी अंक 7, 2 निखिलम् अंक कहलाते हैं।

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा दो संख्याओं का गुणा बड़ी सरलता से किया जा सकता है यदि उनके चरमं अंको का योग दस या दस की घात हो और उनके शेष निखिलम् अंक परस्पर समान हों।

विधि :

(i) गुणनफल के दो पक्ष होते है वाम तथा दक्षिण।

(ii) चरमं अंको अथवा अन्तिम अंको का गुणनफल दक्षिण पक्ष में लिखा जाता है।

(iii) वाम पक्ष में शेष निखिलम् अंक × उसका एकाधिक लिखा जाता है।

(iv) चरमं अंको के योग में जितने शून्य होते हैं उसके दुगने अंक दक्षिण पक्ष में रखे जाते हैं। जैसे योग 10 में एक शून्य तो दक्षिण पक्ष में दो अंक।

(v) दक्षिण पक्ष में यदि अंको की संख्या कम या अधिक हो तो अंको का समायोजन करना पड़ता है। देखिये निम्न उदाहरण –

उदाहरण 5: गुणा कीजिए। (योग =10)

$$83\times87$$
$$=8\times9/3\times7$$
$$=7221$$

संकेत

(i) चरमं अंको का योग = 10

(ii) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान = 8

(iii) दक्षिण पक्ष में दो अंक = 21

उदाहरण 6 : गुणा कीजिए (योग = 100)

$$586\times514$$
$$=5\times6\ /\ 86\times14$$
$$=30\ /\ 1204$$
$$=301204$$

संकेत

(i) अन्तिम दो अंको का योग $=86+14=100$

(ii) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान = 5

(iii) दक्षिण पक्ष में चार अंक = 1204

उदाहरण 7 : गुणा कीजिए (योग = 1000)

$$3993\times3007$$
$$=3\times4\ /\ 993\times007$$
$$=12\ /\ 006951$$
$$=12006951$$

संकेत

(i) अंन्तिम तीन अंको का योग $=993+007=1000$

(ii) अतः दक्षिण पक्ष में छः अंक = 006951 (दो शून्य बढ़ा कर अंक समायोजन)

उदाहरण 8 : गुणा कीजिए (योग = 1)

$$9\frac{5}{11}\times 9\frac{6}{11}$$
$$=9\times 10\ /\ \frac{5}{11}\times\frac{6}{11}$$
$$=90\frac{30}{121}$$

संकेत

(i) भिन्न योग $=\frac{5}{11}+\frac{6}{11}=1$

(ii) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान $=9$

उदाहरण 9 : गुणा कीजिए (योग = 1)

$$11\cdot 7\times 11\cdot 3$$
$$=11\times 12\ /\ \cdot 7\times\cdot 3$$
$$=132\cdot 21$$

संकेत

(i) दशमलव भिन्न योग $=\cdot 7+\cdot 3=1$

(ii) शेष निखिलम् अंक परस्पर समान $=11$

टिप्पणी : सूत्र आधारित विधि द्वारा उपर्युक्त सभी प्रश्न मौखिक किये जा सकते है। उत्तर सीधा एक पंक्ति में लिखा जा सकता है।

1.04 सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण

(क) अर्थ : सूत्र दो शब्द 'एक न्यून' तथा 'पूर्व' से बना है। सूत्र का अर्थ है पहले के अंक या संख्या का एक न्यून होने की क्रिया द्वारा''। जिस संख्या का एक न्यून करना होता है, उसके इकाई अंक के नीचे एक बिन्दु लगा दीजिए। यह बिन्दु एक न्यून चिह्न कहलाता है जैसे57 में 7 का एक न्यून = $\underset{\cdot}{7}=7-1=6$ पिछले सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण की भांति इस सूत्र में भी संख्या के किसी अंक का एक न्यून कर नवीन संख्या का मान ज्ञात किया जा सकता है जैसे –

124 में 1 का न्यून करने पर

नवीन संख्या $=\underset{\cdot}{1}24=024=24$

(ख) अनुप्रयोग

(i) व्यवकलन संक्रिया : (सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण + परम मित्र अंक)

व्यकलन का हॉसिल वाला प्रत्येक प्रश्न इस विधि से सरल किया जा सकता है।

विधि :

यदि वियोज्य अंक में से वियोजक अंक नहीं घटता है तो वियोजक अंक का परम मित्र अंक वियोज्य अंक में जोड़ कर योगफल को नीचे शेषफल के स्थान पर लिख दीजिए। इसके साथ – साथ वियोज्य अंक के पूर्व अंक के नीचे एक बिन्दु लगा दीजिए। यह बिन्दु एक न्यून चिह्न कहलाता है। इस क्रिया की आवृत्ति से अन्त में पूर्ण शेषफल ज्ञात हो जायेगा। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 10 : व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{rccc} & \underset{\cdot}{5} & \underset{\cdot}{6} & 0 \\ - & 3 & 7 & 4 \\ \hline & 1 & 8 & 6 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) सम्पूर्ण क्रिया सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण आधारित विधि के समान है।

(ii) अन्तर इतना है कि इस क्रिया में एकाधिक चिह्न के स्थान परएक न्यून चिह्न वियोज्य अंक के पूर्व अंक के नीचे लगेगा।

उदाहरण 11 : व्यवकलन कीजिए।

$$\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c}{\text{किग्रा.}} & \multicolumn{3}{c}{\text{ग्राम}} \\ \underset{\cdot}{1} & \underset{\cdot}{2} & \underset{\cdot}{5} & 0 & \underset{\cdot}{9} & 5 \\ & 7 & 8 & 2 & 2 & 8 \\ \hline 0 & 4 & 6 & 8 & 6 & 7 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) 95 ग्राम को 095 लिखना है।

(ii) 5+2 (8 का परम मित्र अंक) तथा 9 पर एक न्यूनेन चिह्न

(iii) $8-2=6$

(iv) 0+8 (2 का परम मित्र अंक) तथा 5 पर एक न्यूनेन चिह्न

(v) 4+2 (8 का परम मित्र अंक) तथा 2 पर एक न्यूनेन चिह्न

(vi) 1+3 (7 का परम मित्र अंक) तथा 1 पर एक न्यूनेन चिह्न

(vii) 0

(ii) गुणन संक्रिया

दो संख्याओं के गुणन में जब एक संख्या का प्रत्येक अंक 9 होतो सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण द्वारा बिना गुणन किये उनका गुणनफल बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। सुविधा के लिए आगे अब 9 अंक वाली संख्या को गुणक तथा दूसरी संख्या को गुण्य कहा जायेगा।

विधि : गुणनफल के दो पक्ष होते हैं।

वाम पक्ष = गुण्य − 1

दक्षिण पक्ष = गुणक − वामपक्ष

अतः गुण्य × गुणक = गुण्य − 1 / गुणक − वामपक्ष

गुणन संक्रिया में निम्न तीन स्थितियाँ बनती हैं।

(1) गुणक अंक संख्या = गुण्य अंक संख्या

(2) गुणक अंक संख्या > गुण्य अंक संख्या

(3) गुणक अंक संख्या < गुण्य अंक संख्या

प्रथम स्थिति : (गुणक अंक संख्या = गुण्य अंक संख्या)

देखिये निम्न उदाहरण।

1. 8×9

वाम पक्ष $=8-1=7$

दक्षिण पक्ष $=9-7=2$

$\therefore \quad 8\times9 = 8-1\ /\ 9-7 = 72$

2. 8567×9999

$=8567-1\ /\ 9999-8566$

$=85661433$

द्वितीय स्थिति : (गुणक अंक संख्या > गुण्य अंक संख्या)

देखिये निम्न उदाहरण।

3. 68×999

$=068\times999$

$=067\ /\ 999-067$

$=67932$

4. 4523×999999

$=004523\times999999$

$=004522/995477$

$=4522995477$

टिप्पणी: (1) गुणक संख्या के जितने अंक गुण्य संख्या से अधिक होते हैं, उतने ही 9 के अंक गुणनफल के मध्य में होते हैं।

(2) शेष वाम पक्ष और दक्षिण पक्ष के क्रमानुसार अंको का योग 9 होता है। अर्थात् वाम पक्ष का प्रथम अंक + दक्षिण पक्ष का प्रथम अंक = 9

तृतीय स्थिति : (गुणक अंक संख्या < गुण्य अंक संख्या)

देखिये निम्न उदाहरण।

5. 43×9

$= 42/9 - 42$

$= 429$

-42

387

6. 512×99

$= 511/99 - 511$

$= 51199$

-511

50688

प्रश्नमाला 1.1

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा योग कीजिए।

1.
```
  9 8 7 6 5
  6 3 2 1 7
  8 9 5 2 2
  6 0 5 4 3
```

2.
```
  8 9 7 8 9
  9 7 6 8 6
  7 6 9 7 8
  8 6 7 9 8
```

3.

किग्रा.	ग्राम
178	45
246	725
569	188
45	894

4.

किमी.	मी.	सेमी.
25	510	36
47	85	52
18	123	75
53	805	28

वैदिक विधि से व्यवकलन कीजिए।

5.
```
   7 4 6
 − 3 8 9
```

6.
```
   4 0 3 2
 − 3 5 4 3
```

7.
```
   6 0 0 7
 − 1 8 5 2
```

8.
```
   8 3 1 7
 − 6 4 5 4
```

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण द्वारा गुणा कीजिए।

9. 42×48

10. 103×107

11. 294×206

12. 413×487

सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण द्वारा गुणा कीजिए।

13.	54×99	14.	214×999
15.	47×999	16.	342×99999
17.	73×9	18.	467×99

वैदिक विधि से गुणा कीजिए।

19.	$15\frac{5}{7} \times 15\frac{2}{7}$	20.	$24\frac{10}{13} \times 24\frac{3}{13}$
21.	$4 \cdot 5 \times 4 \cdot 5$	22.	$9 \cdot 85 \times 9 \cdot 15$

1.05 विनकुलम (ऋणांक) संख्या

विनकुलम प्रयोग की संकल्पना वैदिक गणित की देन है। विनकुलम प्रयोग से गणनाएँ छोटी एवं सरल तथा कभी–कभी मौखिक भी हो जाती है। इस प्रयोग से बड़े अंक $(6, 7, 8, 9)$ वाली संख्याएँ छोटे अंक $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ वाली संख्याओं में बदली जाती हैं। जिससे गणनाएँ आसान हो जाती है। आजकल कम्प्यूटर में भी विनकुलम (ऋणांक) संख्याओं का प्रयोग होता है। रेखायुक्त अंक $\overline{2}, \overline{4}$ आदि विनकुलम अंक या ऋणांक कहलाते हैं। इन अंको का मान क्रमशः -2 तथा -4 होता है। यह छोटी रेखा विनकुलम रेखा या विनकुलम चिह्न कहलाती है। किसी भी सामान्य संख्या में धनात्मक अंक तथा ऋणांक एक साथ किसी भी स्थान पर हो सकते हैं।

जैसे $2\,\overline{3}$ अथवा $\overline{2}\;\overline{4}$ आदि। संख्या $1\overline{2}\,\overline{4}$ को एक विनकुलम दो विनकुलम चार पुकारा जाता है।

1.06 आधार, उपाधार, विचलन

आधार :

आधार का अर्थ यहाँ संख्या आधार से है। एक से बड़ी कोई भी वास्तविक संख्या आधार का रूप ले सकती है। गणनाओं को सरल बनाने और उनका उत्तर सहज रूप में प्राप्त करने हेतु वैदिक गणित में अधिकतर 10 या 100 या 10 की किसी घात को आधार माना जाता है। हमारे यहाँ प्रचलित दाशमिक संख्या पद्धति में भी आधार दस ही होता है।

उपाधार :

उपाधार आधार का ही गुणज होता है। अधिकतर यह शून्यान्त संख्या होती है।

यदि आधार = 10 तो उपाधार $= 10 \times$क, जबकि क = पूर्णसंख्या।

यदि आधार = 100 तो उपाधार $= 100 \times$क, जबकि क = पूर्णसंख्या।

आधार के स्थान पर उपाधार के प्रयोग से गणनाएॅं सरल तो हो जाती हैं परन्तु उत्तर के पूर्व भाग में समायोजन करना पड़ता है। आगे आने वाले उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जायेगा।

विचलन :

जब दी हुई संख्याओं में से आधार अथवा उपाधार घटा दिया जाये तो शेषफल विचलन कहलाता है। अतः

विचलन = संख्या – आधार अथवा **विचलन = संख्या –उपाधार**

यदि संख्या आधार या उपाधार से बड़ी होती है तो विचलन धनात्मक होता है। यदि संख्या छोटी होती है तो विचलन ऋणात्मक होता है। आधार में जितने शून्य होते है, उतने ही अंक विचलन में रखे जाते है, जैसे

आधार $= 10$ **के सापेक्ष संख्या** 18 **का विचलन**

$=+8$

तथा आधार $= 100$ **के सापेक्ष संख्या** 94 **का विचलन**

$=-06$

1.07 सूत्र निखिलम् नवतः चरमं दशतः

(क) अर्थ : सूत्र निखिलम् का अर्थ है, ''चरमं अंक दस में से तथा (शेष) निखिलम् अंक 9 में से''। प्राचीन भारतीय गणित में अंक 9 को परम अंक अथवा ब्रह्म अंक तथा दस को पूर्ण संख्या कहते हैं परन्तु यहाँ पर सूत्र का संकेत व्यवकलन संक्रिया से है। विनकुलम, व्यवकलन, गुणन, वर्ग, धनफल, भाग संबंधी अनेक अनुप्रयोग इस सूत्र पर आधारित हैं।

(ख) अनुप्रयोग

(i) सामान्य संख्याओं को विनकुलम संख्या में बदलना

(सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण + सूत्र निखिलम्)

जब सामान्य संख्या में प्रत्येक अंक 5 या 5 से बड़ा होता है तो निखिलम् विधि से उसे विनकुलम संख्या में बदला जा सकता है।

विधि : (1) संख्या के चरमं अंक (इकाई अंक) को 10 में से घटाइये।

(2) संख्या के शेष अंको को 9 में से घटाइये।

(3) शेषफल के प्रत्येक अंक पर विनकुलम रेखा खींचिये।

(4) शेषफल के पूर्व अंक 0 अथवा 5 से छोटे अंक पर एकाधिक चिह्न लगाइये।

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 12 : विनकुलम् संख्या में बदलना

1. 898

$= 0\,8\,9\,8$

$= \dot{0}\,\bar{1}\,0\,\bar{2}$

$= 1\,\bar{1}\,0\,\bar{2}$

2. 18469

$= \dot{1}\,\bar{2}\,\dot{4}\,\bar{3}\,\bar{1}$

$= 2\,\bar{2}\,5\,\bar{3}\,\bar{1}$

टिप्पणी :(1) जब सामान्य संख्या के बड़े अंको के बीच में 5 से छोटा अंक आ जाता है तो विधि दुबारा प्रारम्भ कीजिए।

(2) अंक 0 पर विनकुलम रेखा नहीं खींची जाती है।

(ii) विनकुलम संख्याओं को सामान्य संख्या में बदलना

(सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण + सूत्र निखिलम्)

विधि : (1) चरमं अंक के धनात्मक मान को 10 में से घटाइये।

(2) शेष निखिलम् अंको के धनात्मक मानों को 9 में से घटाइये।

(3) अंत में विनकुलम रेखा विहीन अंक का एक न्यून कीजिए।

(4) आवश्यकतानुसार उपर्युक्त क्रियाओं की आवृत्ति कीजिए।

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 13 : सामान्य् संख्या में बदलिये।

1. $2\bar{4}\bar{3}$
$= \underset{.}{2}57$
$= 157$

2. $6\bar{2}\bar{4}5\bar{3}\bar{2}$
$= \underset{.}{6}76\underset{.}{5}68$
$= 576468$

(iii) दो संख्याओं का गुणन : (सूत्र निखिलम् – आधार)

जब दो संख्याएँ आधार = 10 या 100 या 10 की किसी घात के निकट होती हैं तो उनका गुणनफल सूत्र निखिलम् – आधार द्वारा बड़ी सरलता से ज्ञात किया जा सकता है।

विधि : (1) संख्याओं के अनुसार उनका निकटतम आधार 10 या 100 चुनिये।

(2) आधार के सापेक्ष विचलनों को उनकी संख्या के सामने लिखिए।

(3) तिरछी रेखा से गुणनफल स्थान के दो भाग कीजिए।

(4) दक्षिण पक्ष में विचलनों का गुणनफल लिखिए।

(5) बॉये पक्ष में एक संख्या + दूसरी संख्या का विचलन लिखिए।

(6) आधार में जितने शून्य् उतने ही अंक दक्षिण पक्ष में रखिये। अंक संख्या की कमी0 लिखकर पूरी कीजिए। यदि अंक अधिक हो तो बांये पक्ष में जोड़िये।

(7) विचलनों का गुणनफल यदि ऋणात्मक हो तो बांये पक्ष से एक आदि लेकर इसे धनात्मक रुप में बदलिये। स्मरण रहे कि बांये पक्ष से आये एक का मान दक्षिण पक्ष में आधार के बराबर हो जाता है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 14 : निखिलम् (आधार) विधि से गुणा कीजिए।

1. 12×14, आधार $= 10$

$$\begin{array}{ll} =12 & +2 \\ \underline{\;14\;} & \underline{+4} \end{array}$$
$= 14+2/2\times 4$
$= 168$

संकेत

(i) विचलन $= +2, +4$

(ii) बायें पक्ष में $12+4$ या $14+2$ लेते हैं।

(iii) दक्षिण पक्ष में विचलनों का गुणन$= 8$ (एक अंक)

2. 92×87, आधार $= 100$

$$\begin{array}{ll} =92 & -08 \\ \underline{\;87\;} & \underline{-13} \end{array}$$
$= 92-13/(-08)(-13)$
$= 79/{}_{1}04 = 8004$

संकेत

(i) विचलन $= -08, -13$

(ii) दक्षिण पक्ष में दो अंक

अतः 104 का 1 अंक बांये पक्ष में

3. 7×18, आधार $= 10$

$$\begin{array}{ll} =7 & -3 \\ \underline{\;18\;} & \underline{+8} \end{array}$$
$= 7+8/(-3)\times 8$
$= 15/-24$
$= 15-3/30-24$
$= 12/30-24$
$= 126$

संकेत

(i) गुणनफल $= 15/-24$

(ii) बांये पक्ष से 3 दक्षिण पक्ष में लाइये

(iii) दक्षिण पक्ष में 3 का स्थानीयमान $= 30$

4. 1007×1012

$=1007 \quad +007$

$\;\;1012 \quad +012$

$=1012+7/084$

$=1019084$

संकेत

(i) आधार = 1000

(ii) दक्षिण पक्ष में तीन अंक अतः 84 से पूर्व 0 लिखा।

(iv) दो संख्याओं का गुणन

(सूत्र निखिलम् – उपाधार)

किसी प्रश्न में विचलन इतने बड़े प्राप्त हो जाते हैं कि उनका गुणा करना ही कठिन हो जाता है। ऐसी स्थिति में उपाधार की संकल्पना की जाती है।

उपाधार अंक का गुणनफल के बांये पक्ष से गुणा किया जाता है। दाहिना पक्ष पूर्व समान रहता है।

विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट की जा रही है।

उदाहरण 15 : निखिलम् उपाधार विधि से गुणा कीजिए।

1. 32×33

$=32 \quad +2$

$\;\;33 \quad +3$

$=35 \times 3/6$

$=1056$

संकेत

(i) आधार = 10, उपाधार $=10 \times 3=30$, आधार अंक =3

(ii) उपाधार से विचलन =+2 तथा +3

(iii) बांये पक्ष में उपाधार अंक 3 का गुणा $=105$

2. 54×56

$=54 \quad +4$

$\;\;56 \quad +6$

$=60 \times 5/_{2}4$

$=300/_{2}4$

$=3024$

संकेत

(i) उपाधार $=10 \times 5$, आधार अंक =5

(ii) बांये पक्ष में उपाधार अंक 5 का गुणा $=60 \times 5=300$

(iii) उसके बाद दक्षिण पक्ष का समायोजन करना चाहिये।

3. 54×56

$=54 \quad +4$

$\;\;56 \quad +6$

$=60 \times \frac{1}{2} / 24$

$=3024$

संकेत

(i) आधार = 100,

उपाधार $=100 \times \frac{1}{2}=50$

(ii) उपाधार से विचलन =+4 तथा +6

(iii) उपाधार अंक $=\frac{1}{2}$

(iv) दक्षिण पक्ष में दो अंक

4. 206×212

$= 206 \quad +06$

$\;\; 212 \quad +12$

$= 218 \times 2/72$

$= 43672$

संकेत

(i) आधार $= 100$,

उपाधार $= 100 \times 2$

(ii) उपाधार अंक $= 2$

(iii) विचलन $= +06$ तथा $+12$

(v) तीन संख्याओं का गुणन : (सूत्र निखिलम् – आधार)

गुणन संक्रिया के तीन खण्ड होते हैं।

प्रथम खण्ड = कोई एक संख्या + शेष दो संख्याओं के विचलन

मध्य खण्ड = दो–दो विचलनों के गुणनफलों का योग

तृतीय खण्ड = तीनों विचलनों का गुणन

सूत्र आधारित विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 16 : सूत्र निखिलम् – आधार द्वारा गुणा कीजिए।

1. $91 \times 93 \times 96$, आधार $= 100$

संख्या	विचलन
91	–09
93	–07
96	–04

$= 93 - 09 - 04/36 + 28 + 63/(-9)(-4)(-7)$

या

91-07-04

या

96-09-07

$= 80/_{1}27/(-252)$

$= 81/27 - 3/300 - 252$

$= 81/24/48$

$= 812448$

संकेत

(i) विचलन $= -09, -07, -04$

(ii) तृतीय खण्ड में $(-09)(-07)(-04) = -252$

(iii) मध्य खण्ड $= (-09)(-04) + (-07)(-04) + (-09)(-07) = 127$

(iv) मध्यखण्ड से 3 लिया तृतीय खण्ड में

(v) तृतीय खण्ड में 3 का स्थानीयमान $= 300$

$\therefore\ 300 - 252 = 48$

(vi) मध्य खण्ड में 24 तथा 1 प्रथम खण्ड में जोड़ा $80 + 1$

2. $103 \times 105 \times 106$, आधार $= 100$

संख्या	विचलन
103	+03
105	+05
106	+06

$= 106 + 03 + 05/15 + 30 + 18/90$

$= 114/63/90$

$= 1146390$

संकेत

(i) आधार $= 100$

(ii) विचलन $+03, +05, +06$

(iii) शेष प्रक्रिया उपर्युक्तानुसार

3. $12\times13\times15$, आधार = 10

संख्या	विचलन
12	+02
13	+03
15	+05

$=12+3+5/6+15+10/30$

$=20/_{3}1/_{3}0$

$=2340$

संकेत
(i) आधार $=10$
(ii) विचलन $=+2, +3, +5$
(iii) शेष प्रक्रिया उपर्युक्तानुसार

टिप्पणी : आधार में जितने शून्य, उतने ही अंक तृतीय खण्ड एवं मध्य खण्ड में रखिये।

(vi) तीन संख्याओं का गुणन

(सूत्र निखिलम् – उपाधार)

निखिलम् उपाधार विधि में प्रथम खण्ड में (उपाधार अंक)^2 का तथा मध्य खण्ड में (उपाधार अंक) का गुणन किया जाता है। आधार विधि तथा उपाधार विधि में यही अन्तर है। विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 17 :निखिलम् उपाधार विधि से गुणा कीजिए।

1. $21\times24\times25$

संख्या	विचलन
21	+1
24	+4
25	+5

$=2^2\left(21+4+5\right)/2\left(4+20+5\right)/1\times4\times5$

$=4\times30/2\times29/20$

$=120/_{5}8/_{2}0$

$=12600$

संकेत
(i) आधार $=10$, उपाधार $=10\times2$
(ii) विचलन $=+1, +4, +5$
(iii) मध्य व तृतीय खण्ड में एक–एक अंक

2. $502\times503\times504$

संख्या	विचलन
502	+02
503	+03
504	+04

$=5^2\left(502+03+04\right)/5\left(6+12+8\right)/2\times3\times4$

$=25\times509/5\times26/24$

$=12725/130/24$

$=127263024$

संकेत
(i) आधार $=100$, उपाधार $=100\times5$
(ii) उपाधार अंक $=5$

प्रश्नमाला 1.2

विनकुलम संख्या में बदलिये।

1. 89   2. 878

3. 9687   4. 6578

सामान्य संख्या में बदलिये।

5. $3\bar{2}1$ 6. $2\bar{4}\bar{3}\bar{2}$

7. $4\bar{3}0\bar{2}$ 8. $450\bar{4}\bar{9}$

सूत्र निखिलम् द्वारा गुणा कीजिए।

9. 102×107 10. 94×92

11. 72×73 12. 203×204

13. $11\times12\times13$ 14. $97\times98\times99$

15. $102\times103\times104$ 16. $99\times101\times103$

उत्तर जाँचने की विधियाँ

किसी भी संक्रियां से प्राप्त उत्तर की जांच करने के लिए दो विधियां प्रचलित हैं –

(क) नवांक विधि   (ख) एकादशांक विधि

(क) नवांक विधि :

नवांक विधि में अंक 9 को आधार मान कर किसी संख्या का बीजांक ज्ञात किया जाता है। संख्या के अंकों अथवा अंको के योग में से 9 घटाने पर जो अंक बचता है वह इस संख्या का बीजांक कहलाता है। जैसे 947 का बीजांक = 2

विभिन्न संक्रियाओं में नवांक विधि का प्रयोग निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है।

उदाहरण 18 :

(1) योग संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच :

	बीजांक
5 3 8 9	7
6 4 7 2	1
5 9 3 6	5
4 1 6 8	1
2 1 9 6 5	5

संकेत

(i) पंक्ति सः बीजांको का योग

$=7+1+5+1=5$

(ii) योग का बीजांक

$=2+1+9+6+5=5$

दोनो समान, अतः उत्तर सही।

(2) व्यवकलन संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच :

$$\begin{array}{r} 8\,1\,3\,4 \\ -\,5\,6\,7\,8 \\ \hline 2\,4\,5\,6 \\ \hline \end{array}$$

संकेत

(i) वियोज्य का बीजांक $=7 \quad =16$

(ii) वियोजक का बीजांक$=8$ या $\quad -8$

$$\begin{array}{r} \hline 8 \\ \hline \end{array}$$

शेषफल का बीजांक $=8$

दोनो समान, अतः उत्तर सही।

(ग) गुणन संक्रिया से प्राप्त उत्तर की जाँच

$$73 \times 77 = 5621$$

(i) गुण्य का बीजांक $= 7+3 = 10 = 1$

(ii) गुणक का बीजांक $= 7+7 = 14 = 5$

(iii) दोनों बीजांको के गुणन का बीजांक $= 1 \times 5 = 5$

(iv) गुणनफल का बीजांक $= 5+6+2+1 = 5$

क्योंकि बांये पक्ष का गुणक =दक्षिण पक्ष का बीजांक, अतः उत्तर सही है।

टिप्पणीः 1. यदि प्रश्न की किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के अंकों का स्थान परस्पर बदल जाय तो भी बीजांक वही आता है और नवांक विधि से गलती की पकड़ नहीं हो पाती है।

2. वैदिक गणित में एक ही प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने की अनेक विधियाँ हैं। एकदशांक विधि से भी उत्तर का सत्यापन किया जा सकता है।

(ख) एकादशांक विधि :

किसी संख्या के विषम स्थानों के अंको और समस्थानों के अंको के योगों का अन्तर उस संख्या का बीजांक कहलाता है। जैसे संख्या 63254 का

बीजांक $= 4-5+2-3+6 = 4$

विधि को निम्न उदाहरणों से स्पष्ट किया जा रहा है :

(i) योग संक्रिया **पंक्ति सः बीजांक**

63254	$4-5+2-3+6=4$
54327	$7-2+3-4+5=9$
89325	$5-2+3-9+8=5$
206906	$18 = 8-1 = 7$

योग का बीजांक $= 6-0+9-6+0-2 = 7$

दोनों परस्पर समान, अतः उत्तर सही।

(ii) व्यवकलन संक्रिया **पंक्ति सः बीजांक**

7348	$8-4+3-7=0$
-5249	$9-4+2-5=2$
2099	$\therefore$ अन्तर $= 0-2 = -2$

शेषफल का बीजांक $= 9-9+0-2 = -2$

अतः उत्तर सही।

(iii) गुणन संक्रिया

$54 \times 56 = 3024$

हल :	54 का बीजांक	$= 4 - 5 = -1$
	56 का बीजांक	$= 6 - 5 = +1$
	दोनों बीजांको का गुणनफल	$= -1$
	गुणनफल का बीजांक	$= 4 - 2 + 0 - 3$ $= -1$

अतः उत्तर सही।

❑ ❑ ❑

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 1.1

1.	312047	2.	351251
3.	1039 किग्रा, 852 ग्राम.	4.	144 किमी. 524 मी. 91 सेमी.
5.	357	6.	489
7.	4155	8.	1863
9.	2016	10.	11021
11.	60564	12.	201131
13.	5346	14.	213786
15.	46953	16.	34199658
17.	657	18.	46233
19.	$240\frac{10}{49}$	20.	$600\frac{30}{169}$
21.	$20 \cdot 25$	22.	$90 \cdot 1275$

प्रश्नमाला 1.2

1.	$1\bar{1}\bar{1}$	2.	$1\bar{1}\bar{2}\bar{2}$
3.	$10\bar{3}\bar{1}\bar{3}$	4.	$1\bar{3}\bar{4}\bar{2}\bar{2}$
5.	281	6.	1568
7.	3698	8.	44951
9	10914	10.	8648
11.	5256	12.	41412
13.	1716	14.	941094
15.	1092624	16.	1029897

❑

अध्याय

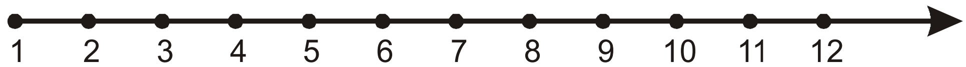
2

संख्या पद्धति
(Number System)

2.01 परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर पुनरावलोकनः

दैनिक जीवन में संख्याओं का बहुत महत्त्व है। हम प्राकृत संख्याओं की शुरूआत से परिमेय संख्या तक अध्ययन कर चुके हैं। यहाँ हम इनकी पुनरावृत्ति संख्या रेखा पर करेंगे।

(i) प्राकृत संख्याएँ



चित्र 2.01

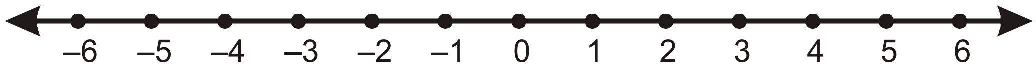
यह रेखा 1 से दांई तरफ अपरिमित रूप से बढ़ती है।

(ii) पूर्ण संख्या

चित्र 2.02

यह रेखा 0 से दाई तरफ अपरिमित रूप से बढ़ती है।

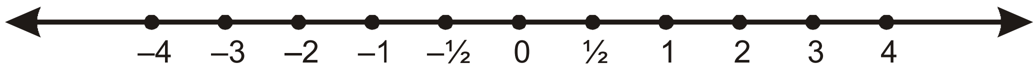
(iii) पूर्णांक संख्या



चित्र 2.03

यह रेखा शून्य के दोनों तरफ अपरिमित रुप से बढ़ती है।

(iv) परिमेय संख्या



चित्र 2.04

यह रेखा दोनो तरफ अपरिमित रूप से बढ़ती है।

लेकिन यहाँ हम $-1, 0; 0, 1$ इत्यादि के बीच भी संख्या पाते है। दो परिमेय संख्या के बीच में परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए माध्य की अवधारणा का उपयोग कर सकते है। दो परिमेय संख्याओं के मध्य अपरिमित संख्याएँ होती है।

समय के साथ–साथ संख्याओं का विकास हुआ। सर्वप्रथम प्राकृत संख्या का प्रचलन हुआ। दो प्राकृत संख्याओं का योग व दो प्राकृत संख्याओं का गुणा भी प्राकृत संख्या होती है। जिन्हें हम N से प्रकट करते हैं।

$$N = 1, 2, 3 \ldots$$

अगर समीकरण

$$x + 7 = 7$$

का हल किया जाये तो x का मान शून्य होगा। अतः हम इस समीकरण का प्राकृत संख्या से हल प्राप्त नहीं कर सकते इसलिए प्राकृत संख्या के समूह में शून्य को सम्मलित कर पूर्ण संख्या नया नाम दिया जिसे हम W से प्रदर्शित करते है।

$$W = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

यदि समीकरण $x + 15 = 6$ का हल लिया जाये और x का मान ज्ञात करें तो हमें $x = -9$ संख्या की आववश्यकता होती है जो पूर्ण संख्या में नहीं है। संख्या रेखा के बांई और चलने पर हम ऋणात्मक संख्या का समूह प्राप्त होगा जो पूर्णांको (धनात्मक एवं ऋणात्मक) को दर्शाता है जिसे हम Z से निरूपित करते हैं।

$$Z = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

अब हम देखते है कि दो पूर्णांको के मध्य कुछ संख्या प्रतीत होती है जो किसी पूर्णांक को पूर्णांक से भाग देने पर प्राप्त होती हैं। जैसे $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \ldots$ संख्यायें प्राप्त होती है। इन संख्याओं को परिमेय संख्या (rational number) समुह Q से प्रकट किया जाता है।

जैसे कि आप परिमेय संख्या की परिभाषा से परिचित होंगे।

ऐसी संख्या परिमेय संख्या कहलाती है जिसे $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ के रूप में लिखा जा सकता हो जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है तथा p को q से विभाजित करने पर भाग पूरा–पूरा जाता है अथवा दशमलव प्राप्त होता है। परिमेय संख्याओं में प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्याओं और पूर्णांक संख्याओं का समावेश होता है।

किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती है।

2.02 अपरिमेय संख्या

हम संख्या रेखा को पुनः देखे तो इस रेखा पर स्थित सभी संख्याओं का समावेश हो गया है या नहीं, अभी भी संख्याएं शेष है। अब हम उन संख्याओं पर चर्चा करेंगे जो परिमेय संख्याएँ नहीं होती है उन संख्याओं को औपचारिक तौर पर अपरिमेय संख्याएँ (irrational number) कहा जाता है। यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में न लिखा जा सकता हो जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। जैसा कि आप जानते

है कि अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती है। इसी प्रकार, अपरिमेय संख्याएँ भी अपरिमित रूप से अनेक होती है जिसके कुछ उदाहरण हैं।

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \pi, \ 0.15150015000150000....$$

जैसा कि आपको याद होगा कि जब कभी हम प्रतीक "$\sqrt{\ }$" का प्रयोग करते है तब हम यह मानकर चलते हैं कि वह संख्या का धनात्मक वर्गमूल है। अतः $\sqrt{25}=5$ है, यद्यपि 5 और –5 दोनों ही संख्या 25 का वर्गमूल हैं।

अतः संख्या रेखा पर एक साथ ली गई सभी परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं के समूह को वास्तविक संख्याओं (real number) का नाम दिया जाता है जिसे R द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

2.03 वास्तविक संख्या और उनके दशमलव प्रसार

अब हम वास्तविक संख्या के दशमलव प्रसार पर विचार इस प्रश्न के साथ करेंगे कि क्या परिमेय और अपरिमेय संख्याओं में भेद करने के लिए इनके दशमलव प्रसारों का प्रयोग कर सकते हैं? वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार का प्रयोग करके किस प्रकार संख्या रेखा पर संख्या रेखा पर इन संख्याओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

यहाँ इनके तीन उदाहरण ले $\frac{3}{8}, \frac{8}{9}, \frac{6}{7}$

$$\frac{3}{8}=0.375$$

$$\frac{8}{9}=0.88888...$$

$$\frac{6}{7}=0.857142857142...$$

उपर्युक्त उदाहरणों में $\frac{p}{q}, \ (q \neq 0)$ सभी में परिमेय संख्या पर लागू है तो q का p में भाग देने से प्राप्त विभिन्न स्थितियाँ जिसमें

प्रथम स्थिति : शेष शून्य हो जाता है।

$\frac{3}{8}$ वाले उदाहरण से देखते हैं कि कुछ चरणों के बाद शेष शून्य हो जाता है। $\frac{3}{8}$ का दशमलव प्रसार 0.375 है। इसी तरह अन्य उदाहरण हो सकते हैं $\frac{1}{4}=0.25, \ \frac{456}{125}=3.648$ है।

इन सभी स्थितियों में परिमित चरणों के बाद दशमलव प्रसार समाप्त हो जाता है। ऐसी संख्याओं के दशमलव प्रसार को **सांत (terminating)** दशमलव कहते हैं।

दूसरी स्थिति : शेष कभी भी शून्य नहीं होता परन्तु हमें भागफल में अंको का एक पुनरावृति खण्ड प्राप्त होता है। उदाहरण के लिए $\frac{8}{9}=0.888888...$ और $\frac{6}{7}=0.857142857142...$ हैं।

यह दशमलव प्रसार **असांत आवृर्ती या अनवसानी आवर्ती (non-terminating recurring)** है।

$\frac{8}{9}$ के भागफल में 8 की पुनरावृति होती है हम इसे $0.\bar{8}$ के रूप में लिखते है। इसी प्रकार $\frac{6}{7}$ में 857142 की पुरावृति होती है इसलिये हम $\frac{6}{7}$ को $0.\overline{857142}$ के रूप में लिखते हैं। जहाँ अंकों के ऊपर लगाया गया दण्ड अंको के उस खण्ड को प्रकट करता है जिसकी पुनरावृति होती है। साथ ही $2.67474\ldots$ को $2.6\overline{74}$ के रूप में लिखा जा सकता है। इन सभी उदाहरणों से अनवसानी आवर्त (पुनरावृति) दशमलव प्रसार प्राप्त होते हैं। इस प्रकार हमने पाया कि परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार की केवल दो स्थितियाँ होती है या तो वे सांत होते है या अनवसानी (असांत) आवर्ती होते है।

उदाहरण 1 : दिखाईए कि 2.152786 एक परिमेय संख्या है या 2.152786 को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : यहाँ $2.152786 = \frac{2152786}{1000000}$ है। अतः यह एक परिमेय संख्या है।

उदाहरण 2 : दिखाईए कि $0.8888\ldots = 0.\bar{8}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ p और q पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

हल : माना कि $x = 0.\bar{8}$

$$x = 0.8888 \qquad \ldots (i)$$

दोनों और 10 से गुणा करने पर

$$10x = 10 \times (.8888....) = 8.888$$

$$10x = 8.888... \qquad \ldots (ii)$$

समीकरण (i) को (ii) से घटाने पर

$$9x = 8$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{8}{9}$$

उदाहरण 3 : दिखाईए कि $0.\overline{47} = 0.474747\ldots$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : माना कि $x = 0.4747...$ $\qquad \ldots (i)$

यहाँ दो अंको की पुरावृति है, इसलिए दोनो और 100 से गुणा करने पर

$$100x = 47.474747... \qquad \ldots (ii)$$

समीकरण (i) को (ii) से घटाने पर

$$99x = 47$$

$$\therefore \quad x = \frac{47}{99}$$

उदाहरण 4 : दिखाईए कि $0.12\overline{3} = 0.123333\ldots$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक है, और $q \neq 0$ है।

हल : माना कि

$$x = 0.12333\ldots \qquad \ldots(i)$$

समीकरण (i) को दोनो और 100 से गुणा करने पर

$$100x = 12.333\ \ldots \qquad \ldots(ii)$$

समीकरण (ii) को दोनो और 10 से गुणा करने पर

$$1000x = 123.333\ \ldots \qquad \ldots(iii)$$

समीकरण (ii) को (iii) से घटाने पर

$$900x = 111.000$$

$$x = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$$

अतः अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार वाली प्रत्येक संख्या को $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता हैं।

एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या अनवसानी आवर्ती होता है। साथ ही वह संख्या, जिसका दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी आवर्ती है, एक परिमेय संख्या होती है। अब हम $x = 0.150150015000150000\ldots$ जैसी संख्या पर विचार करते हैं तो हम देखते हैं कि इस संख्या को हम किसी भी प्रकार से $\frac{p}{q}$ (जहाँ p व q पूर्णांक तथा $q \neq 0$) रूप में परिवर्तिति नहीं करसकते है, अतः इस प्रकार की संख्या के इस विशेष गुण के कारण इन्हें हम अपरिमेय संख्या कहते है। अतः जिन संख्याओं का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती (non-terminating non-recurring) होता है उन्हें अपरिमेय संख्या कहते है।

x के समरूप अपरिमित रूप से अनेक अपरिमेय संख्याएँ जनित कर सकते हैं।

कुछ अपरिमेय संख्याओं $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ का दशमलव प्रसार दिये गये हैं:

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1.73205080756\ldots$$

वर्षों से गणितज्ञों ने अपरिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार में अधिक से अधिक अंको को उत्पन्न

करने की विभिन्न तकनीकें विकसित की है। जैसा कि विभाजन विधि (division method) से $\sqrt{2}$ के दशमलव प्रसार से अंको को ज्ञात करना। सुल्ब सूत्रों (जीवा–नियमों) में, जो वैदिक युग (500 ई.पू. – 800 ई.पू.) के गणितीय ग्रंथ है से सन्निकट मान प्राप्त होते है। इसी तरह π के दशमलव प्रसार में अधिक से अधिक अंक प्राप्त करने का इतिहास काफी रोचक रहा है। यूनान का प्रसिद्ध वैज्ञानिक आर्कमिडीज जिसने π के दशमलव प्रसार में अंकों को अभिकलतित किया था उसने यह दिखाया कि $3.140845 < \pi < 3.142857$ आर्यभट्ट (476 ई – 505 ई) ने जो एक महान भारतीय गणितज्ञ और खगोलविद थे, चार दशमलव स्थानों तक π का शुद्ध मान $\pi = 3.1416\ldots$ ज्ञात किया था। उच्च चाल कम्पयूटरों (संगकणकों) से और उन्नत कलन विधियों (algorithms) का प्रयोग करके अधिक से अधिक दशमलव स्थानों तक π का मान अभिकलित किया जा चुका है।

उदाहरण 5 : 1 / 7 और 2 / 7 में बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : हम सरलता से परिकलित कर सकते हैं कि

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots = 0.\overline{142857}$$

$$\frac{2}{7} = 0.2857142857142\ldots = 0.\overline{2857142}$$

अब $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए, हम एक ऐसी संख्या ज्ञात करते हैं जो इन दोनों के बीच स्थित अनवसानी अनावर्ती होती है। इस प्रकार अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार की संख्या का एक उदाहरण 0.150150015000150000 . . . है।

प्रश्नमाला 2.1

1. बताइए कि निम्नलिखित संख्याओं में कौन–कौन संख्याएँ परिमेय और कौन–कौन संख्याएँ अपरिमेय है:

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3797 (iv) 7.4784478 . . .

(v) 1.101001000100001 . . .

2. ऐसी तीन संख्याएँ लिखिए जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हैं।

3. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव रूप में लिखिए और बताइए कि प्रत्येक का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है।

(i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$ (iv) $\frac{3}{13}$

(v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

4. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

(i) 0.3 (ii) $0.\overline{47}$ (iii) $1.\overline{27}$ (iv) $1.2\overline{35}$

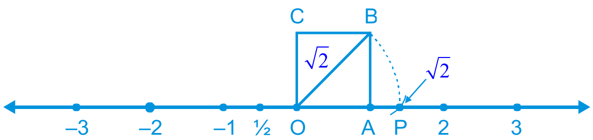
5. परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच तीन अलग–अलग अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

2.04 संख्या रेखा पर अपरिमेय संख्याओं का निरूपण

जैसा कि वास्तविक संख्या या तो परिमेय या अपरिमेय हो सकती। अतः हम यह कह सकते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा के एक अद्वितीय बिन्दु से निरूपित किया जाता है साथ ही संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक अद्वितीय वास्तविक संख्या को निरूपित करता है। यही कारण है कि संख्या रेखा को वास्तविक संख्या रेखा (real number line) कहा जाता है। निम्न उदाहरणों से संख्या रेखा पर हम कुछ अपरिमेय संख्याओं का स्थान निर्धारण करने की विधि का अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 6 : संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ का स्थान निरूपित कीजिए।

हल : यह सरलता से देखा जा सकता है। एकक (मात्रक) लम्बाई की भुजा वाला वर्ग OABC लीजिए (देखिए आकृति)

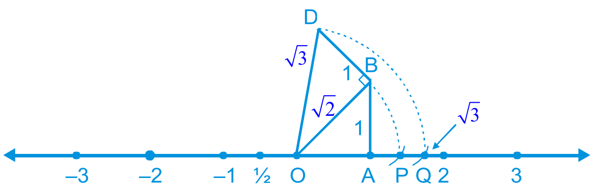


चित्र 2.05

तब आप बौधायन प्रमेय लागू करके यह देख सकते है कि $OB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ है। आकृति में $OB=\sqrt{2}$ एक परकार की सहायता से O को केन्द्र और OB को त्रिज्या मानकर एक चाप (arc) खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु P पर काटता है। तब बिन्दु P संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ से संगत होता है।

उदाहरण 7 : वास्तविक संख्या रेखा पर $\sqrt{3}$ का स्थान निर्धारण कीजिए।

हल : हम चित्र 2.06 को पुनः ले



चित्र 2.06

OB पर एकक लम्बाई वाले लंब BD की रचना कीजिए (जैसा चित्र 2.06 में दिखाया गया है।)

तब बौधायन प्रमेय लागू करने पर हमें $OD=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{3}$ प्राप्त होता है। एक परकार की

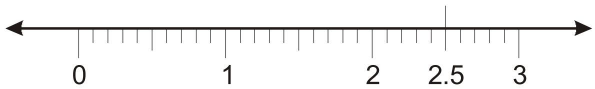
सहायता से O को केन्द्र और OD को त्रिज्या मानकर एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु Q पर काटता है। तब Q, $\sqrt{3}$ के संगत है।

इसी प्रकार $\sqrt{n-1}$ का स्थान निर्धारण हो जाने के बाद आप $\sqrt{n}$ का स्थान निर्धारण कर सकते हैं, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

8AVUGG

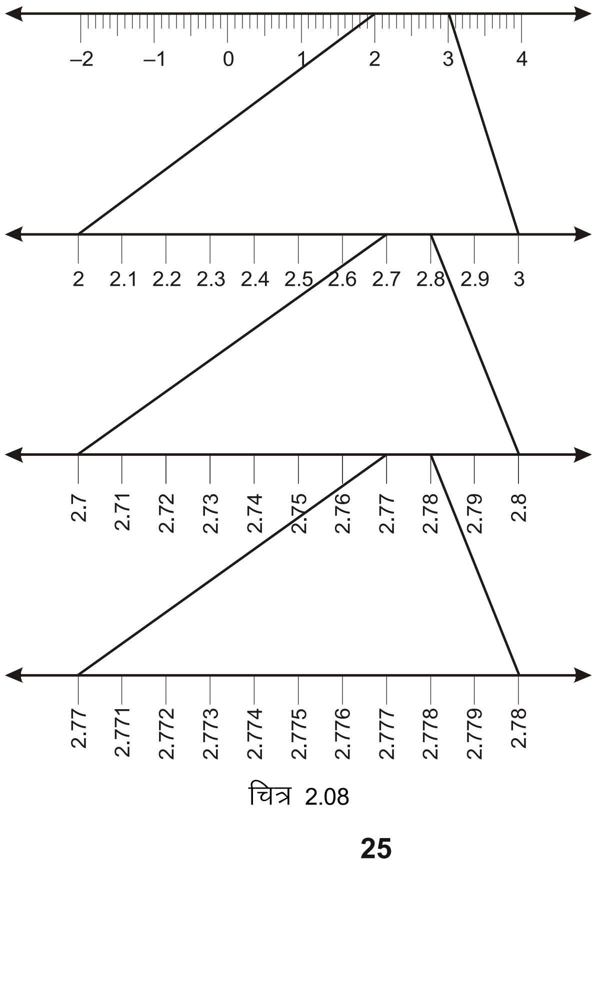
उत्तरोत्तर आवर्धन प्रक्रम

पिछले अनुच्छेद में आपने यह देखा कि प्रत्येक वास्तविक संख्या का एक दशमलव प्रसार होता है। इन की सहायता से हम इस संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं। जिस प्रकार हम स्केल पर देखते है उसी प्रकार हम संख्या रेखा पर 2.5 लें तो



चित्र 2.07

उदाहरण के तोर पर हम संख्या रेखा पर 2.775 का स्थान निर्धारण करना चाहते हैं तो हम नीचे दी गई आकृति पर ध्यान दें कि दी गई संख्या 2 और 3 के बीच की स्थित संख्या है। 2 और 3 के बीच संख्या रेखा को हम 10 बराबर भागों में बाँट देते हैं। फिर 2.7 और 2.8 को पुनः दस बराबर भागों में बांटते हैं।



चित्र 2.08

पुनः 2.77 और 2.78 के बीच स्थित स्थान को 10 बराबर भागो में बाँटते हैं। अगला चिह्न 2.775 इस विभाजन का पाँचवा चिह्न है। ऊपर दिये गये संख्या रेखा पर संख्याओं को देखने से इस प्रक्रम को उत्तरोत्तर आवर्धन प्रक्रम (process of successive magnification) कहा जाता है। इस तरह हमने यह देखा है कि पर्याप्त रूप से उत्तरोतर आवर्धन द्वारा सांत दशमलव वाले प्रसार वाली वास्तविक संख्या की संख्या रेखा पर स्थिति (या निरूपण) को स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है।

इसी प्रकार संख्या रेखा पर अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार वाली एक वास्तविक संख्या की स्थिति को उत्तरोतर आवर्धन करके संख्या रेखा पर संख्या की स्थिति देख सकते हैं।

इसी प्रक्रिया को संख्या रेखा पर अनवसानी अनावर्ती दशमलव प्रसार वाली वास्तविक संख्या को देखने में भी लागू किया जा सकता है।

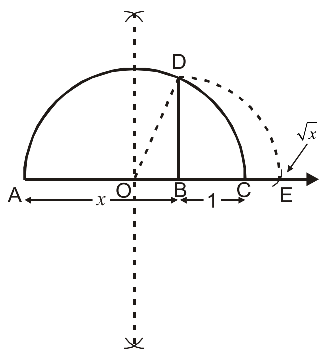
ऊपर दिये गये उदाहरणों से उत्तरोतर आवर्धनों की कल्पना के आधार पर हम पुनः कह सकते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा पर एक अद्वितीय बिन्दु से निरूपति किया जा सकता है। साथ ही संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक और केवल एक वास्तविक संख्या को निरूपित करता है।

2.05 वास्तविक संख्या का ज्यामितीय रूप से निरूपण

यदि a एक प्राकृत संख्या है, तब $\sqrt{a}=b$ का अर्थ है $b^2=a$ और $b>0$. यही परिभाषा धनात्मक वास्तविक संख्याओं पर भी लागू की जा सकती है। मान लीजिए $a>0$ एक वास्तविक संख्या है तब $\sqrt{a}=b$ का अर्थ है $b^2=a$ और $b>0$ है।

अब हम दिखाएँगे कि किस प्रकार $\sqrt{x}$ को, जहाँ x एक दी हुई धनात्मक वास्तविक संख्या है ज्यामितीय रूप से ज्ञात किया जाता है।

$\sqrt{x}$ का मान ज्ञात करने के लिए जहाँ x एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, एक दी हुई रेखा पर एक स्थिर बिन्दु A से x दूरी पर चिह्न लगाने पर एक ऐसा बिन्दु B लेते है जिससे कि AB $= x$ हो जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। एक बिन्दु C मान लीजिए जिससे BC $= 1$ है।



चित्र 2.09

आकृति में Δ OBD एक समकोण त्रिभुज है।

अतः $$OC = OD = OA = \frac{AB+BC}{2} = \frac{x+1}{2} \text{ एकक}$$

$$OB = AB - OA = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2} \text{ एकक}$$

अतः बौधायन प्रमेय लागू करने पर यह प्राप्त होता है।

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

$\Rightarrow \qquad BD^2 = x$

$\Rightarrow \qquad BD = \sqrt{x}$ है।

इस रचना से यह दर्शाने की एक चित्रीय और ज्यामितीय विधि प्राप्त हो जाती है कि सभी वास्तविक संख्याओं $x > 0$ के लिए $\sqrt{x}$ का अस्तित्व है। यदि हम संख्या रेखा पर $\sqrt{x}$ की स्थिति जानना चाहते हैं, तो आइए हम संख्या रेखा पर B को शून्य मान लें और C को 1 मान लें, B को केन्द्र और BD को त्रिज्या मानकर एक चाप जो संख्या रेखा को E पर काटता है। आकृति से तब E, $\sqrt{x}$ निरूपित करता है। (देखिए चित्र क्रमांक 2.9)

व्यापक रूप से घनमूलों, चतुर्थमूलों और अधिक से अधिक n वें मूलों जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है से विस्तार किया जा सकता है। जैसा कि पिछली कक्षाओं में वर्गमूलों एवं घनमूलो का अध्ययन कर चुके हैं।

$\sqrt[3]{27}$ क्या है? हम जानते है कि $\sqrt[3]{27} = 3$ है। $\sqrt[5]{243}$ का मान ज्ञात करे $b = \sqrt[5]{243}$ हो $b^5 = 243$, $b^5 = (3)^5 \Rightarrow b = 3$ है अतः $\sqrt[5]{243} = 3$ है। इस प्रकार $\sqrt[n]{a}$ को परिभाषित कर सकते है। जहाँ $a > 0$ वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक है। $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक तब $\sqrt[n]{a} = b$ जबकि $b^n = a$ और $b > 0$.

प्रतीक "$\sqrt[n]{\ }$" को करणी चिन्ह (radical sign) n वें मूलो, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है। $\sqrt[n]{a}$ को $a^{1/n}$ को रूप में लिखा जाता है।

2.06 वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

जैसा कि पिछली कक्षाओं में परिमेय संख्याओं का अध्ययन किया जिसमें परिमेय संख्याएं योग और गुणन के क्रम विनिमेय (commutative), साहचर्य (associative) और बंटन (distributive) नियमों को संतुष्ट करती है और हम यह भी पढ़ चुके हैं कि यदि हम दो परिमेय संख्याओं को जोड़े, घटाएँ, गुणा करें तब भी हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है (अर्थात् जोड़, घटाना, गुणा के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत closed होती हैं)। यहाँ हम यह भी देखते है कि अपरिमेय संख्याएँ भी योग और गुणन के क्रम विनिमेय, साहचार्य और बंटन–नियमों को संतुष्ट करती हैं। परन्तु, अपरिमेय संख्याओं के योग, अंतर, भागफल और गुणनफल सदा अपरिमेय नहीं होते हैं। उदाहरण $\left(\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}\right)$, $\left(\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{7}\right)$ और $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$ परिमेय संख्याएँ है।

इसी प्रकार हम देखते हैं कि जब एक परिमेय संख्या में अपरिमेय संख्या जोडते है और एक परिमेय संख्या को एक अपरिमेय संख्या से गुणा करते है, तो क्या होता है?

उदाहरण के लिए $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है, तब $2+\sqrt{5}$ और $2\sqrt{5}$ को कौनसी संख्या मानेंगे? निःसन्देह ये अपरिमेय संख्याएं है क्योंकि इन संख्याओं का भी अनवसानी अनावर्ती दशमलव प्रसार प्राप्त होता है। इसी प्रकार $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$ भी अपरिमेय संख्या है।

अनवसानी अनावर्ती दशमलव प्रसार वाली अपरिमेय संख्याओं को निम्न उदाहरणों से और समझा जा सकता है।

उदाहरण 8 : जाँच कीजिए कि $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}, \sqrt{2}+24, \pi-3$ अपरिमेय संख्याएँ हैं या नहीं।

हल : $\sqrt{5}=2.236..., \sqrt{2}=1.4142..., \pi=3.1415$ है।

तब $7\sqrt{5}=15.652..., \frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}=3.1304...$ है।

$\sqrt{2}+24=25.4142.... \pi-3=0.1415$

ये सभी अनवसानी अनावर्ती दशमलव है। ये सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

उदाहरण 9 : $2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ और $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ का योग कीजिए।

हल : $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$

$=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)+\left(3\sqrt{5}-\sqrt{5}\right)$

$=(2+1)\sqrt{3}+(3-1)\sqrt{5}$

$=3\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

उदाहरण 10 : $6\sqrt{7}$ को $2\sqrt{7}$ से गुणा कीजिए।

हल : $6\sqrt{7}\times2\sqrt{7}=6\times2\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}$

$=12\times7=84$

उदाहरण 11 : $8\sqrt{15}$ में $2\sqrt{5}$ से भाग दीजिए।

हल : $8\sqrt{15}\div2\sqrt{5}=\frac{8\sqrt{3\times5}}{2\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{3}\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=4\sqrt{3}$

इन उदाहरणों से हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकाल सकते है

(i) एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का जोड या घटाने पर एक अपरिमेय संख्या प्राप्त होती है।

(ii) एक अपरिमेय संख्या के साथ एक शून्येतर (nonzero) परिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल से एक अपरिमेय संख्या प्राप्त होता है।

(iii) यदि हम दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़े, घटाये, गुणा करें या एक अपरिमेय संख्या में दूसरी अपरिमेय संख्या का भाग दे तो परिणाम परिमेय या अपरिमेय कुछ भी हो सकता है।

अब यहाँ वर्ग मूलों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएँ (identities) दे रहे हैं, जो परिमेयकरण के लिये उपयोगी होंगी।

मान लीजिए a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं तब

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(iv) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}-\sqrt{ad}+\sqrt{bc}-\sqrt{bd}$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

(vi) $\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$

(vii) $\frac{1}{a+b\sqrt{x}} = \frac{a-b\sqrt{x}}{a^2-b^2x}$ जहाँ x एक प्राकृत संख्या है

(viii) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ जहाँ x तथा y प्राकृत संख्या है।

ऊपर दी गई सर्वसमिकाओं का उपयोग हर की परिमेयकरण (rationalise) में निम्न उदाहरणों में किया जायेगा। जब एक व्यंजक के हर में वर्गमूल वाला एक पद होता है या कोई संख्या करणी चिह्न अन्दर हो तब इसे ऐसे तुल्य व्यंजक में हर को परिमेय संख्या में परिवर्तित करने की क्रिया विधि को हर का परिमेय करण कहा जाता है।

उदाहरण 12 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : हम जानते है कि $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ परिमेय है।

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ को $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ से गुणा करने पर

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ का संख्या रेखा पर स्थान निर्धारण सरल हो जाता है। यह 0 और $\sqrt{2}$ के मध्य स्थित है।

उदाहरण 13 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : ऊपर दी गई सर्वसमिका (VI) का प्रयोग करते है

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ को $\left(2-\sqrt{3}\right)$ से गुणा करने और भाग देने पर

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\times\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

उदाहरण 14 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : ऊपर दी गई सर्वसमिका (iii) का प्रयोग करते है।

अतः $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}=\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

उदाहरण 15 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}}=\frac{1}{7+3\sqrt{2}}\times\left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right)=\frac{7-3\sqrt{2}}{49-18}=\frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

प्रश्नमाला 2.2

1. निम्नलिखित संख्याओं में से परिमेय और अपरिमेय संख्याएं बताइए।

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$

(iii) $\frac{2\sqrt{11}}{7\sqrt{11}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(v) 5π

2. निम्नलिखित के हरों का परिमेयकरण कीजिए

(i) $\frac{1}{5+3\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

3. यदि $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$ जहाँ a और b परिमेय है तब a और b का मान ज्ञात कीजिए।

8B5QI4

2.07 वास्तविक संख्याओ के लिए घातांक–नियम

जैसा कि आपने घातांक–नियमों का प्रयोग पिछली कक्षाओं में किया होगा कि a को आधार (base) और m और n को घातांक (exponents) कहा जाता है।

यहाँ a, n और m प्राकृत संख्याएं हैं।

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$ (ii) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

(iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^{\circ}$ क्या है? इसका मान 1 है। $(a)^{\circ} = 1$

$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ प्राप्त करते हैं। अब हम इन नियमों को ऋणात्मक घातांकों पर भी लागू कर सकते हैं जैसे

(i) $7^2 \cdot 7^{-5} = 7^{2-5} = 7^{-3} = \dfrac{1}{7^3}$

(ii) $\left(5^3\right)^{-7} = 5^{-21}$

(iii) $\dfrac{23^{-15}}{23^7} = 23^{-15-7} = 23^{-22}$

(iv) $(6)^{-3}(7)^{-3} = (42)^{-3}$

घातांक–नियम जिनका हम अध्ययन कर चुके हैं। हम उस स्थिति में भी लागू कर सकते है जबकि आधार धनात्मक वास्तविक संख्या और घातांक परिमेय संख्या हो। पिछले अनुच्छेद में हमने $\sqrt[n]{a}$ को इस प्रकार परिभाषित किया है जहाँ $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है

$$x^n = a \Rightarrow x = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$4^{3/2} = \left(4^{1/2}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{3/2} = \left(4^3\right)^{1/2} = (64)^{1/2} = \left(8^2\right)^{1/2} = 8$$

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है तथा m और n ऐसे पूर्णांक हैं कि 1 के अतिरिक्त

इनका कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है और $n > 0$ है। तब

(i) $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ (ii) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \times p]{a^p}$

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और p और q परिमेय संख्याएँ है, तब

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = \left(ab\right)^p$

सरल कीजिए

(i) $4^{2/3} \cdot 4^{1/3} = 4^{2/3+1/3} = 4^{3/3} = 4^1 = 4$ (ii) $\left(3^{1/5}\right)^8 = 3^{8/5}$

(iii) $\dfrac{9^{1/5}}{9^{1/3}} = 9^{1/5-1/3} = 9^{(3-5)/15} = 9^{-2/15}$

प्रश्नमाला 2.3

1. ज्ञात कीजिए :

(i) $81^{1/2}$ (ii) $64^{1/6}$ (iii) $(125)^{1/3}$

2. ज्ञात कीजिए :

(i) $4^{3/2}$ (ii) $32^{2/5}$ (iii) $16^{3/4}$

3. सरल कीजिए :

(i) $2^{2/3} \cdot 2^{1/7}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$

4. x का मान ज्ञात कीजिए :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} = \frac{125}{27}$$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 2.1

1. (i), (iv) और (v) अपरिमेय ;
(ii) और
(iii) परिमेय है।

2. 0.01001000100001 . . .; 0.202002000200002 . . ., 0.00300030000 . . .

3. (i) 0.36 सांत ;

(ii) $0.\overline{09}$ अनवसानी पुनरावर्ती ;

(iii) 4.125 सांत ;

(iv) $0.\overline{230769}$ अनवसानी पुनरावर्ती

(v) $0.\overline{18}$ अनवसानी पुनरावर्ती ;

(vi) 0.8225 सांत

4. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{47}{99}$ (iii) $\frac{14}{11}$ (iv) $\frac{233}{990}$

5. 0.75075007500075000075 . . .
0.767076700767000767 . . .
0.808008000800008 . . .

प्रश्नमाला 2.2

1. (i) अपरिमेय ; (ii) परिमेय ; (iii) परिमेय; (iv) अपरिमेय ; (v) अपरिमेय

2. (i) $-\frac{1}{38}\left(5-3\sqrt{7}\right)$; (ii) $-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$; (iii) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{7}+2\right)$

3. $a=\frac{13}{7}$, $b=\frac{9}{7}$

प्रश्नमाला 2.3

1. (i) 9 ; (ii) 2 ; (iii) 5

2. (i) 8 ; (ii) 4 ; (iii) 8

3. (i) $2^{\frac{2}{21}}$; (ii) 3^{-21}

4. $x=3$

अध्याय

3

8BELJR

बहुपद (Polynomials)

8PD6B7

3.01 प्रस्तावना

पूर्व कक्षाओं में हमने बीजीय व्यंजकों की विभिन्न संक्रियाओं का अध्ययन किया है जिसमें इन व्यंजकों के गुणनखण्ड करना सम्मिलित है। इन कक्षाओं में हमने निम्न बीजीय सर्वसमिकाओं का गुणनखण्डन में उपयोग किया है:–

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ तथा

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$.

इस अध्याय में हम कुछ विशिष्ट बीजीय व्यंजक, बहुपद (Polynomials) का अध्ययन करते हुए कुछ अन्य बीजीय सर्वसमिकाओं का गुणनखण्ड के सन्दर्भ में अध्ययन करेंगे।

3.02 बहुपद:

सर्वप्रथम हमें ज्ञात होना चाहिए कि चर राशि को एक संकेत यथा $x, y, z, \ldots$ के रूप में व्यक्त किया जाता है। इसी प्रकार जब किसी अचर और चर को चारों मूलभूत संक्रियाओं के साथ व्यक्त किया जाता है तो उसे बीजीय व्यंजक कहते हैं। $3x, 5x, -x, -\frac{3}{2}x$ आदि बीजीय व्यंजक हैं। बीजीय व्यंजक का सामान्य रूप ax है जिसमें a अचर और x चर है। $3x,\ x^2+3x,\ x^3+2x^2-4x+5$ आदि बीजीय व्यंजक हैं। इन सभी व्यंजकों में चर x के घातांक पूर्ण संख्या में हैं। इस प्रकार के व्यंजकों को हम एक चर वाला बहुपद (Polynomials in one variable) कहते हैं। उक्त उदाहरणों में x चर है। बहुपद को हम $p(x), g(x), q(y)$ आदि से प्रकट करते हैं। उदाहरणार्थ–

$$p(x) = 3x^2 + 4x - 5$$
$$g(x) = x^3 + 1$$
$$q(y) = y^3 + 2y - 1$$
$$s(t) = 3 - t - 2t^2 + 5t^3$$

बहुपद में परिमित संख्या में कितने भी पद हो सकते हैं।

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

जहाँ $a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1, a_0$ अचर तथा $a_n \neq 0$ है। बहुपद $x^2 + 3x$ में x^2 तथा $3x$ बहुपद के पद (Term) हैं। बहुपद में प्रत्येक पद का एक गुणांक (Coefficients) होता है।

बहुपद $5x^3 - 2x^2 + x + 3$ में

x^3 का गुणांक $= 5$ $\qquad$ x^2 का गुणांक $= -2$

x का गुणांक $= 1$ $\qquad$ x^o का गुणांक $= 3$

क्या 3 एक बहुपद है?

3, –7, 9 आदि अचर बहुपद (constant polynomals) कहलाते हैं।

0 को शून्य बहुपद कहते हैं।

एक पदवाले बहुपद को एकपदी (monomials) कहते हैं।

जैसे – $3x, 5x^2, -3x^3, 2, t^2, y$ आदि।

दो पदों वाले बहुपद को द्विपद (Binomials) कहते हैं।

जैसे – $x + 2, x^2 - 2x, y^n + 2, t^{30} - t^3$ आदि।

इसी प्रकार, तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद (Trinomials) कहते हैं।

जैसे– $p(x) = x^2 + x + 1$

$g(x) = x - x^2 + \sqrt{3}$

$t(y) = y^3 + y + 3$

$s(t) = t^4 + t^2 - 2$

किसी बहुपद में स्थित चर की अधिकतम घात वाले पद के घातांक को उस बहुपद की घात (Degree of the Polynomials) कहते हैं।

बहुपद $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 8x - 21$ में अधिकतम घातांक वाले पद $4x^3$ की घात $= 3$

बहुपद $q(y) = 3y^7 - 4y^6 + y + 9$ में अधिकतम घातांक वाले पद $3y^7$ की घात $= 7$

अतः बहुपद $p(x)$ और $q(y)$ की घात (Degree) क्रमशः 3 और 7 है।

अचर बहुपद $g(x) = 2$ में अधिकतम घातांक वाले पद $2 = 2x^o$ की घात $= 0$

अतः बहुपद $g(x)$ की घात (Degree) शून्य है

निष्कर्षतः एक शून्येतर अचर बहुपद की घात शून्य होती है।

बहुपद $p(x) = 5x + 4,\ g(y) = 12y,\ r(t) = 4 - 2t$ तथा $s(u) = \sqrt{3} + 2u$ का अवलोकन कीजिए।

इन सभी बहुपदों की घात 1 (एक) है।

एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद (Linear Polynomial) कहते हैं।

रैखिक बहुपद को सामान्य रूप से $p(x) = ax + b,\ a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

एक रैखिक बहुपद में अधिकतम दो पद हो सकते हैं। अर्थात् रैखिक बहुपद एक पदी या द्विपदी हो सकता है।

बहुपद

$p(x) = 2x^2 - 3x + 15,\quad g(x) = 5x^2 + 3$ तथा $g(y) = y^2 + 2y$ का अवलोकन कीजिये।

इन घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद (Quadratic Polynomial) कहते हैं।

द्विघाती बहुपद को सामान्य रूप से $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

एक द्विघाती बहुपद में अधिकतम तीन पद हो सकते हैं। अर्थात् द्विघाती बहुपद एक पदी, द्वि पदी या त्रिपदी हो सकता है।

इसी प्रकार,

तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद (Cubic Polynomial) कहते हैं। त्रिघाती बहुपद को सामान्य रूप $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

त्रिघाती बहुपद में अधिकतम चार पद हो सकते हैं।

एक चर x में n घात वाले बहुपद का सामान्य व्यंजक

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ जहाँ $a_n \neq 0$ तथा $a_n, a_{n-1}, \ldots a,\ a_0$ अचर हैं।

यदि $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ हो (अर्थात् सभी अचर शून्य हों) तो हमें शून्य बहुपद (Zero Polynomial) प्राप्त होता है। इसे हम 0 द्वारा प्रकट करते हैं। शून्य बहुपद की घात परिभाषित नहीं है।

बीजीय व्यंजक $x + \frac{1}{x}$ लीजिये

$x + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$

व्यंजक के दूसरे पद x^{-1} का घातांक -1 है जो पूर्ण संख्या नहीं है।

व्यंजक $\sqrt{x} + 5 = x^{1/2} + 5$

व्यंजक के पद $x^{1/2}$ का घातांक $\frac{1}{2}$ है जो पूर्ण संख्या नहीं है।

व्यंजक $\sqrt[3]{y} + y^3 = y^{1/3} + y^3$

व्यंजक के पद $y^{1/3}$ का घातांक $\frac{1}{3}$ है जो पूर्ण संख्या नहीं है।

उपर्युक्त सभी व्यंजक बहुपद नहीं हैं क्योंकि इनके किसी एक पद का घातांक पूर्ण संख्या नहीं है

अभी तक हमने केवल एक चर वाले बहुपदों का अध्ययन किया है। एक से अधिक चर वाले बहुपद भी उपलब्ध हैं। उदाहरणार्थ– $x^2 + y^2 + xyz,\ p^2 + 8q^3 + r^4,\ t^2 + s^3$ क्रमशः $3, 3$ व 2 चरों वाले बहुपद हैं जिनका अध्ययन आप आगे करेंगे।

प्रश्नमाला 3.1

1. निम्न व्यंजकों में से कौनसे बहुपद हैं? बहुपदों के चरों की संख्या ज्ञात कीजिए:

   (i) $3x^2-5x+13$ (ii) $y^2+2\sqrt{3}$ (iii) $y+\dfrac{3}{y}$

   (iv) 3 (v) $2\sqrt{x}+\sqrt{3}\,x$ (vi) $x^{12}+y^3+t^{20}$

2. निम्न व्यंजकों में प्रत्येक में x^2 का गुणांक लिखिये:

   (i) $12+3x+5x^2$ (ii) $7-11x+x^3$ (iii) $\sqrt{3}x-7$ (iv) $\dfrac{\pi}{2}x^2+x$

3. 45 घात के एक द्विपद का उदाहरण लिखिये।
4. 120 घात के एक एकपदी का उदाहरण लिखिये।
5. 8 घात के एक त्रिपदी का उदाहरण लिखिये।
6. प्रश्न संख्या 3, 4 व 5 में दिये गए उदाहरणों के अतिरिक्त पद भी क्या आप लिख सकते है? यदि हाँ तो प्रत्येक के दो उदाहरण लिखिये।
7. निम्न बहुपदों में प्रत्येक बहुपद की घात लिखिये:–

   (i) $12-3x+2x^3$ (ii) $5y-\sqrt{2}$ (iii) 9 (iv) $3+4t^2$

8PH2CU

3.03 बहुपद के शून्यक

एक बहुपद लीजिये

$$p(x)=2x^3-3x^2+4x-2$$

यदि हम $P(x)$ में x के स्थान पर 2 प्रतिस्थापित करते हैं तो हमें $p(x)$ का मान प्राप्त होगा।

$$p(2)=2\times(2)^3-3\times(2)^2+4\times2-2$$
$$=2\times8-3\times4+4\times2-2$$
$$=16-12+8-2=10$$

हम कह सकते हैं कि $x=2$ पर $P(x)$ का मान 10 है।

इसी प्रकार, $p(0)=2\times(0)^3-3\times(0)^2+4\times0-2=-2$ होगा

और $p(-1)=2(-1)^3-3(-1)^2+4\times(-1)-2$

$=2\times-1-3\times1+4\times1-2=-11$ होगा

अतः हम कह सकते है कि किसी बहुपद $p(x)$ का $x=\alpha$ पर मान $p(\alpha)$ बहुपद में x को α से प्रतिस्थापित करके प्राप्त होता है।

उदाहरण 1: द्विघात बहुपद $p(x)=8x^2-3x+7$ का मान $x=-1$ एवं $x=2$ पर ज्ञात कीजिये।

हलः $p(-1) = 8(-1)^2 - 3(-1) + 7$

$= 8 + 3 + 7 = 18$

एवं $p(2) = 8(2)^2 - 3(2) + 7$

$= 32 - 6 + 7 = 33$

उदाहरण 2: बहुपद $p(x) = 2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$ का $x = -\frac{1}{2}$ पर मान ज्ञात कीजिये।

हलः $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 13\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 17\left(-\frac{1}{2}\right) + 12$

$= 2 \times \frac{-1}{8} - 13 \times \frac{1}{4} + 17 \times \frac{-1}{2} + 12$

$= -\frac{1}{4} - \frac{13}{4} - \frac{17}{2} + 12 = 0$

उदाहरण 3: बहुपद $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ का $x = 1$ पर मान ज्ञात कीजिये।

हलः $p(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6$

$= 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

उक्त उदाहरण में क्योंकि $p(1) = 0$ है, तो हम यह कह सकते हैं कि 1, बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक (zero) है।

सामान्य रूप में, हम यह कहते हैं कि बहुपद $P(x)$ का शून्यक एक ऐसी संख्या α (अल्फा) है कि $p(\alpha) = 0$ हो।

बहुपद $p(x) = x - 1$ में $p(1)$ का क्या मान है?

$p(1) = 1 - 1 = 0$

यहाँ ध्यान देने योग्य है कि बहुपद $p(x) = x - 1$ का शून्यक, बहुपद को 0 (शून्य) के बराबर (Equal) करके प्राप्त होता है। अर्थात् $x - 1 = 0$ करने से $x = 1$ प्राप्त होता है। तब हम कहते हैं कि $p(x) = 0$ एक बहुपद समीकरण है और 1 इस बहुपद समीकरण $p(x) = 0$ का एक मूल है। अतः हम कहते हैं कि 1, बहुपद $(x - 1)$ का शून्यक है या यह बहुपद समीकरण $x - 1 = 0$ का मूल (root) है।

एक अचर बहुपद 7 का शून्यक क्या है?

इस बहुपद का कोई शून्यक नहीं है क्योंकि $7x^o$ में x के स्थान पर किसी भी संख्या का प्रतिस्थापन करने पर हमें 7 ही प्राप्त होता है। वास्तव में एक शून्येत्तर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं होता है।

तो फिर शून्य बहुपद के शून्यक क्या होते हैं?

पारम्परिक रूप से प्रत्येक वास्तविक संख्या (Real Number), शून्य बहुपद का एक शून्यक (Zero) होती है।

उदाहरण 4: 3 अथवा –3 के बहुपद $p(x) = x + 3$ के शून्यक होने की जाँच कीजिए।

हल: $p(x) = x + 3$

$p(3) = 3 + 3 = 6$

$p(-3) = -3 + 3 = 0$

अतः –3 बहुपद $p(x) = x + 3$ का एक शून्यक है, जबकि 3 नहीं।

उदाहरण 5: बहुपद $p(x) = 3x + 2$ का शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल: $p(x)$ का शून्यक हम समीकरण $p(x) = 0$ को हल करके ज्ञात कर सकते हैं।

$\therefore \quad p(x) = 3x + 2 = 0$

$$x = -\frac{2}{3}$$

अतः बहुपद $(3x + 2)$ का शून्यक $-\frac{2}{3}$ है।

इस प्रकार, यदि $p(x) = ax + b,\ a \neq 0$ एक रैखिक बहुपद हो, तो हम $p(x)$ का शून्यक उक्त उदाहरण की तरह ज्ञात करते हैं। अर्थात् बहुपद $p(x)$ का शून्यक ज्ञात करने का अर्थ है, बहुपद समीकरण $p(x) = 0$ को हल करना।

अर्थात् $p(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0,\ \ a \neq 0$

$$ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

अतः $x = -\frac{b}{a}$ ही $p(x)$ का केवल एक शून्यक है। अर्थात् रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।

उदाहरण 6: सत्यापित कीजिए कि 3 और 0, बहुपद $x^2 - 3x$ के शून्यक हैं।

हल: $p(x) = x^2 - 3x$

तो $p(3) = (3)^2 - 3(3) = 9 - 9 = 0$

और $p(0) = (0)^2 - 3(0) = 0 - 0 = 0$

अतः 3 और 0 दोनों ही बहुपद $p(x) = x^2 - 3x$ के शून्यक हैं।

सार रूप में हमने यह निष्कर्ष निकाला कि–

1. बहुपद का शून्यक, शून्य ही होना आवश्यक नहीं है।
2. बहुपद का एक शून्यक 0 भी हो सकता है।
3. रैखिक बहुपद का एक और केवल एक शून्यक होता है।
4. एक बहुपद के एक से अधिक शून्यक हो सकते हैं।

प्रश्नमाला 3.2

1. बहुपद $2x^3 - 13x^2 + 17x + 12$ के मान x के निम्नलिखित मानों पर ज्ञात कीजिए।

   (i) $x = 2$ (ii) $x = -3$ (iii) $x = 0$ (iv) $x = -1$

2. निम्नलिखित बहुपदों में से प्रत्येक बहुपद के लिए $P(2), P(1)$ और $P(0)$ का मान ज्ञात कीजिए।

   (i) $p(x) = x^2 - x + 1$ (ii) $p(y) = (y+1)(y-1)$

   (iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(t) = 2 + t + t^2 - t^3$

3. निम्नलिखित बहुपदों के सम्मुख अंकित मान बहुपद के शून्यक है, सत्यापित कीजिए।

   (i) $p(x) = x^2 - 1;\ x = 1,\ -1$ (ii) $p(x) = 2x + 1;\ x = -\frac{1}{2}$

   (iii) $p(x) = 4x + 5;\ x = \frac{-5}{4}$ (iv) $p(x) = 3x^2;\ x = 0$

   (v) $p(x) = (x-3)(x+5);\ x = 3, -5$ (vi) $p(x) = ax + b;\ x = -\frac{b}{a}$

   (vii) $p(x) = 3x^2 - 1;\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ (viii) $p(x) = 3x + 2;\ x = \frac{-2}{3}$

4. निम्नलिखित बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए।

   (i) $p(x) = x - 4$ (ii) $p(x) = 4x$

   (iii) $p(x) = bx,\ b \neq 0$ (iv) $p(x) = x + 3$

   (v) $p(x) = 2x - 1$ (vi) $p(x) = 3x + 7$

   (vii) $p(x) = cx + d,\ c \neq 0,\ c, d$ वास्तविक संख्याएँ हैं।

8PVXEH

शेषफल प्रमेय

हमें ज्ञात है कि 25 में 7 का भाग देने पर भागफल 3 और शेषफल 4 प्राप्त होता है।

गणितीय रूप से इसे हम इस प्रकार लिखते हैं–

$25 = (3 \times 7) + 4$

इसी प्रकार 48 में 8 का भाग देने पर हमें प्राप्त होता है

$48 = (6 \times 8) + 0$

यहाँ शेषफल शून्य (0) है।

इसे हम कहते हैं कि 8, 48 का एक गुणनखण्ड (Factor) है अथवा 48, 8 का एक गुणज (Multiple) है। इसी प्रकार हम एक बहुपद में दूसरे बहुपद का भाग दे सकते हैं। प्रथम स्थिति में, यदि भाजक एक पदी हो। उदाहरणार्थ– बहुपद $3x^3 + 2x^2 + x$ में एक पदी x का भाग देने पर $\left(3x^3 + 2x^2 + x\right) \div x = \frac{3x^3}{x} + \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} = 3x^2 + 2x + 1$, यहाँ $\left(3x^3 + 2x^2 + x\right)$ में x सर्वनिष्ठ (common) है $3x^3 + 2x^2 + x = x\left(3x^2 + 2x + 1\right)$

अर्थात् x और $\left(3x^2 + 2x + 1\right)$ बहुपद $3x^3 + 2x^2 + x$ के गुणनखण्ड हैं। अब $5x^2 + x + 1$ में x का भाग देने पर

$$\left(5x^2 + x + 1\right) \div x = \left(5x^2 \div x\right) + \left(x \div x\right) + \left(1 \div x\right)$$

यहाँ 1 को x से भाग देने पर बहुपद प्राप्त नहीं होता है।

अतः $5x^2 + x + 1 = \left[(5x + 1) \times x\right] + 1$

यहाँ $(5x + 1)$ भागफल और शेषफल 1 है। शेषफल होने के कारण यह गुणनखण्ड नहीं है।

अर्थात् भाज्य = (भाजक × भागफल) + शेषफल

सामान्य रूप से व्यक्त करने पर

यदि $p(x)$ और $g(x)$ दो ऐसे बहुपद हों कि बहुपद $p(x)$ की घात बहुपद $g(x)$ की घात से बड़ी अथवा बराबर हो तथा $g(x) \neq 0$ हो तो हमें ऐसे दो बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ प्राप्त होते हैं कि–

$$p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

जहाँ $r(x) = 0$ या $r(x)$ की घात $g(x)$ की घात से छोटी है।

अर्थात् $p(x)$ में $g(x)$ से भाग देने पर भागफल $q(x)$ और शेषफल $r(x)$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 7 : $p(x)$ में $g(x)$ का भाग दीजिए जहाँ $p(x) = 7x + 5x^2 + 3$ और $g(x) = x + 1$ है।

हलः

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x+2 \\
\cline{2-2}
x+1 & 5x^2+7x+3 \\
 & 5x^2+5x \\
 & -\quad - \\
\cline{2-2}
 & 2x+3 \\
 & 2x+2 \\
 & -\quad - \\
\cline{2-2}
 & \quad 1
\end{array}
$$

ध्यातव्यः इस हल में हमने भाग देने की प्रक्रिया निम्न चरणों में पूर्ण की है।

चरण **I** – सर्वप्रथम भाज्य $7x+5x^2+3$ और भाजक $x+1$ को मानक रूप से लिखते हुऐ पदों को अवरोही (Descending) क्रम में लिखा। अर्थात् भाज्य $5x^2+7x+3$ और भाजक $x+1$

चरण **II** – भाज्य के प्रथम पद को भाजक के प्रथम पद से भाग देकर अर्थात् $5x^2$ को x से भाग देकर $5x$ प्राप्त हुआ।

चरण **III** – भाजक को भागफल के प्रथम पद $5x$ से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल $5x^2+5x$ को भाज्य में से घटाया। इस प्रकार शेषफल $2x+3$ प्राप्त हुआ।

चरण **IV** – शेषफल $2x+3$ को नया भाज्य मानकर पुनः चरण II की प्रक्रिया अपनाई। इस प्रकार भागफल का दूसरा पद 2 प्राप्त हुआ।

चरण **V** – चरण III की तरह ही भागफल के दूसरे पद 2 को भाजक $x+1$ से गुणा करके प्राप्त गुणनफल $2x+2$ को भाज्य $2x+3$ में से घटाया। इससे शेषफल 1 प्राप्त हुआ।

यह प्रक्रिया हम तब तक जारी रखते हैं। जब तक कि नये भाज्य की घात भाजक की घात से न्यून नहीं हो जाती है। अन्तिम चरण में भाज्य शेषफल बन जाता है और भागफलों के योग से पूर्ण भागफल बन जाता है।

इस उदाहरण में भाजक एक रैखिक बहुपद है। इसमें हम शेषफल और भाज्य के कुछ मानों में सम्बन्ध के बारे में विचार करते हैं।

$p(x)=5x^2+7x+3$ में x के स्थान पर -1 प्रतिस्थापित करने पर

$p(-1)=5(-1)^2+7(-1)+3=5-7+3=1$ प्राप्त होता है।

अतः $p(x)=5x^2+7x+3$ को $(x+1)$ से भाग देने पर जो शेषफल प्राप्त होता है। वह बहुपद $(x+1)$ के शून्यक -1, पर बहुपद $p(x)$ के मान के बराबर होता है।

कुछ अन्य उदाहरणों पर विचार कीजिए।

उदाहरण 8: $2x^4-3x^3+3x+1$ में $x+1$ का भाग दीजिए।

हलः भागविधि से

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^3-5x^2+5x-2 \\ \hline
x+1 & 2x^4-3x^3+3x+1 \\
 & 2x^4+2x^3 \\
 & -\quad - \\ \hline
 & -5x^3\qquad +3x+1 \\
 & -5x^3-5x^2 \\
 & +\quad + \\ \hline
 & 5x^2+3x+1 \\
 & 5x^2+5x \\
 & -\quad - \\ \hline
 & -2x+1 \\
 & -2x-2 \\
 & +\quad + \\ \hline
 & \quad 3
\end{array}
$$

शेषफल $=3$

भाजक $x+1$ का शून्यक -1 है। अतः $p(x)$ में $x=-1$ रखने पर

$$p(-1)=2(-1)^4-3(-1)^3+3(-1)+1$$
$$=2+3-3+1=3$$
$=$ शेषफल

उदाहरण 9: $p(x)=x^3-1$ में $x-1$ का भाग देने पर शेषफल क्या होगा ?

हलः
$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^2+x+1 \\ \hline
x-1 & x^3-1 \\
 & x^3\qquad -x^2 \\
 & -\qquad + \\ \hline
 & x^2\qquad -1 \\
 & x^2-x \\
 & -\ + \\ \hline
 & x-1 \\
 & x-1 \\
 & -\ + \\ \hline
 & \ 0
\end{array}
$$

$=$ शेषफल

$x-1=0$ का मूल $x=1$ है तथा $p(x)=x^3-1$ है।

$p(1)=(1)^3-1=1-1=0$

अतः $p(1)=0$ भागविधि से प्राप्त शेषफल के बराबर है।

इस प्रकार, यह एक बहुपद को रैखिक बहुपद से भाग देने पर शेषफल ज्ञात करने की एक सरल विधि है।

इस तथ्य को हम प्रमेय के रूप में व्यक्त कर सकते है।

शेषफल प्रमेय

यदि $p(x)$ एक या उससे अधिक घात वाला बहुपद है और a एक वास्तविक संख्या है। यदि $p(x)$ को रैखिक बहुपद $x-a$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $p(a)$ प्राप्त होता है।

उपपत्तिः माना कि $p(x)$ एक या उससे अधिक घात वाला बहुपद है और $p(x)$ को $x-a$ से भाग देने पर भागफल $q(x)$ और शेषफल $r(x)$ प्राप्त होता है। अर्थात्

$$p(x)=(x-a)q(x)+r(x)$$

चूंकि $x-a$ की घात 1 है और $r(x)$ की घात $(x-a)$ की घात से कम है। अतः $r(x)$ की घात 0 है। अर्थात् $r(x)$ एक अचर है। माना यह अचर r है।

अतः x के प्रत्येक मान के लिए $r(x)=r$ है।

$$p(x)=(x-a)q(x)+r$$

यदि $x=a$ हो तो

$$p(a)=(a-a)q(x)+r$$

$$=0\times q(x)+r=r$$

इति सिद्धम्

उदाहरण 10: $x^4-4x^2+x^3+2x+1$ को $x-1$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हलः $p(x)=x^4-4x^2+x^3+2x+1$

$x-1$ का शून्यक 1 है।

$\therefore \quad P(1)=(1)^4-4(1)^2+(1)^3+2(1)+1$

$=1-4+1+2+1=5-4=1$

अतः शेषफल $=1$

उदाहरण 11: सत्यापित कीजिए कि बहुपद $p(x)=4x^3-12x^2+13x-4$, $g(x)=2x-1$ का एक गुणज है।

हलः $p(x), g(x)$ का गुणज केवल तभी होगा जबकि $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर शेषफल शून्य हो।

अतः $g(x)=2x-1=0$

$$x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad p\left(\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)^3-12\left(\frac{1}{2}\right)^2+13\left(\frac{1}{2}\right)-4$$

$$=\frac{1}{2}-3+\frac{13}{2}-4=0$$

अतः $g(x)$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है अर्थात् $p(x), g(x)$ का एक गुणज है।

प्रश्नमाला 3.3

1. बहुपद $x^4+x^3-3x^2+3x+1$ में निम्नलिखित एक घातीय व्यंजक से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

   (i) $x-1$ (ii) $x-\frac{1}{2}$ (iii) $x+\pi$ (iv) $3+2x$ (v) x

2. $2x^3+2ax^2-5x+a$ को $x+a$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।
3. जाँच कीजिये कि $x+1, x^3+3x^2+3x+1$ का एक गुणनखण्ड है या नहीं।
4. बहुपद x^3+x^2-4x+a और $2x^3+ax^2+3x-3$ को $x-2$ से भाग देने पर समान शेषफल प्राप्त होता है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

8Q5TG5

बहुपदों के गुणनखण्डः

उपर्युक्त उदाहरण संख्या 10 का अवलोकन करने का ज्ञात होता है कि चूँकि $p\left(\frac{1}{2}\right)=0$ है, अतः $g(x)=(2x-1), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है। अर्थात् किसी बहुपद $p(x)$ के लिए

$$p(x)=(2x-1)q(x)$$

यह निम्नलिखित प्रमेय की विशेष स्थिति है।

गुणनखण्ड प्रमेयः यदि $p(x)$ एक या उससे अधिक घात वाला बहुपद हो और a इस प्रकार की वास्तविक संख्या हो कि $p(a)=0$ तो $(x-a)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है। अर्थात् यदि $(x-a), p(x)$ का एक गुणनखण्ड है तो $p(a)=0$ होता है।

उदाहरण 12: $x-3$ के बहुपद $x^3-3x^2+4x-12$ एवं बहुपद $3x-9$ का एक गुणनखण्ड होने की जाँच कीजिए।

हलः $p(x)=x^3-3x^2 4x-12,\ q(x)=3x-9$

गुणनखण्ड प्रमेयानुसार $(x-3)$ के $p(x)$ व $q(x)$ का एक गुणनखण्ड होने पर

$p(3) = q(3) = 0$

$(x-3)$ का शून्यक $= 3$

$p(3) = (3)^3 - 3(3)^2 + 4(3) - 12$

$= 27 - 27 + 12 - 12 = 0$

अतः $x-3,\ p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

इसी प्रकार, $q(3) = 3 \times 3 - 9 = 0$, अतः

$x-3,\ q(x)$ का भी एक गुणनखण्ड है।

उदाहरण 13: यदि $x-5,\ x^3 - 3x^2 + ax - 10$ का एक गुणनखण्ड है तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $x-5,\ p(x) = x^3 - 3x^2 + ax - 10$ का एक गुणनखण्ड है

$\therefore$ $p(5) = 0$ होगा।

अर्थात् $p(5) = (5)^3 - 3(5)^2 + a(5) - 10 = 0$

तो $125 - 75 + 5a - 10 = 0$

या $40 + 5a = 0$

$$a = -\frac{40}{5} = -8$$

2 व 3 घात वाले बहुपदों के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग $ax^2 + bx + c$ जहाँ $a \neq 0$ व a, b, c अचर हैं, गुणनखण्ड सामान्यतया मध्य पद को विभक्त करके होता है।

माना $ax^2 + bx + c = (px+q)(rx+s)$

$= prx^2 + (ps+qr)x + qs$

गुणांको की तुलना करने पर

$a = pr$

$b = ps + qr$

$c = qs$

यहाँ b दो संख्याओं ps व qr का योगफल है जिनका गुणनफल

$(ps)(qr) = (pr)(qs) = a \cdot c$ है।

अतः हम $ax^2 + bx + c$ का गुणनखण्ड करने के लिए b को ऐसी दो संख्याओं के योगफल के रूप में लिखते हैं जिनका गुणनफल ac हो।

उदाहरण 14: $6x^2+17x+5$ का गुणनखण्ड मध्यपद को विभक्त कर तथा गुणनखण्ड प्रमेय के प्रयोग द्वारा कीजिए।

हल: **1.** मध्य पद को विभक्त करके–

हमें मध्यपद 17 को विभक्त कर ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात करनी है जिनका योगफल 17 तथा गुणनफल 6 × 5= 30 हो।

30 के गुणनखण्ड $1\times 30=30$

$2\times 15=30$

$3\times 10=30$

$5\times 6=30$

इनमें से 2 व 15 का योगफल 17 है। अतः

$$6x^2+17x+5=6x^2+(2+15)x+5$$

$$=6x^2+2x+15x+5$$

$$=2x(3x+1)+5(3x+1)$$

$$=(3x+1)(2x+5)$$

2. गुणनखण्ड प्रमेय द्वारा

$$6x^2+17x+5=6\left(x^2+\frac{17}{6}x+\frac{5}{6}\right)=6\cdot p(x)$$

माना कि $p(x)$ के शून्यक a और b हैं। तो

$$6x^2+17x+5=6(x-a)(x-b)$$

$$ab=\frac{5}{6}$$

अब a, b के संभावित मान $=\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{5}{2},\pm\frac{5}{3},\pm 1$ अब क्रमशः ज्ञात करने पर

$$p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{17}{12}+\frac{5}{6}\neq 0$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{17}{6}\times\frac{-1}{3}+\frac{5}{6}$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{17}{18}+\frac{5}{6}=0$$

अतः $\left(x+\frac{1}{3}\right)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

इसी प्रकार जाँच करने पर हमें ज्ञात होता है कि $\left(x+\frac{5}{2}\right)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$\therefore \quad 6x^2+17x+5=6\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)$$

$$=6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$

$$=(3x+1)(2x+5)$$

उदाहरण 15: गुणनखण्ड प्रमेय की सहायता से $x^2-7x+12$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हलः $p(x)=x^2-7x+12$

अब यदि $p(x)=(x-a)(x-b)$

तो अचर पद $ab=12$

अतः $p(x)$ के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए 12 के गुणनखण्ड ज्ञात करते हैं।

12 के गुणनखण्ड 1, 2, 3, 4, 6 हैं।

$p(3)=(3)^2-7(3)+12=0$

अतः $(x-3)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

इसी तरह, $p(4)=(4)^2-7(4)+12=0$

अतः $(x-4)$ भी $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

इस प्रकार $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

उदाहरण 16: गुणनखण्ड प्रमेय का उपोग करते हुए बहुपद $x^4+x^3-7x^2-x+6$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हलः माना $p(x)=x^4+x^3-7x^2-x+6$

अचर पद 6 के गुणनखण्ड – $\pm 1, \pm 2, \pm 3$, व ± 6

$$p(1)=(1)^4+(1)^3-7(1)^2-1+6=8-8=0$$

अतः $(x-1)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

इसी प्रकार, $p(-1)=(-1)^4+(-1)^3-7(-1)^2-(-1)+6=8-8=0$

अतः $(x-1)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$p(2)=(2)^4+(2)^3-7(2)^2-(2)+6=30-30=0$$

अतः $(x-2)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

$$p(-2)=(-2)^4+(-2)^3-7(-2)^2-(-2)+6=24-36\neq 0$$

अतः $(x+2)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड नहीं हैं।

$$p(-3)=(-3)^4+(-3)^3-7(-3)^2-(-3)+6=90-90=0$$

अतः $(x+3)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

चूँकि $p(x)4$ घात वाला बहुपद है। अतः इसके 4 से अधिक रैखिक गुणनखण्ड नहीं हो सकते हैं।

$$\therefore \quad p(x)=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$$

$$\Rightarrow \quad x^4+x^3-7x^2-x+6=k(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)\ldots(1)$$

दोनों तरफ $x=0$ रखने पर

$$0+0+0-0+6=k(-1)(1)(-2)(3)$$

$$6=6k$$

$$k=1$$

$k=1$ समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$x^4+x^3-7x^2-x+6=(x-1)(x+1)(x-2)(x+3)$$

प्रश्नमाला 3.4

1. $x-1$ निम्न में से किस–किस बहुपद का एक गुणनखण्ड है?

   (i) $x^4-2x^3-3x^2+2x+2$ (ii) $x^4+x^3+x^2+x+1$

   (iii) $x^4+3x^3-3x^2+x-2$ (iv) $x^3-x^2-(2+\sqrt{3})x+\sqrt{3}$

2. गुणनखण्ड प्रमेय का प्रयोग करते हुए ज्ञात कीजिए कि क्या $g(x)$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है?

   (i) $p(x)=3x^3-x^2-3x+1$; $g(x)=x+1$

   (ii) $p(x)=2x^4-7x^3-13x^2+63x-45$; $g(x)=x-1$

   (iii) $p(x)=3x^3+3x^2+3x+1$; $g(x)=x+2$

   (iv) $p(x)=2x^3+x^2-2x-1$; $g(x)=2x+1$

3. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि $(x-5)$ बहुपद $x^3-3x^2+kx-10$ का एक गुणनखण्ड है।

4. k का मान ज्ञात कीजिए जबकि $(x-1)$ बहुपद $2x^2+kx+\sqrt{2}$ का एक गुणनखण्ड है।

5. यदि $(x+1)$ और $(x-1)$ बहुपद $x^4+ax^3-3x^2+2x+b$ के गुणनखण्ड हों तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।

6. गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $3x^2+7x+2$ (ii) $4x^2-x-3$

(iii) $12x^2-7x+1$ (iv) $6x^2+5x-6$

7. बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए:

(i) $x^3+6x^2+11x+6$ (ii) x^3+2x^2-x-2

(iii) $x^4-2x^3-7x^2+8x+12$ (iv) x^3-2x^2-x+2

(v) x^3-3x^2-9x-5 (vi) $x^3-23x^2+142x-120$

बीजीय सर्वसमिकाएँ

पूर्व कक्षाओं में हमने अध्ययन किया है कि बीजीय सर्वसमिका (Algebric Identift) एक ऐसी बीजीय समीकरण होती है जो चर के सभी वास्तविक मानों के लिए सत्य होती हैं पूर्व कक्षाओं में हमने निम्न बीजीय सर्वसमिकाओं का अध्ययन किया है:–

सर्वसमिका I : $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

सर्वसमिका II : $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

सर्वसमिका III : $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

सर्वसमिका IV : $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

उपर्युक्त सभी सर्वसमिकाएँ द्विपदों के गुणनफलों से सम्बन्धित रही हैं।

V सर्वसमिका I को त्रिपद $x+y+z$ पर लागू करने पर हम $(x+y+z)^2$ का अभिकलन करते हैं।

माना $x+y=t$

$\therefore \quad (x+y+z)^2=(t+z)^2$

$=t^2+2tz+z^2$ [सर्वसमिका I के अनुसार]

$=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$ [t का प्रतिस्थापन करने पर]

$=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

अतः सर्वसमिका V : $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$

उदाहरण 17: $(2x+4y+3z)^2$ का विस्तार कीजिए।

हल: सर्वसमिका से तुलना करने पर

$x=2x,\ y=4y,\ z=3z$

सर्वसमिका V का प्रयोग करने पर

$$(2x+4y+3z)^2=(2x)^2+(4y)^2+(3z)^2+2(2x)(4y)+2(4y)(3z)+2(3z)(2x)$$

$= 4x^2 + 16y^2 + 9z^2 + 16xy + 24yz + 12zx$

उदाहरण 18: $(2a - 3b - 4c)^2$ का विस्तार कीजिए।

हल: सर्वसमिका V का प्रयोग करने पर

$$(2a - 3b - 4c)^2 = [2a + (-3b) + (-4c)]^2$$

$$= (2a)^2 + (-3b)^2 + (-4c)^2 + 2(2a)(-3b) + 2(-3b)(-4c) + 2(-4c)(2a)$$

$$= 4a^2 + 9b^2 + 16c^2 - 12ab + 24bc - 16ac$$

उदाहरण 19: $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल: $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 2yz + 4xz$

$$= (2x)^2 + (-y)^2 + (z)^2 + 2(2x)(-y) + 2(-y)(z) + 2(z)(2x)$$

$= (2x - y + z)^2$ [सर्वसमिका V के अनुसार]

$$= (2x - y + z)(2x - y + z)$$

सर्वसमिका I को $(x + y)^3$ ज्ञात करने में उपयोग करने पर

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2$$

$$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$= x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

इस प्रकार हमें सर्वसमिका प्राप्त होती है–

सर्वसमिका VI : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

उक्त सर्वसमिका VI में y को $-y$ से प्रतिस्थापित करने पर

सर्वसमिका VII : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$$= x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$$

उदाहरण 20: सर्वसमिकाओं के प्रयोग से निम्न व्यंजकों का विस्तार कीजिए:

(i) $(4a + 3b)^3$ (ii) $(3x - 5y)^3$

हल: (i) $(4a + 3b)^3$ की सर्वसमिका $(x + y)^3$ से तुलना करने पर $x = 4a$ और $y = 3b$

$(4a+3b)^3 = (4a)^3 + (3b)^3 + 3(4a)(3b)(4a+3b)$

$= 64a^3 + 27b^3 + 144a^2b + 108ab^2$

(ii) सर्वसमिका $(x-y)^3$ के साथ $(3x-5y)^3$ की तुलना करने पर

$x = 3x,\ \ y = 5y$

$\therefore \quad (3x-5y)^3 = (3x)^3 - (5y)^3 - 3(3x)(5y)(3x-5y)$

$= 27x^3 - 125y^3 - 135x^2y + 225xy^2$

उदाहरण 21: उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करते हुए हल कीजिए।

(i) $(102)^3$ (ii) $(998)^3$

हलः (i) $(102)^3 = (100+2)^3$

$= (100)^3 + (2)^3 + 3(100)(2)(100+2)$ [सर्वसमिका VI का प्रयोग करने पर]

$= 1000000 + 8 + 60000 + 1200$

$= 1061208$

(ii) $(998)^3 = (1000-2)^3$

$= (1000)^3 - (2)^3 - 3(1000)(2)(1000-2)$

$= 1000000000 - 8 - 6000000 + 12000$

$= 994011992$

उदाहरण 22: $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हलः $8x^3 + 27y^3 + 36x^2y + 54xy^2$

$= (2x)^3 + (3y)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2$

$= (2x+3y)^3$ [सर्वसमिका VI के अनुसार]

$= (2x+3y)(2x+3y)(2x+3y)$

आइए हम एक अन्य महत्वपूर्ण सर्वसमिका ज्ञात करते है

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ का विस्तार करने पर

$= x\ (x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + y(x^2+y^2+z^2-xy-yz-2x) +$

$z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$= x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - x^2z + x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz$

$+ x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ (सरल करने पर प्राप्त)

इस प्रकार हमें निम्न सर्वसमिका प्राप्त होती है:–

सर्वसमिका VIII: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

उदाहरण 23: $27x^3+y^3+z^3-9xyz$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल: $27x^3+y^3+z^3-9xyz=(3x)^3+(y)^3+(z)^3-3(3x)(y)(z)$

$$=(3x+y+z)\left[(3x)^2+y^2+z^2-3x\cdot y-y\cdot z-z\cdot 3x\right]$$

[सर्वसमिका VIII का प्रयोग करने पर]

$$=(3x+y+z)(9x^2+y^2+z^2-3xy-yz-3zx)$$

प्रश्नमाला 3.5

1. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(x+3)(x+7)$ (ii) $(x-5)(x+8)$ (iii) $(2x+7)(3x-5)$

(iv) $(5-3x)(3+2x)$ (v) $\left(x^2+\frac{3}{5}\right)\left(x^2-\frac{3}{5}\right)$ (vi) $(x+2)(x-5)$

2. बीजीय सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) 104×109 (ii) 94×97 (iii) 103×97

3. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके गुणनखण्ड कीजिए।

(i) $x^2+6xy+9y^2$ (ii) x^2-4x+4 (iii) $\frac{x^2}{100}-y^2$

4. उपयुक्त सर्वसमिका का प्रयोग करके निम्नलिखित का विस्तार कीजिए।

(i) $(2a-3b-c)^2$ (ii) $(2+x-2y)^2$ (iii) $(a+2b+4c)$

(iv) $(m+2n-5p)^2$ (v) $(3a-7b-c^2)^2$ (vi) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)^2$

5. गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $9x^2+4y^2+16z^2-12xy-16yz+24xz$

(ii) $x^2+2y^2+8z^2+2\sqrt{2}xy-8yz-4\sqrt{2}xz$

6. निम्न घनों का विस्तार कीजिए:

(i) $(3a-2b)^3$ (ii) $(1+2x)^3$ (iii) $\left(\frac{2}{5}x+3\right)^3$ (iv) $\left(x-\frac{2}{3}y\right)^3$

7. उपयुक्त सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके मान ज्ञात कीजिए:

(i) $(98)^3$ (ii) $(103)^3$ (iii) $(999)^3$

8. गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $x^3+8y^3+6x^2y+12xy^2$ (ii) $27a^3-8b^3-54a^2b+36ab^2$

(iii) $27-125x^3-135x+225x^2$ (iv) $125x^3-64y^3-300x^2y+240xy^2$

9. गुणनखण्ड कीजिए:

(i) $64a^3+27b^3$ (ii) $125x^3-8y^3$

10. सत्यापित कीजिए:

(i) $x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$

(ii) $27a^3+b^3+c^3=(3a+b+c)\left[9a^2+b^2+c^2-3ab-bc-3ac\right]$

11. यदि $x+y+z=0$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $x^3+y^3+z^3=3xyz$

12. उपयुक्त बीजीय सर्वसमिका का प्रयोग करते हुए गणना कीजिए:

(i) $(30)^3+(20)^3+(-50)^3$ (ii) $(-15)^3+(28)^3+(-13)^3$

[संकेत : सर्वसमिका का प्रयोग करें, यदि $x+y+z=0$ हो तो $x^3+y^3+z^3=3xyz$]

महत्वपूर्ण बिन्दु

इस अध्याय हमने निम्नलिखित बिन्दुओं का अध्ययन किया है:–

1. एक चर वाला बहुपद $p(x)$ निम्न रूप में x का एक बीजीय व्यंजक है

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_2x^2+a_1x+a_0$$

जहाँ $a_0,a_1,a_2,...a_{n-1},a_n$ अचर तथा $a_n\neq 0$ है। $a_0,a_1,a_2...a_n$ क्रमशः $x^o,x,x^2,...,a^n$ के गुणांक हैं और n बहुपद की घात है। प्रत्येक $a_nx^n,a_{n-1},x^{n-1},...,a_0$ जहाँ $a_n\neq 0$, को बहुपद $p(x)$ का पद कहते हैं।

2. एक पद वाले बहुपद को एकपदी कहते हैं।
3. दो पदों वाले बहुपद को द्विपद कहते हैं।
4. तीन पदों वाले बहुपद को त्रिपद कहते हैं।
5. एक घात वाले बहुपद को रैखिक बहुपद कहते हैं।
6. दो घात वाले बहुपद को द्विघाती बहुपद कहते हैं।
7. तीन घात वाले बहुपद को त्रिघाती बहुपद कहते हैं।
8. वास्तविक संख्या a, बहुपद $p(x)$ का एक शून्यक होती है, यदि $p(a)=0$ हो।
9. एक चर में प्रत्येक रैखिक बहुपद का एक अद्वितीयक शून्यक होता है। एक शून्येतर अचर बहुपद का कोई शून्यक नहीं है और प्रत्येक वास्तविक संख्या शून्य बहुपद का एक शून्यक होती है।

10. शेषफल प्रमेय : यदि $p(x)$ एक या उससे अधिक घात वाला बहुपद है और a एक वास्तविक संख्या है। यदि $p(x)$ में रैखिक बहुपद $(x-a)$ से भाग दिया जाए तो शेषफल $p(a)$ प्राप्त होता है।

11. यदि $p(a)=0$ हो, तो $x-a$ बहुपद $p(x)$ का एक गुणनखण्ड होता है और यदि $x-a$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड हो, तो $p(a)=0$ होता है।

12. $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$

13. $(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$

14. $(x-y)^3 = x^3-y^3-3xy(x-y)$

15. $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 3.1

1. (i) बहुपद है, एक चर

(ii) बहुपद है, एक चर

(iii) व (v) बहुपद नहीं, क्योंकि प्रत्येक घातांक पूर्ण संख्या नहीं

(iv) अचर बहुपद है

(vi) बहुपद है, तीन चर

2. (i) 1 (ii) 0 (iii) 0 (iv) $\frac{\pi}{2}$

3. $5x^{45}+7$ (अन्य बहुपद भी संभव हैं।)

4. $3x^{120}$ (अन्य बहुपद भी संभव हैं।)

5. $2x^8+3x^4+5x$ (अन्य बहुपद भी संभव हैं।)

6. संभव हैं। आप स्वयं लिखिए।

7. (i) 3 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 2

प्रश्नमाला 3.2

1. (i) 10 (ii) –210 (iii) 12 (iv) –20

2. (i) 3, 1, 1 (ii) 3, 0, –1 (iii) 8, 1, 0 (iv) 0, 3, 2

4. (i) 4 (ii) 0 (iii) 0 (iv) –3

(v) $\frac{1}{2}$ (vi) $-\frac{7}{3}$ (vii) $-\frac{d}{c}$

प्रश्नमाला 3.3

1. (i) 1 (ii) $\frac{31}{16}$ (iii) $\pi^4-\pi^3-3\pi^2-3\pi+1$

(iv) $-\frac{137}{16}$ (v) 1

2. 6a

3. है, क्योंकि शेषफल शून्य है।

4. $a=-5$

प्रश्नमाला 3.4

1. (i) व (iii) का $(x-1)$ एक गुणनखण्ड है।
(ii) व (iv) का $(x-1)$ एक गुणनखण्ड नहीं है।

2. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) नहीं (iv) हाँ

3. (i) $k=-8$

4. $k=-(2+\sqrt{2})$

5. $a=-2, b=2$

6. (i) $(x+2)(3x+1)$; (ii) $(x-1)(4x+3)$;
(iii) $(3x-1)(4x-1)$; (iv) $(2x+3)(3x-2)$

7. (i) $-1,\ -2,\ -3$; (ii) $-2,\ -1,\ 1$; (iii) $-2,\ -1,\ 2,\ 3$;
(iv) $-1,\ 1,\ 2$; (v) $-1,\ 5$; (vi) $1,\ 10,\ 12$

प्रश्नमाला 3.5

1. (i) $x^2+10x+21$ (ii) $x^2+3x-40$ (iii) $6x^2+11x-35$

(iv) $15+x-6x^2$ (v) $x^4-\frac{9}{25}$ (vi) $x^2-3x-10$

2. (i) 11336 (ii) 9118 (iii) 9991

3. (i) $(x+3y)(x+3y)$ (ii) $(x-2)(x-2)$ (iii) $\left(\frac{x}{10}+y\right)\left(\frac{x}{10}-y\right)$

4. (i) $4a^2 \times 9b^2 + c^2 - 12ab + 6bc - 4ac$

(ii) $4 + x^2 + 4y^2 + 4x - 4xy - 8y$

(iii) $a^2 + 4b^2 + 16c^2 + 4ab + 16bc + 8ac$

(iv) $m^2 + 4n^2 + 25p^2 + 4mn - 20np - 10pm$

(v) $9a^2 + 49b^2 + c^2 - 42ab + 14bc - 6ac$

(vi) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{2x}{z} + \frac{2y}{x} + \frac{2z}{y}$

5. (i) $(3x-2y+4z)^2$ (ii) $\left(x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}z\right)^2$

6. (i) $27a^3 - 8b^3 - 54a^2b + 36ab^2$ (ii) $1 + 8x^3 + 6x + 12x^2$

(iii) $\frac{8}{125}x^3 + 27 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{54}{5}x$ (iv) $x^3 - \frac{8}{27}y^3 - 2x^2y + \frac{4}{3}xy^2$

7. (i) 941192 ; (ii) 1092727; (iii) 997002999

8. (i) $(x+2y)^3$; (ii) $(3a-2b)^3$; (iii) $(3-5x)^3$; (iv) $(5x-4y)^3$

9. (i) $(4a+3b)(16a^2-12ab+9b^2)$; (ii) $(5x-2y)(25x^2+10xy+4y^2)$

12. (i) –90000; (ii) 16380

अध्याय

4

8QEPHS

दो चरों वाले रैखिक समीकरण
(Linear Equations in Two Variables)

4.01 परिचय

पिछली कक्षाओं में आप एक अज्ञात राशि (चर) वाली समीकरणों का अध्ययन कर चुके हैं। इन समीकरणों में चर की घात एक होती है, वे रैखिक समीकरण कहलाते हैं।

(i) $x+3=8$ (ii) $2y+10=28$

(iii) $4x-7=2x+3$ (iv) $5m=40$

कुछ उदाहरण हैं।

किसी चर का वह मान जिसे समीकरण में प्रयुक्त चर के स्थान पर रखने से समीकरण सन्तुष्ट होता है, अर्थात् समीकरण के वाम पक्ष एवं दक्षिण पक्ष का मान समान हो जाता है, उसी समीकरण का हल कहलाता है। समीकरण के सम्बन्ध में यह भी जान चुके हैं कि

(i) समीकरण के दोनों पक्ष में किसी समान राशि के जोड़ने अथवा घटाने पर समीकरण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

(ii) समीकरण के दोनों पक्ष में समान संख्या का गुणा करने अथवा समान शून्येत्तर संख्या का भाग देने पर समीकरण अप्रभावित रहता हैं।

एक चर वाले रैखिक समीकरण को व्यापक रूप से $ax+b=0$ के द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जहाँ a व b वास्तविक संख्याएँ हैं। $a \neq 0$ तथा x चर है। $ax+b=0$ का हल $x=\dfrac{-b}{a}$ होता है। एक चर वाले रैखिक समीकरण का एक अद्वितीय (एक और केवल एक) हल होता है,

इसे समीकरण का मूल कहते हैं।

दो चर वाले रैखिक समीकरण:

ऐसे समीकरण जिनमें दो अज्ञात राशि (चर) हों तथा चर की घातांक एक हो, दो चर वाले रैखिक समीकरण कहलाते हैं।

आइए दो चर वाले रैखिक समीकरण के अध्ययन से पूर्व, निर्देशांक पद्धति को समझ लेते हैं।

4.02 आयतीय निर्देशांक पद्धतिः

लेखाचित्र की विधि से युगपत् रेखीय समीकरणों का हल ज्ञात करने से पूर्व हम आयतीय निर्देशांक पद्धति (Rectangular Co-ordinate system) की अवधारणा को स्पष्ट करेंगे।

(क) आयतीय निर्देशांक पद्धति

(Rectangular Co-ordinate system) :

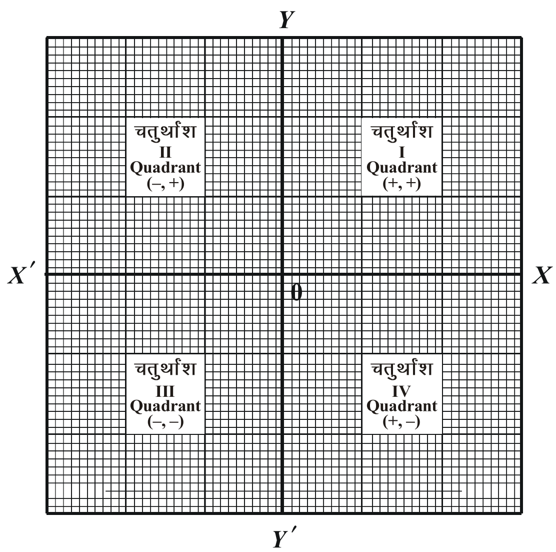
हमने उसका अध्ययन कर लिया है कि वास्तविक संख्याओं को संख्या रेखा (Number line) के बिन्दुओं से सम्बद्ध किया जा सकता है। कभी कभी कोई बिन्दु संख्या रेखा पर न होकर समतल में विद्यमान होता है। इस कारण हम पूर्व के संख्या रेखा से सम्बद्धता के सिद्धान्त का विस्तार करते हुए संख्याओं का समतल के बिन्दुओं से सम्बद्धता के सिद्धान्त का प्रतिपादन करते हैं। इस प्रकार समतल में निर्देशांक पद्धति की अवधारणा स्थापित होती है।

इस हेतु हम दो संख्या रेखाएँ लेते हैं जिसमें एक क्षैतिज (Horizontal) तथा दूसरी उर्ध्वाधर (Vertical) होती है। क्षैतिज रेखा x-अक्ष एवं उर्ध्वाधर रेखा y-अक्ष कहलाती है तथा उनको क्रमशः XOX' व YOY' से निरूपित करते हैं।

इन अक्षों के प्रतिच्छेद बिन्दु O को मूल बिन्दु (origin) कहते हैं। x-अक्ष पर धनात्मक संख्याओं को मूल बिन्दु के दाहिनी और (OX की ओर) तथा ऋणात्मक संख्याओं को मूल बिन्दु के बाँई ओर (OX' की ओर) दर्शाते हैं। इसी प्रकार y-अक्ष पर धनात्मक संख्याओं को मूल बिन्दु के ऊपर (OY की ओर) तथा ऋणात्मक संख्याओं को मूल बिन्दु के नीचे की ओर (OY' की ओर) दर्शाते हैं।

(ख) चतुर्थांश (Quadrants) :

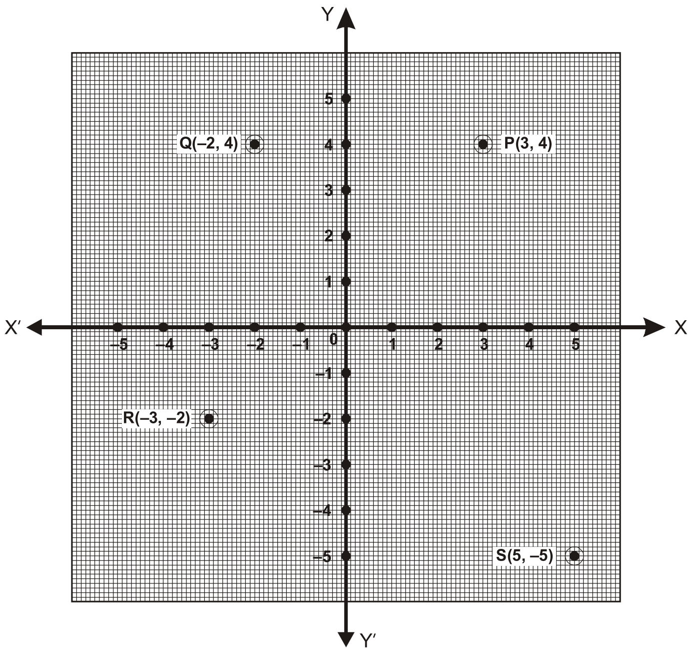
दो अक्ष XX' तथा YY' समतल को चार भागों में विभाजित करते हैं जिन्हें चतुर्थांश या पाद (Quadrants) कहते हैं। इनका क्षेत्र विस्तार असीमित होता है। $XOY, YOX', X'OY'$ तथा $Y'OX$ क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय एवं चतुर्थ पाद या चतुर्थांश कहलाते हैं।



चित्र 4.01

(ग) बिन्दु का आलेख (Plotting of Points) :

माना कि एक बिन्दु P प्रथम पाद में है। यदि इस बिन्दु तक पहुँचने के लिए OX की ओर 3 इकाई तथा OY के समान्तर 4 इकाई चलना पड़ता है तब इस बिन्दु को $P(3,4)$ से निरूपित करते हैं। 3, बिन्दु P का x-निर्देशांक तथा 4, बिन्दु P का y-निर्देशांक कहलाता है। **x-निर्देशांक को भुज (abscissa) तथा y-निर्देशांक को कोटि (ordinate) भी कहते हैं।** इस प्रकार समतल के प्रत्येक बिन्दु (x, y) के संगत एक भुज x तथा एक कोटि y होती है। किसी बिन्दु का भुज तथा कोटि मिलकर उस बिन्दु के निर्देशांक कहलाते हैं। इन्हें क्रमित युग्म $P(x, y)$ से प्रकट करते हैं।



चित्र 4.02

हम बिन्दु $P(3,4)$ पर विचार करें तो ध्यान में आता है कि यह बिन्दु x-अक्ष के ऊपर तथा y-अक्ष के दाहिनी ओर है अतः इसके भुज तथा कोटि दोनों धनात्मक है इसलिये यह बिन्दु P प्रथम पाद XOY में स्थित होगा।

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि बिन्दुओं Q, R तथा S के संगत क्रमित युग्म के रूप में निर्देशांक क्रमशः $(-2,4), (-3,-2)$ तथा $(5,-5)$ है जो कि चित्र 5.02 में दर्शाये गये हैं।

पुनः यदि हमें बिन्दु $P(3,4)$ का आलेखन करना है तो हम O से दाहिनी ओर (OX की ओर) 3 इकाई चलते हैं फिर यहीं से ऊपर की ओर (OY के समान्तर) 4 इकाई चलते हैं। यहीं $P(3,4)$ की समतल में वास्तविक स्थिति है।

इसी प्रकार बिन्दु $(-2,4)$ का आलेखन करने के लिए O से की OX' ओर 2 इकाई चल कर

वहीं से ऊपर की ओर OY के समान्तर 4 इकाई चलकर बिन्दु $(-2,4)$ का आलेखन कर देते हैं।

इसी प्रकार बिन्दुओं $(-3,-2)$ तथा $(5,-5)$ का भी आलेखन किया जा सकता है।

टिप्पणी

1. x-अक्ष पर प्रत्येक बिन्दु की कोटि शून्य होती है।
2. y-अक्ष पर प्रत्येक बिन्दु का भुज शून्य होता है।
3. मूल बिन्दु O के निर्देशांक $(0,0)$ होते हैं।

4.03 दो चरों की रैखिक समीकरण आलेखन

(Graph of Linear equation in two variables)

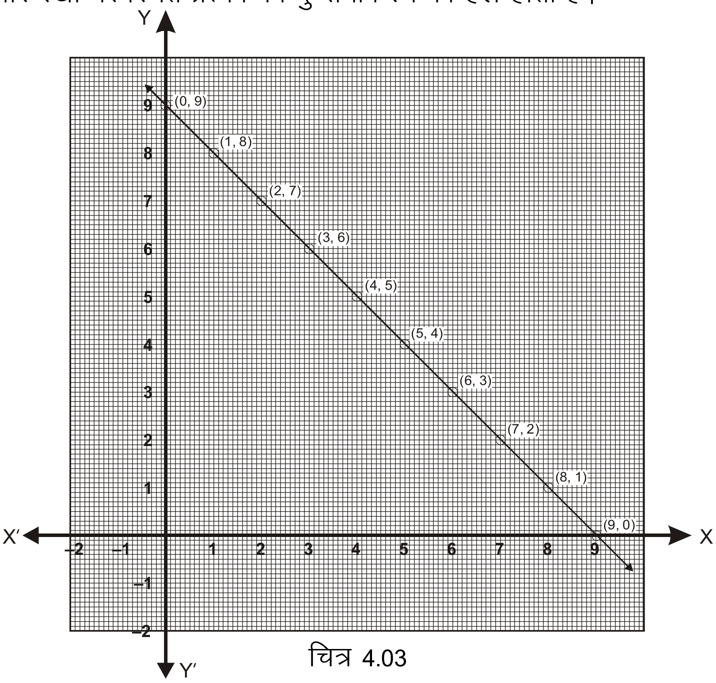
$x+y=9$ एक उदाहरण है।

समीकरण का हल x तथा y के वे मान हैं जिन्हें चरों के स्थान पर रखने पर समीकरण सन्तुष्ट होता है। देखते हैं कि समीकरण में x तथा y के अनेको मानों का युग्म समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। इन मानों को सारणी में रखें

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	9	8	7	6	5	4	3	2

समीकरण के ये कुछ हल हैं। परन्तु ऐसे हल और भी प्राप्त हो सकते हैं। x तथा y के अपरिमित मानों का युग्म समीकरण को सन्तुष्ट करता है।

कार्तीय तल में चर x के मान को x- अक्ष पर तथा y के मान को y- अक्ष पर ले, इन हलों को बिन्दु के निर्देशांक (x, y) रूप में आलेखित कर सकते हैं। इन बिन्दुओं का आलेखन कर उनको मिलाने पर समीकरण का आलेख प्राप्त होता है। आलेख एक सरल रेखा है। समीकरण के हल उस रेखा पर आलेखित है तथा आलेख के अनुसार रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु समीकरण का हल होता है।



चित्र 4.03

किसी रेखा का निर्माण अपरिमित बिन्दुओं की सतत् शृंखला है। अतः कह सकते हैं कि समीकरण के अपरिमित रूप से अनेक हल होते हैं।

टिप्पणीः

1. दो चरों वाले रैखिक समीकरण का आलेख (graph) सदैव एक सरल रेखा होती है।
2. यदि कोई बिन्दु रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित है तो उस बिन्दु के निर्देशांक समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे।
3. यदि कोई बिन्दु रैखिक समीकरण के आलेख पर स्थित नहीं है, तो उसके निर्देशांक समीकरण को सन्तुष्ट नहीं करेंगे।

दो चरों वाले रैखिक समीकरण के आलेख हेतु उसके दो बिन्दुओं का आलेखन ही पर्याप्त होता है। परन्तु आलेखन शुद्धता एवं सत्यता के लिए कम–से–कम तीन बिन्दुओं का आलेखन करना चाहिए।

उदाहरण 1 : समीकरण $3x + y = 2$ को आलेखित कीजिए।

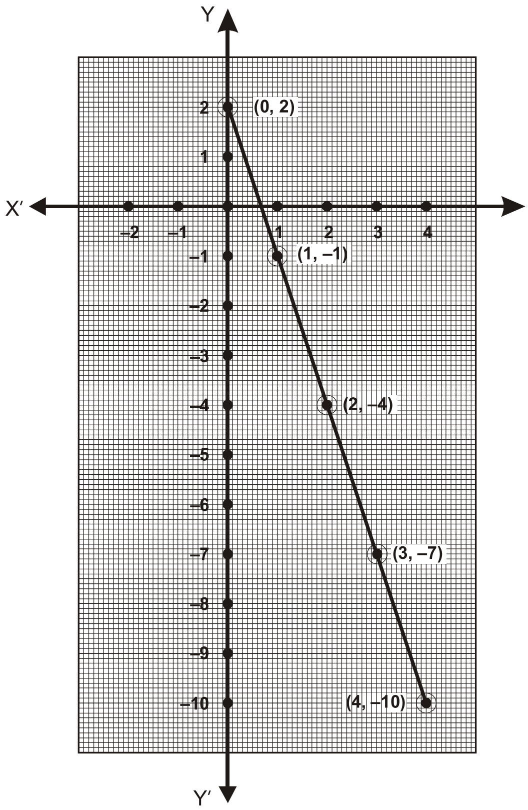
हल : दिया गया समीकरण है।

$$3x + y = 2$$

या $$y = 2 - 3x$$

समीकरण को सन्तुष्ट करने वाले x तथा y के मानों को एक सारणी में लिखते हैं।

x	0	1	2	3	4
y	2	−1	−4	−7	−10



चित्र 4.04

समीकरण के आलेखन से यह निश्चित है कि आलेखित सरल रेखा का प्रत्येक बिन्दु समीकरण का हल होता है। यदि दो चर वाले एक से अधिक समीकरण एक ही वर्गांकित कागज पर आलेखित किए जाए तो निम्न स्थितियाँ प्राप्त हो सकती हैं

(i) दो समीकरणों के आलेखों द्वारा प्राप्त सरल रेखाएँ एक दूसरे को किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें।

(ii) दो समीकरणों के आलेख द्वारा प्राप्त सरल रेखाएँ समान्तर हों, तथा परस्पर कभी प्रतिच्छेद न करें।

(iii) दोनों सरल रेखाएँ संपाती हों।

प्रथम स्थिति में दोनों सरल रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु दोनों रेखाओं पर स्थित होने के कारण वेनो समीकरणों के हल को दर्शाता है। अतः उस बिन्दु के निर्देशांक दोनों समीकरणों के हल को दर्शाता है।अतः उस बिन्दु के निर्देशांक दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करेंगे।

दो चरों वाले रैखिक समीकरण का निश्चित हल प्राप्त करने हेतु दो समीकरण अपेक्षित हैं। दो चरों वाले ऐसे दो समीकरण एक निकाय के रूप में युगपत समीकरण कहलाते हैं।

युगपत समीकरणों का आलेख द्वारा हलः

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 2 : निम्न समीकरणों का आलेख विधि से हल कीजिए।

$x+y=3 \qquad 3x-2y=4$

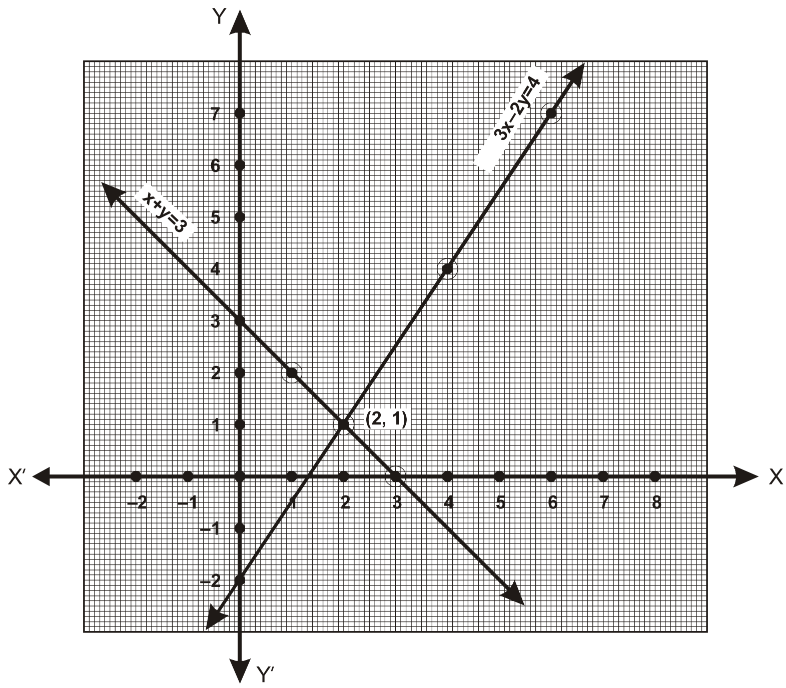
हल : दिए गए समीकरणों के सम्भावित हलों को ज्ञात कर पृथक–पृथक सारणी का निर्माण करते हैं।

$x+y=3 \qquad \ldots(1)$

या $x=3-y$

x	1	2	3
y	2	1	0

$3x-2y=4$ या $x=\dfrac{4+2y}{3} \qquad \ldots(2)$



चित्र 4.05

x	2	4	6
y	1	4	7

दोनों समीकरणों को आलेखित करने पर प्राप्त सरल रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तथा प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक $(2,\ 1)$ समीकरण का हल है। अतः समीकरणों का हल $x=2,\ y=1$

उदाहरण 3: निम्न समीकरणों का आलेख विधि से हल ज्ञात कीजिए।

$$\mathbf{2x+3y=13\ ;\quad 5x-2y=4}$$

हल : दिया गया समीकरण निकाय है

$$2x+3y=13 \qquad \ldots(1)$$

$$5x-2y=4 \qquad \ldots(2)$$

चूँकि दो समीकरण x तथा y की प्रथम घात में हैं। अतः इनके आलेख(graph) सरल रेखाएँ होगी।

अब समीकरण $\quad 2x+3y=13$ या $y=\dfrac{13-2x}{3}$

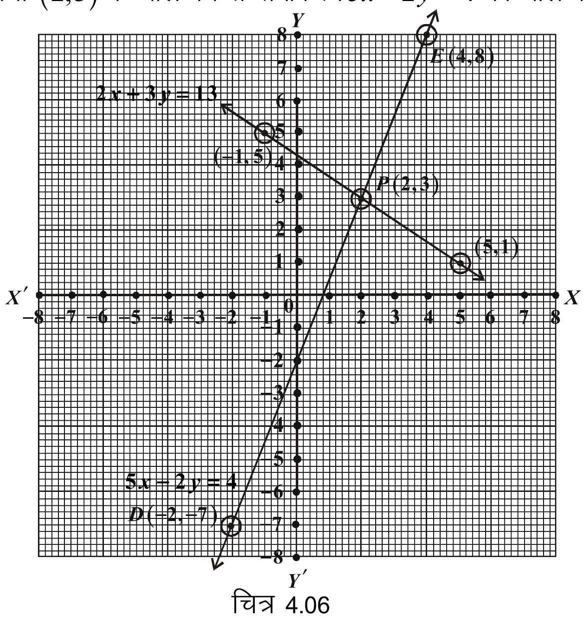
(x,y) के विभिन्न मानों से निम्न सारणी प्राप्त होती है।

x	-1	2	5
y	5	3	1

इसी प्रकार समीकरण $5x-2y=4$ या $y=\dfrac{5x-4}{2}$ से (x,y) के मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है।

x	-2	4	2
y	-7	8	3

अब बिन्दुओं $(-1,5),(2,3)$ तथा $(5,1)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x+3y=13$ का आलेख तथा $(-2,-7),(4,8)$ तथा $(2,3)$ के आलेखन से समीकरण $5x-2y=4$ का आलेख प्राप्त होता है।



चित्र 4.06

ये आलेख (सरल रेखाएं) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होते हैं, जिसके कि निर्देशांक $(2,3)$ है।

अतः $x = 2, y = 3$ दिये गये समीकरण निकाय के अद्वितीय हल है।

उदाहरण 4: आलेखीय विधि से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$\mathbf{2x - 6y + 10 = 0\,;\,3x - 9y + 15 = 0}$$

हल : दिया गया समीकरण निकाय है

$$2x - 6y + 10 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$3x - 9y + 15 = 0 \qquad \ldots(2)$$

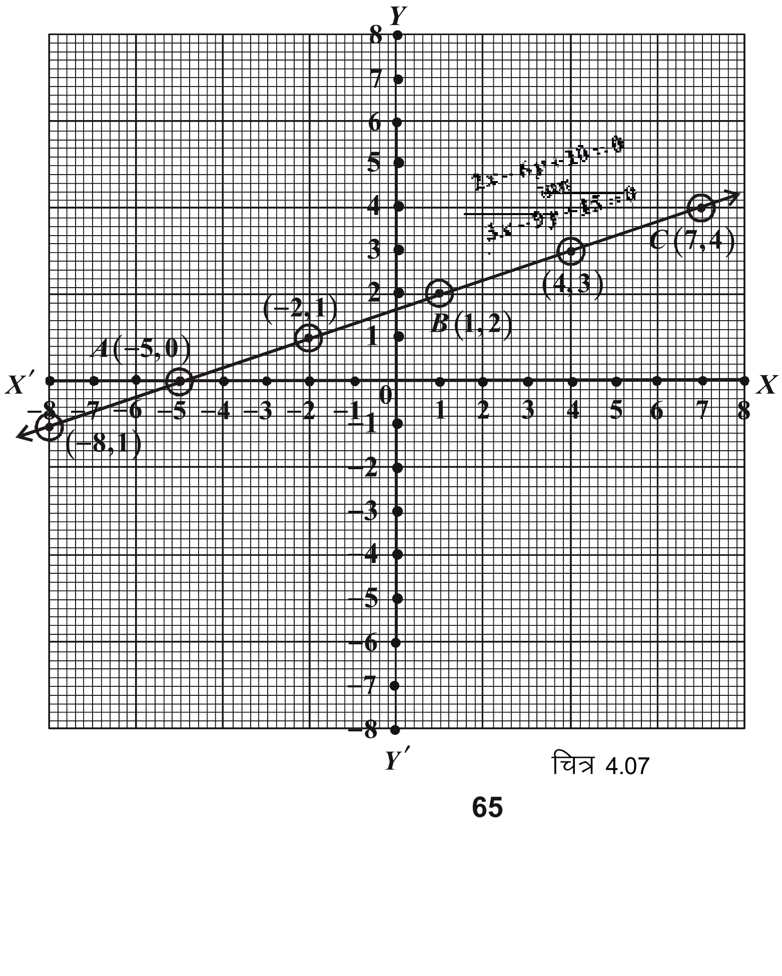
$2x - 6y + 10 = 0$ के लिए सारणी

x	1	–5	7
y	2	0	4

$3x - 9y + 15 = 0$ के लिए सारणी

x	4	–2	–8
y	3	1	–1

अब बिन्दुओं $(1,2),(-5,0)$ तथा $(7,4)$ को आलेखित कर मुक्त हस्त (Free hand) से मिलाने पर $2x - 6y + 10 = 0$ का आलेख सरल रेखा AB प्राप्त होती है। पुनः बिन्दुओं $(4,3),(-2,-1)$ तथा $(-8,-1)$ को आलेखित करते है। हम देखते हैं कि ये तीनों बिन्दु रेखाAB पर विद्यमान है। इसलिए दोनों रेखाएं सम्पाती होगी अतः दिया गया निकाय संगत है तथा इसके अनन्त हल होंगे। समीकरण $2x - 6y + 10 = 0$ का प्रत्येक हल पूरे निकाय का हल होगा।



चित्र 4.07

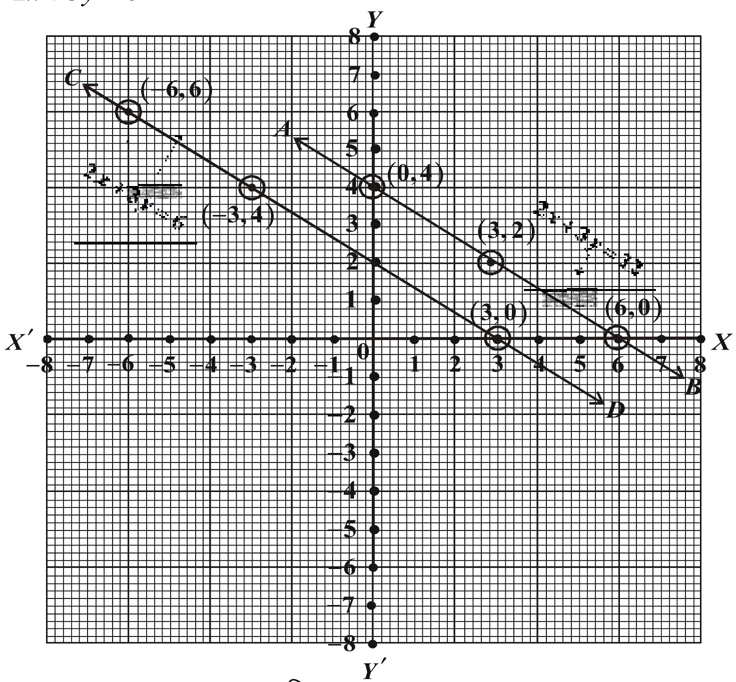
उदाहरण 5: निम्न समीकरण निकाय का आलेख विधि से हल ज्ञात कीजिए। निकाय की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

$$\mathbf{2x+3y=12\ ;\ 2x+3y=6}$$

हल : हमें निम्न दो रैखिक समीकरण दिये हुए है।

$$2x+3y=12 \qquad \ldots (1)$$

$$2x+3y=6 \qquad \ldots (2)$$



चित्र 4.08

अब बिन्दुओं $(6,0),(3,2),(0,4)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x+3y-12=0$ का आलेख, एक सरल रेखा AB प्राप्त होती है।

पुनः बिन्दुओं $(3,0),(-3,4)$ तथा $(-6,6)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x+3y=6$ का आलेख, सरल रेखा CD प्राप्त होती है।

अतः दिये गये समीकरणों के आलेख दो रेखाएं AB तथा CD है जो कि परस्पर समान्तर हैं। इसलिए दिया गया समीकरण निकाय असंगत (Inconsistent) है तथा इसका कोई हल विद्यमान नहीं है।

प्रश्नमाला 4.1

निम्न समीकरणों को आलेखीय विधि से हल कीजिए:

1. $x+3y=6$
   $2x-3y=12$
2. $2x+y=6$
   $2x-y+2=0$
3. $x-2y=6$
   $3x-6y=0$
4. $x+y=4$
   $2x-3y=3$

5. $2x - 3y + 13 = 0$

$3x - 2y + 12 = 0$

6. $3x - 4y = 1 ; -2x + \frac{8}{3}y = 5$

7. $2x + \frac{y}{2} - 5 = 0 ; \frac{x}{2} + y = -4$

8. $0 \cdot 3x + 0 \cdot 4y = 3 \cdot 2 ; 0 \cdot 6x + 0 \cdot 8y = 2 \cdot 4$

9. $2x + 3y = 8 ; 4x - \frac{3}{2}y = 1$

10. $3x - y = 2 ; 6x - 2y = 4$

11. $3x + 2y = 0 ; 2x + y = -1$

94H1CI

4.04 युगपत समीकरणों का बीजीय हल

(Algebraic methods of solving simultaneous linear equation)

युगपत समीकरण दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के जोड़े का एक निकाय है। दोनों चरों के वे मान जो दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं, युगपत समीकरण का हल कहलाते हैं।

दो चरों वाले समीकरणों के युगपत समीकरण निकाय हल करने की निम्न बीजीय विधियाँ हैं।

(i) विलोपन विधि (प्रतिस्थापन द्वारा)
[Method of elimination (by substitution)]

(ii) विलोपन विधि (गुणांको को समान कर)
[Method of elimination (by equating the co-efficient)]

(iii) व्रज गुणन विधि (व्यापक विधि)
[Method of cross multiplication (General method)]

(i) विलोपन विधि (प्रतिस्थापन द्वारा)

इस विधि में युगपत समीकरण निकाय के एक समीकरण से एक चर का मान दूसरे चर के रूप में व्यक्त कर लेते हैं। अब दूसरे चर के रूप में लिए गए इस चर के मान को समीकरण निकाय के दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित कर देते हैं। परिणाम स्वरूप दूसरा समीकरण एक चर वाले समीकरण के रूप में परिवर्तित हो जाता है। एक चर वाले समीकरण को हल करके चर का मान ज्ञात कर लेते हैं। अब चर के इस ज्ञात मान को दिए गए समीकरणों में से किसी एक में प्रतिस्थापित कर अन्य चर का मान ज्ञात कर लेते हैं। विधि नीचे दिए गए उदाहरण से स्पष्ट हो जाती है।

उदाहरण 6: प्रतिस्थापन विधि द्वारा निम्न समीकरणों के हल ज्ञात कीजिए।

$$x + 3y = 11$$
$$4x - y = 5$$

हल : दिए गए समीकरण हैं

$$x+3y=11 \qquad \ldots(1)$$

$$4x-y=5 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) से

$$x=11-3y \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (3) से x का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर

$$4(11-3y)-y=5$$

या $\quad 44-12y-y=5$

या $\quad 44-13y=5$

या $\quad 13y=39$

$\therefore \quad y=3$

y के इस मान को समीकरण (3) में रखने पर

$$x=11-3(3)$$

या $\quad x=11-9$

या $\quad x=2$

अतः हल है $x=2,\ y=3$

(ii) विलोपन विधि (गुणांको को समान बना कर)

इस विधि में समीकरण निकाय के दोनों समीकरणों को ऐसी उपयुक्त संख्याओं से गुणा करते हैं, जिससे प्राप्त हुए दोनों समीकरणों के दो चरों में से एक के गुणांक समान हो जाएं। अब दोनों समीकरणों को स्थिति के अनुसार योग अथवा व्यवकलन करने पर हमें एक समीकरण प्राप्त होता है, जिसमें एक ही चर होता है (क्योंकि अन्य चर निरस्त हो जाता है) प्राप्त एक चर वाले समीकरण को हल कर चर का मान ज्ञात कर लेते हैं तथा चर के ज्ञात मान को दिए गए किसी समीकरण में प्रतिस्थापित करके दूसरे चर का मान भी ज्ञात कर लेते हैं।

उदाहरण 7 : गुणांको को समान कर विलोपन विधि से निम्न समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए

$$4x+5y=31$$

$$7x-2y=22$$

हल : दिए गए समीकरण है

$$4x+5y=31 \qquad \ldots(1)$$

$$7x-2y=22 \qquad \ldots(2)$$

y को विलोपित करने के लिए हम देखते हैं कि समीकरण(1) व (2) में y के गुणांक क्रमशः 5 व 2 हैं। 5 व 2 का ल.स. 10 होता है। अतः दोनों समीकरणों में y के गुणांको को समान अर्थात् 10 बनाने के लिए समीकरण (1) को 2 से तथा समीकरण (2) को 5 गुणा करने पर

$$8x+10y=62 \qquad \ldots(3)$$

$$35x-10y=110 \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (3) व (4) को जोड़ने पर

$$43x=172 \qquad \text{या} \qquad x=\frac{172}{43}$$

$\therefore \quad x=4$

x के इस मान को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$4(4)+5y=31 \qquad \text{या} \qquad 16+5y=31$$

या $\quad 5y=31-16 \qquad$ या $\qquad y=\frac{15}{5}$

$\therefore \quad y=3$

अतः दिए गए समीकरणों का हल है

$$x=4,\ y=3$$

इसी विधि से हम चरों के व्युत्क्रमों से बने समीकरणों का भी हल प्राप्त कर सकते हैं।
विधि नीचे दिए गए उदाहरण से स्पष्ट हो जाती है।

उदाहरण 8 : समीकरण $\frac{20}{x}+\frac{2}{y}=6,\ \frac{10}{x}-\frac{1}{y}=2$ के हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण हैं

$$\frac{20}{x}+\frac{2}{y}=6 \qquad \ldots(1)$$

$$\frac{10}{x}-\frac{1}{y}=2 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (2) को 2 से गुणा करने पर

$$\frac{20}{x}-\frac{2}{y}=4 \qquad \ldots(3)$$

समीकरण (1) व (3) को जोड़ने पर

$$\frac{40}{x}=10 \qquad \text{या} \qquad x=\frac{40}{10}$$

या $\quad x=4$

x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{20}{4}+\frac{2}{y}=6 \qquad \text{या} \qquad 5+\frac{2}{y}=6$$

या $\frac{2}{y} = 6 - 5$ या $\frac{2}{y} = 1$

या $y = 2$

अतः समीकरण के हल हैं, $x = 4,\ y = 2$

उदाहरण 9 : समीकरण $5x + 6y = 3xy,\quad 10x + 9y = 5xy$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गए समीकरण है

$$5x + 6y = 3xy \qquad \ldots(1)$$

$$10x + 9y = 5xy \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) में xy का भाग देने पर

$$\frac{5}{y} + \frac{6}{x} = 3 \qquad \ldots(3)$$

$$\frac{10}{y} + \frac{9}{x} = 5 \qquad \ldots(4)$$

अब $\frac{1}{x} = m$ तथा $\frac{1}{y} = n$ मानने पर समीकरण (3) व (4) इस रूप में लिखे जा सकते हैं।

$$5n + 6m = 3 \qquad \ldots(5)$$

$$10n + 9m = 5 \qquad \ldots(6)$$

समीकरण (5) को 2 से गुणा करने पर

$$10n + 12m = 6 \qquad \ldots(7)$$

समीकरण (7) में से समीकरण (6) घटाने पर

$3m = 1$ या $m = \frac{1}{3}$

m का मान समीकरण (6) में रखने पर

$$10n + 9\left(\frac{1}{3}\right) = 5$$

या $10n + 3 = 5$ या $10n = 5 - 3$

या $10n = 2$ या $n = \frac{2}{10}$

या $n = \frac{1}{5}$

अब $m = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3$ तथा $n = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \Rightarrow y = 5$

अतः समीकरण के हल है $x = 3,\ y = 5$

प्रश्नमाला 4.2

निम्न समीकरणों को विलोपन विधि (प्रतिस्थापन) द्वारा हल कीजिए (प्रश्न 1 से 6)

1. $2x + 3y = 9$
   $3x + 4y = 5$

2. $x + 2y = -1$
   $2x - 3y = 12$

3. $3x + 2y = 11$
   $2x + 3y = 4$

4. $8x + 5y = 9$
   $3x + 2y = 4$

5. $4x - 5y = 39$
   $2x - 7y = 51$

6. $5x - 2y = 19$
   $3x + y = 18$

गुणांकों को समान बना कर विलोपन विधि द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए (प्रश्न 7 से 12)

7. $2x + y = 13$
   $5x - 3y = 16$

8. $0.4x + 0.3y = 1.7$
   $0.7x - 0.2y = 0.8$

9. $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$
   $\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$

10. $11x + 15y = -23$
    $7x - 2y = 20$

11. $3x - 7y + 10 = 0$
    $y - 2x = 3$

12. $x + 2y = \frac{3}{2}$
    $2x + y = \frac{3}{2}$

समीकरण हल कीजिए (प्रश्न 13 से 15)

13. $8v - 3u = 5uv$
    $6v - 5u = -2uv$

14. $\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$
    $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8$

15. $\frac{5}{(x+y)} - \frac{2}{(x-y)} = -1$
    $\frac{15}{(x+y)} + \frac{7}{(x-y)} = 10$

955HE6

वज्र–गुणन विधि

युगपत समीकरणों को हल करने के लिए वज्र गुणन विधि एक व्यापक विधि है। यहाँ हम नीचे दिए गए समीकरणों को हल करने की विधि स्पष्ट कर रहे हैं।

माना दिए गए समीकरण हैः

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \ldots(1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \ldots(2)$$

समीकरण (1) को b_2 से तथा समीकरण (2) को b_1 से गुणा करने पर

$$a_1b_2x + b_1b_2y + b_2c_1 = 0 \quad \ldots(3)$$

तथा $a_2b_1x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0$ ... (4)

समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर

$$\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)x + b_2c_1 - b_1c_2 = 0$$

या $\left(a_1b_2 - a_2b_1\right)x = b_1c_2 - b_2c_1$ ... (5)

इसी प्रकार समीकरण (1) को a_2 से तथा समीकरण (2) को a_1 से गुणा करने पर

$$a_1b_2x + a_2b_1y + c_1a_2 = 0 \quad \ldots(6)$$

$$a_1a_2x + a_1b_2y + c_2a_1 = 0 \quad \ldots(7)$$

समीकरण (6) में से समीकरण (7) को घटाने पर

$$\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)y + c_1a_2 - c_2a_1 = 0$$

या $\left(a_2b_1 - a_1b_2\right)y = -c_1a_2 + c_2a_1$

या $y = \dfrac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ... (8)

समीकरण (5) से

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \ldots(9)$$

उपर्युक्त समीकरण हल को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

इस परिणाम को निम्न रचना के माध्यम से दर्शा सकते है जिससे समीकरणों के हल को सुगमता से स्मरण कर सकें।

$$\frac{x}{\begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{cc} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{array}} = \frac{x}{\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}}$$

रचना में तीर के निशान का अर्थ दो संख्याओं के गुणा को दर्शाना है। पहले नीचे की ओर गुणा करना है फिर इसमें से ऊपर की ओर गुणा कर गुणन फल घटाना है।

वज्र गुणा के प्रकार के कारण यह वज्र गुणन विधि कहलाती है। इस विधि का प्रयोग करने से पूर्व समीकरणों के सभी पदों को पहले वाम पक्ष में लेकर दक्षिण पक्ष को शून्य बना देते हैं।

प्रथम समीकरण एवं द्वितीय समीकरण में प्रथम चर के गुणांक क्रमशः a_1, a_2 द्वितीय चर के गुणांक b_1, b_2 तथा स्वतंत्र अंक c_1, c_2 से प्रदर्शित करते हैं।

4.05 साधनीयता के लिए प्रतिबन्ध (Condition for solvability)

यदि समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ हो तो संगत चरों के गुणांकों का अनुपात देखने पर निम्न स्थिति के अनुसार निर्णय किया जाता है।

(i) प्रथम स्थितिः

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

निकाय संगत है तथा हल अद्वितीय होते हैं।

(ii) द्वितीय स्थितिः

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

निकाय असंगत है तथा इसके कोई हल नहीं होते।

(iii) तृतीय स्थिति

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

समीकरण निकाय संगत, इसके अनन्त हल होते हैं।

उदाहरण 10 : दिए गए समीकरणों का हल वज्र गुणन विधि से कीजिए।

$$2x + 3y - 17 = 0$$

$$3x - 2y - 6 = 0$$

हल : वज्र–गुणन विधि से हल

$$\frac{x}{\begin{array}{cc} 3 & -17 \\ -2 & -6 \end{array}} = \frac{y}{\begin{array}{cc} -17 & 2 \\ -6 & 3 \end{array}} = \frac{1}{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{(3)(-6)-(-2)(-17)}=\frac{y}{(-17)(3)-(-6)(2)}=\frac{1}{(2)(-2)-(3)(3)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{-18-34}=\frac{y}{-51+12}=\frac{1}{-4-9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{-52}=\frac{y}{-39}=\frac{1}{-13}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-52}{-13} \text{ तथा } y=\frac{-39}{-13}$$

$$\Rightarrow \quad x=4 \text{ तथा } y=3$$

अतः समीकरण के हल हैं $x=4,\ y=3$

उदाहरण 11 : दिए गए समीकरण निकाय की संगतता की जाँच कीजिए। यदि निकाय संगत है तो हल ज्ञात कीजिए।

$$2x+3y=7$$

$$6x+9y=15$$

हल : दिए गए समीकरण हैं

$$2x+3y=7$$

$$6x+9y=15$$

समीकरण के सभी पदों को वाम पक्ष में लेने पर

$$2x+3y-7=0$$

तथा $6x+9y-15=0$

यहाँ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$$\frac{b_1}{b_2}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{c_1}{c_2}=\frac{-7}{-15}=\frac{7}{15}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$

अतः दिया गया समीकरण निकाय असंगत है तथा इसके कोई हल नहीं है।

प्रश्नमाला 4.3

निम्नलिखित समीकरणों के बारे में जाँच कीजिए कि समीकरण निकाय के अद्वितीय हल है, कोई हल नहीं है या अपरिमित हल हैं। यदि किसी निकाय के अद्वितीय हल हैं तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

1. $2x+y=35$
   $3x+4y=65$
2. $2x-y=6$
   $x-y=2$
3. $3x+2y+25=0$
   $2x+y+10=0$
4. $x+2y+1=0$
   $2x-3y-12=0$
5. K का मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है
   (i) $2x+ky=1$, $3x-5y=7$
   (ii) $kx+2y=5$, $3x+y=1$
6. समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए: $mx-ny=m^2+n^2$, $x+y=2m$
7. λ के वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निकाय
   $3x+\lambda y+1=0$, $2x+y-9=0$
   के (i) अद्वितीय हल (ii) कोई हल नहीं

4.06 दो चरों वाले रैखिक समीकरणों के अनुप्रयोग

(Application of linear equations in two variables)

दो चरों वाले रैखिक समीकरणों (युगपत समीकरण निकाय) की सहायता से हम कुछ व्यवहारिक समस्याओं को हल कर सकते हैं। इसके लिए निम्न प्रकार से कार्य करते है:

(i) समस्या में उपस्थित अज्ञात राशियों के लिए चरों (अक्षरों) को प्रयुक्त करते हैं।

(ii) समस्या में शब्दों के रूप में दिए गए प्रतिबन्धों को चरों का उपयोग कर समीकरणों में परिवर्तित करते हैं।

(iii) इन समीकरणों को यथोचित विधि द्वारा हल करके चरों का मान प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण 12 : एक कक्षा के 10 विद्यार्थियों ने निबन्ध प्रतियोगिता में भाग लिया। यदि प्रतियोगियों में लड़कों की संख्या लड़कियों की संख्या से 4 अधिक हो तो लड़के और लड़कियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना प्रतियोगिता में भाग लेने वाले लड़को की संख्या x तथा लड़कियों की संख्या y है।

यह दिया हुआ है कि कुल विद्यार्थियों की संख्या 10 है।

अर्थात् लड़कों की संख्या + लड़कियों की संख्या = 10

$$x+y=10$$

यह भी दिया है, कि लड़कों की संख्या लड़कियों की संख्या से 4 अधिक है।

अतः लड़कों की संख्या – लड़कियों की संख्या = 4

$$x-y=4$$

दी हुई स्थिति के अनुसार समीकरण

$$x+y=10 \qquad \ldots(1)$$

$$x-y=4 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$2x = 14$$

या $\quad x = 7$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$7 + y = 10$$

या $\quad y = 10 - 7$

या $\quad y = 3$

$x = 7,\ y = 3$ अतः लड़कों की संख्या 7 तथा लड़कियों की संख्या 3 है।

उदाहरण 13 : दो व्यक्तियों के वेतन का अनुपात 9 : 7 है तथा उनके व्यय का अनुपात 4 : 3 है यदि प्रत्येक व्यक्ति 2000 रुपए प्रतिमाह की बचत करता है, तो उनकी मासिक वेतन ज्ञात कीजिए।

हल : माना पहले व्यक्ति का वेतन x रुपए तथा दूसरे व्यक्ति का वेतन y रुपए है

प्रश्नानुसार उनके वेतन का अनुपात $x : y = 9 : 7$

$$\frac{x}{y} = \frac{9}{7}$$

या $\quad 7x = 9y$

या $\quad 7x - 9y = 0 \qquad \ldots(1)$

दोनों व्यक्ति प्रतिमाह 2000 रुपए बचाते हैं।

उनका प्रतिमाह व्यय क्रमशः $x - 2000$ तथा $y - 2000$ है।

दिया हुआ है कि उनके व्यय का अनुपात 4 : 3 है

$\therefore \quad (x - 2000) : (y - 2000) = 4 : 3$

$$\frac{(x - 2000)}{(y - 2000)} = \frac{4}{3}$$

या $\quad 3(x - 2000) = 4(y - 2000)$

या $\quad 3x - 6000 = 4y - 8000$

या $\quad 3x - 4y + 2000 = 0 \qquad \ldots(2)$

समीकरण (1) से x का मान y के रूप में लिखने पर

$$x = \frac{9y}{7}$$

x के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर

$$3\left(\frac{9y}{7}\right) - 4y + 2000 = 0$$

या $\frac{27y}{7} - 4y + 2000 = 0$

या $27y - 28y + 14000 = 0$

या $-y = -14000$

या $y = 14000$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$7x - 9(14000) = 0$$

या $7x = 126000$

या $x = 18000$

अतः उनका वेतन 18000 रुपए एवं 14000 रुपए है।

उदाहरण 14 : दो अंको की एक संख्या के अंको का योग 12 है। यदि संख्या में से 18 घटा दिए जाए तो संख्या के अंको का स्थान परस्पर बदल जाता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना संख्या का इकाई का अंक x तथा दहाई का अंक y है।

अतः संख्या $x + 10y$ है।

प्रश्नानुसार संख्या में से 18 घटाने पर संख्या के अंको का स्थान परस्पर बदल जाता है। अर्थात् x दहाई के स्थान पर तथा y इकाई के स्थान पर हो जाता है।

अतः नई प्राप्त संख्या $10x + y$ है

समस्या को समीकरण रूप में लिखने पर प्रश्नानुसार संख्या के अंको का योग 12 है

अतः $x + y = 12$ ...(1)

तथा $x + 10y - 18 = 10x + y$

या $9x - 9y = -18$

या $x - y = -2$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर

$$2x = 10$$

या $x = 5$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$5 + y = 12$$

या $y = 12 - 5$

या $y = 7$

अतः संख्या 75 है।

प्रश्नमाला 4.4

निम्नलिखित समस्याओं का हल ज्ञात कीजिए:

1. दो अंको की एक संख्या में इकाई का अंक दहाई के अंक का 3 गुना है। संख्या के 2 गुने में 10 जोड़ने पर प्राप्त नई संख्या में अंक परस्पर अपना स्थान बदल लेते है। संख्या ज्ञात कीजिए।
2. एक आयत का परिमाप 56 सेमी है। उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात 4 : 3 है। आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
3. दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है। यदि प्रत्येक संख्या में से 5 घटा दिया जाए, तो उनका अनुपात 5 : 7 हो जाता है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. पिता की आयु अपने पुत्र की आयु के 6 गुना से 5 वर्ष अधिक है। 7 वर्ष पश्चात पिता की आयु पुत्र की आयु के 3 गुना से 3 अधिक होगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
5. राम ने श्याम से कहा कि "तुम मुझे अपने पास से 100 रुपए दे दो तो, मेरे पास तुमसे 2 गुना रुपए हो जाएंगे। तब श्याम ने राम से कहा कि "तुम यदि अपने पास से मुझे 10 रुपए दे दो तो मेरे पास तुमसे 6 गुना रुपए हो जाएंगे।" ज्ञात कीजिए कि दोनों के पास कितने–कितने रुपए हैं?
6. 4 कुर्सियो और 3 मेजों का मूल्य 2100 रुपए हैं तथा 5 कुर्सियों और 2 मेजों का मूल्य 1750 रुपए है, तो एक कुर्सी तथा एक मेज का मूल्य ज्ञात कीजिए।
7. दो संख्याएं इस प्रकार की है, कि बड़ी संख्या के 3 गुने में छोटी संख्या का भाग दिया जाता है, तो भागफल 4 तथा शेषफल 3 प्राप्त होता है और जब छोटी संख्या के 7 गुने में बड़ी संख्या का भाग दिया जाता है, तो भागफल 5 तथा शेषफल 1 प्राप्त होता है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
8. दो अंको की संख्या अपने अंको के योग की 4 गुनी तथा अंको के गुणनफल की 2 गुनी है। संख्या ज्ञात कीजिए।
9. एक भिन्न के अंश तथा हर में 1 जोड़ने पर वह $\frac{4}{5}$ बन जाती है, जब कि अंश व हर दोनों में से 5 घटाते है तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। भिन्न ज्ञात कीजिए।
10. 5 वर्ष पूर्व गीता की आयु कमला की आयु की 3 गुना थी। 10 वर्ष बाद गीता की आयु कमला की आयु की 2 गुना होगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
11. एक व्यक्ति 370 किमी की यात्रा में सें कुछ दूरी रेल द्वारा तथा कुछ दूरी कार द्वारा तय करता है। यदि वह 250 किमी रेल द्वारा तथा शेष दूरी कार द्वारा तय करता है, तो उसे 4 घण्टे लगते है। परन्तु जब वह 130 किमी रेल द्वारा तथा शेष दूरी कार द्वारा तय करता है तो उसे 18 मिनट अधिक लगते है। रेल तथा कार की चाल ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. दो चरों वाला रैखिक समीकरण $ax+by+c=0$ रूप वाला होता है, जहाँ a,b,c वास्तविक संख्याएँ होती है तथा $a\neq 0, b\neq 0$·
2. दो चरों वाले एक रैखिक समीकरण के अनन्त हल होते हैं।
3. दो रैखिक समीकरणों के निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x+b_2y+c_2=0$ की प्रकृति निम्न प्रकार की होती है :

   (क) संगत तथा अद्वितीय हल, यदि $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$

   (ख) संगत तथा अनन्त हल, यदि $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

   (ग) असंगत तथा कोई हल नहीं, यदि $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$
4. यदि x तथा y किसी दो अंकों वाली संख्या के क्रमशः इकाई तथा दहाई के अंक हों तो संख्या $10y+x$ होती है

विविध प्रश्नमाला 4

सही उत्तर को चुनिए : [प्रश्न 1 से 10]

1. यदि $y=2x-3$ तथा $y=5$ हो तो x का मान होगा :

   (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 [ ]

2. यदि $2x+y=6$ हो तो इसको संतुष्ट करने वाला युग्म है :

   (A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (2, 2) (D) (1, 1) [ ]

3. यदि $\dfrac{4}{x}+5y=7$ तथा $x=-\dfrac{4}{3}$ हो तो y का मान होगा :

   (A) $\dfrac{37}{15}$ (B) 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{3}$ [ ]

4. यदि $\dfrac{3}{x}+4y=5$ तथा $y=1$ हो तो x का मान होगा :

   (A) 3 (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) -3 (D) $-\dfrac{1}{3}$ [ ]

5. यदि $x=1$ हो तो समीकरण $\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=5$ में y का मान है :

   (A) 1 (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) 3 (D) -3 [ ]

6. यदि किसी संख्या के इकाई तथा दहाई के स्थान पर अंक क्रमशः y तथा x हों तो संख्या होगी :

   (A) $10x+y$ (B) $10y+x$ (C) $x+y$ (D) xy [ ]

7. एक लड़के की आयु अभी अपनी माता की आयु की एक तिहाई है। यदि माता की वर्तमान आयु x वर्ष है तो 12 वर्ष पश्चात् लड़के की आयु होगी :

   (A) $\dfrac{x}{3}+12$ (B) $\dfrac{x+12}{3}$ (C) $x+4$ (D) $\dfrac{x}{3}-12$ [ ]

8. x-अक्ष पर बिन्दु है –

(A) $(2,3)$ (B) $(2,0)$ (C) $(0,2)$ (D) $(2,2)$ [ ]

9. मूल बिन्दु के निर्देशांक है :

(A) $(0,0)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,0)$ (D) $(1,1)$ [ ]

10. बिन्दु $(3,-4)$ किस पाद में विद्यमान है –

(A) प्रथम (B) द्वितीय (C) तृतीय (D) चतुर्थ [ ]

11. समीकरण $5y-3x-10=0$ में y को x के रूप में व्यक्त कीजिए। वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ समीकरण $5y-3x-10=0$ द्वारा निरुपित रेखा y-अक्ष को काटती है।

12. x के मान $x=-2$ से $x=2$ तक एवं इनके के मध्य लेते हुए समीकरण $y=2x+1$ के मानों से सारणी का निर्माण कीजिए तथा उक्त समीकरण का आलेख खींचिये।

13. निम्न युगपत् समकरणों का हल ज्ञात कीजिए :

$0\cdot5x+0\cdot6y=2\cdot3;\ 0\cdot2x+0\cdot7y=2\cdot3$

14. समीकरण निकाय $2x+3y=9\,;3x+4y=5$ का हल ज्ञात कीजिए।

15. समीकरण निकाय $\frac{1}{2x}-\frac{1}{y}=-1;\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}=8;x\neq0,y\neq0$ का हल ज्ञात कीजिए।

16. दो संख्याएँ इस प्रकार की हैं कि यदि छोटी संख्या में 7 जोड़ दिया जाय तो योग बड़ी संख्या से दुगुना हो जाता है तथा यदि बड़ी संख्या में 4 जोड दिया जाय तो योग छोटी संख्या से तिगुना हो जाता है। दोनों संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

17. किसी भिन्न का अंश, हर से 4 कम है। यदि अंश में से 2 घटा दिया जाए तथा हर में 1 जोड़ दिया जाए तो हर, अंश का 8 गुणा हो जाता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

18. 5 पुस्तकों तथा 7 कलमों का कुल मूल्य 79 रु. है जबकि 7 पुस्तकों तथा 5 कलमों का कुल मूल्य 77 रु. है। 1 पुस्तक तथा 2 कलमों का कुल मूल्य ज्ञात कीजिए।

19. दो अंकों की एक संख्या इस प्रकार की है कि जब इसे 9 से गुणा किया जाए तो वह उस संख्या की दुगुनी हो जाएगी जो मूल संख्या के अंकों के स्थान परस्पर बदलने से बनती है। यदि संख्या के दोनों अंकों का अंतर 7 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए।

20. एक त्रिभुज में $\angle A=x^\circ,\angle B=3x^\circ$ तथा $\angle C=y^\circ$ है। यदि $5x^\circ-3y^\circ+30=0$ हो तो सिद्ध कीजिए कि यह समकोण त्रिभुज है।

21. निम्न युगपत् समीकरणों का हल आलेख विधि से ज्ञात कीजिए।

(A) $x+y=4\,;\ \ x=y$ (B) $x+y=3\,;\ \ 2x+5y=12$

(C) $2x-3y-6=0\,;\ \ 2x+y+10=0$ (D) $2x+y-3=0\,;\ \ 2x-3y-7=0$

22. समीकरण निकाय $2x-y=1;x+2y=8$ का आलेख विधि से हल ज्ञात कीजिए तथा इनके संगत रेखाएं $y-$ अक्ष को जिन बिन्दुओं पर मिलती हैं उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला 4.1

(1) $x=6,\ y=0$ (2) $x=1,\ y=4$ (3) कोई हल नहीं (4) $x=3,\ y=1$

(5) $x=-2,\ y=3$ (6) असंगत, कोई हल नहीं (7) $(4, -6)$

(8) असंगत कोई हल नहीं (9) $(1, 2)$ (10) सम्पाती, अनन्त हल विमान (11) $(-2, 3)$

उत्तरमाला 4.2

(1) $x=-21,\ y=17$ (2) $x=3,\ y=-2$ (3) $x=5,\ y=-2$ (4) $x=-2,\ y=5$

(5) $x=1,\ y=-7$ (6) $x=5,\ y=3$ (7) $x=5,\ y=3$ (8) $x=2,\ y=3$

(9) $x=14,\ y=9$ (10) $x=2,\ y=-3$ (11) $x=-1,\ y=1$ (12) $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{2}$

(13) $u=\frac{22}{31},\ v=\frac{11}{23}$ (14) $x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{4}$ (15) $x=3,\ y=2$

उत्तरमाला 4.3

(1) $x=15,\ y=5$ (2) $x=4,\ y=2$ (3) $x=5,\ y=-20$ (4) $x=3,\ y=-2$

(5) (i) $k=-\frac{10}{3}$; (ii) $k=6$ (6) $x=(m+n),\ y=m-n$

(7) (i) अद्वितीय हल के लिए $\lambda \neq \frac{3}{2}$ (ii) कोई हल नहीं के लिए $\lambda = \frac{3}{2}$

उत्तरमाला 4.4

(1) 26 (2) लम्बाई 16 सेमी, चौड़ाई 12 सेमी (3) 30 व 40

(4) पिता की आयु 29 वर्ष पुत्र की आयु 4 वर्ष (5) राम के पास 40 रुपए, श्याम के पास 170 रुपए

(6) कुर्सी 150 रुपए तथा मेज 500 रुपए (7) बड़ी संख्या 25 एवं छोटी संख्या 18

(8) 36 (9) 7/9 (10) गीता की आयु 50 वर्ष, कमला की आयु 20 वर्ष

(11) रेल 100 किमी/घ तथा कार 80 किमी/घं

विविध प्रश्नमाला 4

1. (D) 2. (C) 3. (B) 4. (A) 5. (C) 6. (A) 7. (A)

8. (B) 9. (A) 10. (D) 11. $y=\frac{3x+10}{5},\ (0,2)$

12.

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

13. $x=1, y=3$ 14. $x=-21, y=17$

15. $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{4}$ 16. 5,3 17. $\frac{3}{7}$ 18. 20 रुपये 19. 18

21. (क) $x=2, y=2$ (ख) $x=1, y=2$ (ग) $x=-3, y=-4$ (घ) $x=2, y=-1$

22. $x=2, y=3$ प्रथम रेखा y-अक्ष को बिन्दु $(0,-1)$ पर तथा अद्वितीय रेखा y-अक्ष को बिन्दु $(0,4)$ पर मिलती है।

अध्याय

5

95ESFT

समतल ज्यामिती परिचय एवं रेखाएँ व कोण (Plane Geometry and Line & Angle)

5.01 ऐतिहासिक परिचयः

95NNHG

हड़प्पा और मोहनजोदड़ो (दोनों अब पाकिस्तान में), कालीबंगा (राजस्थान) एवं लोथल (गुजरात) में खुदाइयों से प्राप्त अवशेषों के आधार पर यह स्पष्ट रूप से प्रमाणित होता है कि प्राचीन भारत में 2500 ईसा पूर्व से 1750 ईसा पूर्व की काल अवधि में, एक बड़े क्षेत्र में विकसित सभ्यता फली–फूली। इस सभ्यता के अवशेषों से यह भी प्रमाणित होता है कि यहाँ के निवासियों को ज्यामिति एवं ज्यामितीय रचनाओं का विशेष ज्ञान था। इसी ज्ञान के आधार पर इन्होंने भवनों, सड़कों, वृत्तों, अर्द्ध गोलों का निर्माण किया था जिसमें क्षेत्रमिति का विशेष महत्व होता है। 1650 ईसा पूर्व के बेबीलोन निवासियों ने अपना रेखा गणितीय तथा क्षेत्रफल ज्ञान ''रिण्ड पेपिरस'' (Rhind Papyrus) में संजोये हुए थे।

रेखागणित एवं ज्यामिति की जन्मस्थली भी भारत रहा है। 1000 ईसा पूर्व से 500 ईसा पूर्व के शुल्व काल या वेदांग – ज्योतिषकाल में ही रेखागणित तथा ज्यामिति की नींव पड़ गई थी। इस काल में इसे विभिन्न नामों से जाना जाता था, जैसे शुल्व गणित, शुल्व विज्ञान, रज्जु गणित, रज्जु–संख्यान्। शुल्व का पर्यायवाची रज्जुहोने के कारण इसे रज्जु गणित भी कहा गया जो आगे चलकर ''रेखागणित'' में परिणित हो गया।

इसी प्रकार क्षेत्रों के मापने के कार्य के लिए रज्जु–क्षेत्रगणित, क्षेत्र समास, क्षेत्र व्यवहार, क्षेत्रमिति रूप, भूमिति एवं ज्यामिति नामों का प्रयोग किया गया है। प्राचीन काल से यज्ञों के लिए वेदियाँ बनाई जाती थी, उनका आधार भी ज्यामिति ही रहता था। वेदांग ज्योतिष में कहा गया है कि :

''वेदा हि यज्ञार्थमभिप्रवृत्ताः''

अर्थात् वेद भी यज्ञों के लिए प्रवृत हुए। यज्ञों के अनुसार भिन्न–भिन्न आकार प्रकार की वेदियां बनाने की आवश्यकता पड़ी जिसके लिए विभिन्न प्रकार की आकृतियों जैसे वर्गाकार, वृत्ताकार, अर्द्धवृत्ताकार, आयताकार, त्रिभुजाकार इत्यादि का विकास हुआ। वेदियों की रचना में इस बात का भी ध्यान रखना आवश्यक था कि सभी वेदियों का क्षेत्रफल मानक वेदी के बराबर हो। अतः इसके लिए ज्यामितीय रचनाओं का ज्ञान अत्यन्त आवश्यक था, जैसे सरल रेखा पर वर्ग बनाना, वर्ग को बराबर क्षेत्रफल वाले वृत्त में परिवर्तित करना, वर्ग के परिगत वृत्त खींचना एवं वर्ग के अन्तर्गत वृत्त खींचना, वृत्त के क्षेत्र को द्विगुणित करना इत्यादि।

अर्थात् गम्भीरता पूर्वक विचार करें तो दो शब्द अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं (1) रज्जु (रस्सी) एवं (2) माप।अतः वह विज्ञान या गणित जो शुल्व की सहायता से विकसित किया गया, उसे शुल्व विज्ञान या शुल्व गणित कहा गया। भारतीय गणितज्ञों ने इस क्षेत्र में बहुत काम किया है। विभिन्न रेखाकृतियों के अंकन हेतु शुल्व सूत्रों की रचनाएँ की, जो उन्हीं गणितज्ञों के नाम से विख्यात हुए जैसे : बौधायन शुल्व सूत्र, आपस्तम्ब शुल्व सूत्र, कात्यान शुल्व सूत्र, मानव शुल्व सूत्र, मैत्रायण शुल्व सूत्र, वाराह शुल्व सूत्र, बौधुल शुल्व सूत्र इत्यादि।

शुल्व काल की प्रमुख उपलब्धियों में से एक है ''समकोण त्रिभुज का प्रमेय'' अर्थात् ''कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता हैं।'' यह प्रमेय पाइथोगोरस (580 ईसा पूर्व) से 2 शताब्दी पूर्व भारत में व्यापक रूप में प्रचलित थी।

बौधायन प्रमेय (800 ईसा पूर्व) :

दीर्घचतुरसृस्याक्ष्णया रज्जुः पाश्र्वमानी
तिर्यक्मानी यत्पृथग्भूते कुरुतस्तदुभयं करोति।

अर्थात् दीर्घचतुरसृ (आयत) की तिर्यक्मानी (लम्ब) और पाश्र्वमानी (आधार) भुजाएँ जो दो वर्ग बनाती हैं, उनका योग अकेले कर्ण पर बने वर्ग के बराबर होता है। ज्ञातव्य है कि बौधायन ने पाइथोगोरस से लगभग 300 वर्ष पूर्व इस तथ्य को प्रतिपादित किया था। अतः इस प्रमेय को बौधायन प्रमेय कहना सुसंगत होगा।

भारतीय ज्यामितिविदों में बह्मगुप्त (598 ई.), जिन्होंने चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी भुजाओं और अर्द्ध परिमाप के रूप में ज्ञात किया। आर्यभट्ट (476 ई.), जिन्होंने समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल, पिरामिड का आयतन एवं π का सन्निकट मान प्राप्त किया। भास्कर – II (1114 ई.) ने बौधायन प्रमेय की उपपत्ति विच्छेदन विधि द्वारा दी।

आगे चल कर यूनानी गणितज्ञों ने लगभग 300 वर्ष ईसा पूर्व इस ज्ञान का गहन अध्ययन कर इसके तथ्यों को निगमनिक तर्कों द्वारा सिद्ध करते हुए व्यवस्थित किया तथा इसे ''ऐलीमेन्ट्स''(Elements) नामक पुस्तक में प्रकाशित कर दिया। आज हम ज्यामिति का अध्ययन इसी रूप में करते हैं। ज्यामिति(Geometry) शब्द यूनानी भाषा के दो शब्दों ''जियो'' (Geo) और मेट्रन (Metron) से बना है। जियो का अर्थ है ''पृथ्वी'' और ''मेट्रन'' का अर्थ है ''मापना''।

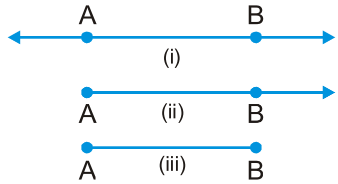
5.02 आधारभूत संकल्पनाएँ :

कुछ मूलभूत संकल्पनाओं को आधार बना कर ज्यामिति का अध्ययन किया जाता है। इन आधारभूत संकल्पनाओं को अनुभवों एवं उदाहरणों द्वारा ही समझा जाता है, इनके लिए किसी भी प्रकार की उपपत्तियॉ नहीं दी जाती है। ज्यामिति के अध्ययन में तीन आधारभूत संकल्पनाएँ मानी जाती है– (1) बिन्दु (2) रेखा (3) समतल। जिन्हें कुछ उदाहरणों की सहायता से समझने का प्रयास करेंगे।

(1) **बिन्दु** : अत्यन्त तेज नोंक वाली बारीक पेंसिल द्वारा लगाया गया चिह्न एक बिन्दु का उदाहरण है। साधारणतः बिन्दु को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों अर्थात् A, B, C, D इत्यादि द्वारा दर्शाते हैं।

(2) **रेखा** : सरल रेखा दो बिन्दुओं को उनके मध्य स्थित सभी बिन्दुओं को परस्पर सीधे मिलाते हुए खीचीं हुई दोनो तरफ अनन्त की और अग्रसर होती है। यदि इन दो बिन्दुओं में से एक बिन्दु को स्थिर करते हुए दूसरे बिन्दु को अनन्त की ओर ले जाया जाए तो यह एक किरण को निरूपित करेगी एवं यदि दोनों बिन्दुओं को स्थिर कर दिया जाए तो बनने वाली आकृति को रेखा खण्ड कह

सकते है। निम्न चित्र (i), (ii) तथा (iii) क्रमशः रेखा $\overleftrightarrow{AB}$, किरण $\overrightarrow{AB}$ रेखा खण्ड $\overline{AB}$ कहते हैं।



चित्र 5.01

(3) **समतल** : वह पृष्ठ जिस पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को परस्पर मिलाते हुए एक सरल रेखा खींचने पर उनके मध्य स्थित सभी बिन्दु उस पृष्ठ पर स्थित हो तो ऐसे पृष्ठ को समतल कहते हैं।

ज्यामिती का अध्ययन करने के लिए कुछ अभिगृहित (वे रचनाएं जिन्हें बिना प्रमाण सत्य माना जाता है तथा इनके आधार पर अन्य ज्यामितीय रचनाओं को सिद्ध किया जाता है) आवश्यक है, जो मुख्यतः निम्न है

(i) एक रेखा पर अनन्त बिन्दु होते हैं।

(ii) एक रेखा खण्ड को अपनी इच्छानुसार कितनी ही लम्बाई तक बढ़ाया जा सकता है।

(iii) एक बिन्दु से अनन्त रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

(iv) दो बिन्दुओं से गुजरती हुई एक और केवल एक ही सरल रेखा खींची जा सकती है।

(v) एक दी गई रेखा के समान्तर, किसी बाह्य बिन्दु से एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

(vi) सभी समकोण समान होते हैं।

(vii) समान पूरक एवं सम्पूरक कोण क्रमशः आपस में समान होते हैं।

(viii) एक रेखाखण्ड को केवल एक ही बिन्दु पर समद्विभाजित किया जा सकता है।

(ix) एक कोण को केवल एक ही रेखा द्वारा समद्विभाजित किया जा सकता है।

5.03 आगमनिक एवं निगमनिक तर्क :

गणित में विभिन्न नियम जो विभिन्न उदाहरणों या प्रायोगिक निष्कर्षों से स्थापित किये जाते हैं, आगमनिक तर्क कहलाते हैं। ऐसे निष्कर्ष सदैव सत्य हों, यह शंका रहती है।

एक नियम को सिद्ध करने के लिए एक विशेष प्रकार की तर्क विधि जिसमें नियम को चरणबद्ध तरीके से प्रमाण देते हुए सिद्ध किये जाते है, निगमनिक तर्क कहलाते हैं।

5.04 प्रमेय और निर्मेय :

(1) **प्रमेय** : निगमनिक तर्क विधि द्वारा सत्यापित नियमों (निष्कर्षों) को प्रमेय कहते हैं। ज्यामिति में किसी प्रमेय को सिद्ध करने के लिए विभिन्न चरणों का प्रयोग किया जाता है।

(2) **उपप्रमेय** : प्रमेय को सिद्ध करने के उपरान्त कुछ ऐसे परिणाम प्राप्त होते हैं, जिन्हें सरलतापूर्वक समझा जा सकता है, उपप्रमेय कहलाते है।

(3) **निर्मेय** : ज्यामितीय नियमों का उपयोग कर दी गई ज्यामितीय रचना को निर्मेय कहते हैं।

5.05 ज्यामितीय चिह्न :

ज्यामिति में बहुधा प्रयुक्त किये जाने वाले शब्दों को कई संकेतों के रूप में लिखा जाता है। कुछ शब्दों के संकेत की सारणी निम्नलिखित है :

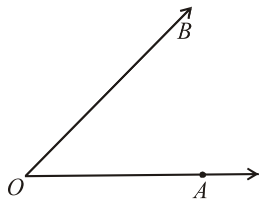
क्र.सं.	शब्द	संकेत चिह्न	क्र.सं.	शब्द	संकेत चिह्न
1.	चूँकि, क्योंकि	$\because$	8.	समकोण	∟
2.	इसलिए	$\therefore$	9.	लम्ब	$\perp$
3.	बड़ा	$>$	10.	त्रिभुज	$\triangle$
4.	छोटा	$<$	11.	समान्तर	$\parallel$
5.	सर्वांगसम	$\cong$	12.	वृत्त	$\bigcirc$
6.	समरूप	$\sim$	13.	चाप	$\frown$
7.	कोण	$\angle$	14.	बराबर नहीं है	$\neq$

5.06 कोण एवं इसका मापन :

कोण :

"कोई भी दो किरणें जिनका प्रारम्भिक बिन्दु एक ही हो, कोण बनाती है"।

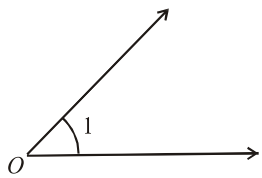
सामने चित्र 5.02 मे एक ही प्रारम्भिक बिन्दु O से दो किरणें $\overrightarrow{OA}$ तथा $\overrightarrow{OB}$ निकल रही हैं। इस आकृति को बिन्दु O पर बनने वाला कोण कहते हैं। चित्रानुसार, एक क्रिया पर कोई बिन्दु A तथा दूसरी किरण पर बिन्दु B हो तो इस कोण को $\angle AOB$ या $\angle BOA$ द्वारा व्यक्त करते है।



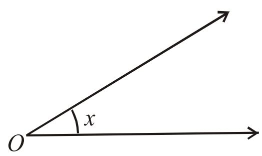
चित्र 5.02

OA तथा OB को $\angle AOB$ या $\angle BOA$ की भुजाएँ कहलाती हैं। उभयनिष्ठ बिन्दु O को कोण का शीर्ष कहते हैं।

कभी–कभी सुविधा के लिए कोण के भीतर कोई अंक या अक्षर लिखकर भी कोण को व्यक्त करते हैं। जैसे नीचे चित्र 5.03 तथा 5.04 में $\angle 1$ तथा $\angle x$ दर्शाये गये हैं।



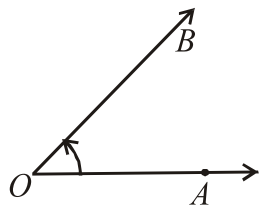
चित्र 5.03



चित्र 5.04

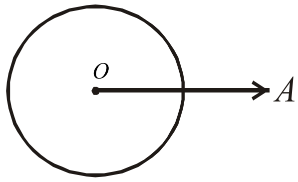
कोण का माप :

माना कि एक परिक्रामक रेखा एक बिन्दु O के सापेक्ष OA की स्थिति से परिक्रमण कर OB स्थिति में आ जाती है जैसा कि चित्र 5.05 में दर्शाया गया है, तो इस परिक्रमण की मात्रा को $\angle AOB$ का परिमाण कहते हैं।



चित्र 5.05

यदि रेखा OB बिन्दु O के चारों ओर एक पूरा चक्कर लगाकर अपनी पूर्व स्थिति OA पर आ जाये तो इस प्रकार बने कोण के परिमाण को 360 बराबर भागों में बाँटकर इसे 360 अंश (डिग्री) द्वारा व्यक्त किया जाता है।



(1 चक्कर का कोण $= 360°$)

चित्र 5.06

इस प्रकार 1 भाग $=1$ अंश $=1°$ एवं 360 भाग $=360°$

यदि एक अंश को 60 बराबर भागों में बाँटा जाये तो ऐसे प्रत्येक भाग को 1 कला (1 मिनट) कहते हैं। इसी प्रकार 1 कला को भी 60 भागों में बाँटने पर प्रत्येक भाग को एक विकला (सैकण्ड) कहा जाता है। सांकेतिक रूप में एक डिग्री, एक मिनट तथा सैकण्ड को क्रमशः $1°, 1'$ तथा $1''$ से व्यक्त करते हैं।

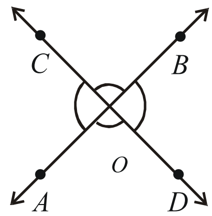
अतः $1° = 60$ कला (मिनट) $= 60'$

1 कला (मिनट) $= 60$ विकला (सैकण्ड) अर्थात् $1' = 60''$

कोण मापने के लिए चाँदे का उपयोग करते हैं, इसमें $0°$ से $180°$ तक के निशान होते हैं।

शीर्षाभिमुख कोण (Vertically opposite angles) :

यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करे, तो प्रतिच्छेद बिन्दु पर एक–दूसरे के विपरीत बने कोण, शीर्षाभिमुख कोण कहलाते हैं।

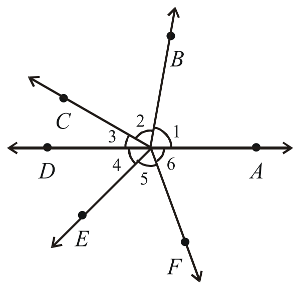


चित्र 5.07

चित्र 5.07 में रेखाएँ AB एवं CD एक दूसरे को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद कर रही हैं और इस प्रकार बिन्दु O पर बने कोण $\angle AOC$ तथा $\angle BOD$, $\angle AOD$ तथा $\angle BOC$ शीर्षाभिमुख कोण हैं। शीर्षाभिमुख कोण युग्म में कोणों की भुजाएँ परस्पर विपरीत किरणें होती हैं।

एक बिन्दु के चारों ओर बनने वाले कोण :

यदि एक बिन्दु से विभिन्न किरणें निकले तो इस प्रकार प्राप्त कोणों को एक बिन्दु के चारों ओर बने कोण कहा जाता है। चित्र 5.08



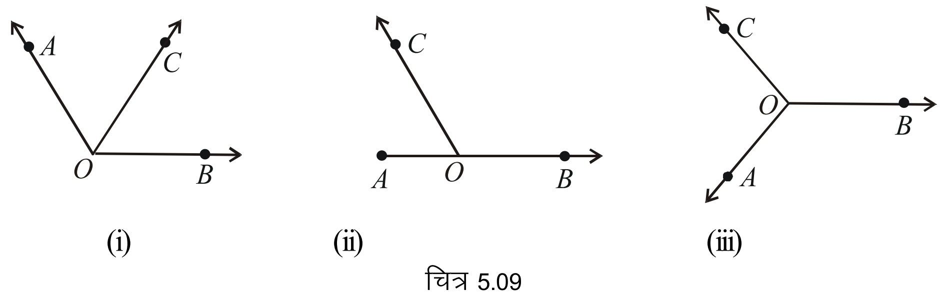
चित्र 5.08

जैसा कि कोण मापन में बताया गया है कि परिक्रामी रेखा द्वारा एक बिन्दु को चारों ओर पूरे एक परिक्रमण से बना कोण $360°$ के बराबर होता है। अतः यहाँ बिन्दु O के चारों ओर बनने वाले सभी कोणों का योग $360°$ है।

अर्थात्, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$ है।

5.07 कोणों का रैखिक युग्म (A linear pair of angles) :

नीचे दी गई आकृतियों में दिए गए कोण युग्मों को ध्यान से देखिए।



चित्र 5.09

प्रत्येक कोण युग्म ($\angle AOC$ तथा $\angle BOC$) आसन्न कोण हैं।

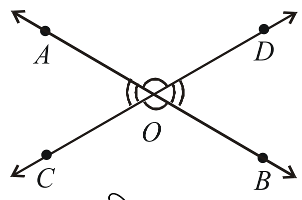
इनमें चित्र 5.09 (ii) में अंकित कोण युग्म ऐसे हैं, कि इनके मापों का योगफल $180°$ के बराबर है। ऐसे कोण युग्म को "रैखिक कोण युग्म" कहते हैं। स्पष्ट है कि एक रैखिक कोण युग्म में आसन्न कोण सम्पूरक होते हैं।

परिभाषा : "दो आसन्न कोणों को, जिनकी उभयनिष्ठ भुजा के अतिरिक्त भुजाएँ दो विपरीत किरणें हो, कोणों का रैखिक युग्म कहते हैं"।

रैखिक कोण–युग्म अभिगृहीत :

प्रमेय 5.1*

यदि दो सरल रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेद करें तो, शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते हैं।



चित्र 5.10

दिया है : रेखाएँ AB एवं CD जो एक दूसरे को बिन्दु O पर प्रतिच्छेद कर रही है।

सिद्ध करना है : शीर्षाभिमुख कोण $\angle AOC = \angle DOB$

एवं $\angle AOD = \angle BOC$

उपपत्ति :

$\because$ किरण OD का प्रारम्भिक बिन्दु, O, रेखा AB पर स्थित है। अतः रैखिक कोण युग्म अभिगृहीत से

$\therefore$ $\angle AOD + \angle DOB = 180°$ ... (i)

इसी प्रकार, $\angle AOC + \angle AOD = 180°$ ... (ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$$\angle AOD + \angle DOB = \angle AOC + \angle AOD \quad \Rightarrow \quad \angle AOC = \angle DOB$$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

$\angle AOD = \angle BOC$ "इति सिद्धम्"।

उपप्रमेय 1

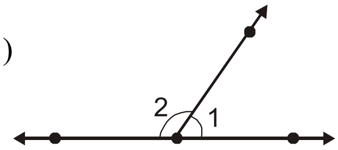
यदि दो या दो से अधिक सरल रेखाएँ एक दूसरे को एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें ,तो प्रतिच्छेद बिन्दु पर बनने वाले सभी कोणों का योगफल $360°$ के बराबर होता है।

उपप्रमेय 2

शीर्षाभिमुख कोणों के अर्द्धक एक सरल रेखा में होते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1. चित्र 5.11 में $\angle 1$ तथा $\angle 2$ रैखिक कोण युग्म है। यदि $\angle 2 - \angle 1 = 18°$ हो, तो $\angle 1$ तथा $\angle 2$ ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.11

हल : $\angle 2 + \angle 1 = 180°$ (रैखिक कोण अभिगृहीत से) . . . (1)

$\angle 2 - \angle 1 = 18$ (दिया हुआ है) . . . (2)

(1) व (2) का योग करने पर

$2\angle 2 = 198$

या $\qquad \angle 2 = \frac{198}{2} = 99^\circ \qquad \ldots(3)$

(1) व (3) से, $99^\circ + \angle 1 = 180^\circ$

या $\qquad \angle 1 = 180^\circ - 99^\circ = 81^\circ$

$\Rightarrow \qquad \angle 1 = 81^\circ$ एवं $\angle 2 = 99^\circ$

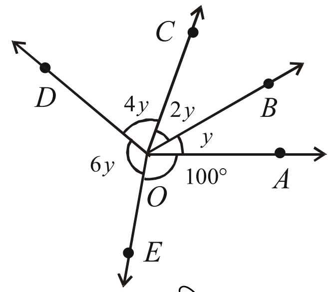
उदाहरण 2 : चित्र 5.12 में दिए गए कोणों के मापों से कोण $\angle AOB, \angle BOC, \angle COD$ तथा $\angle DOE$ के माप ज्ञात कीजिए, जहाँ $\angle AOE = 100^\circ$ है।

हल : एक बिन्दु पर बनने वाले सभी कोणों का योगफल $= 360^\circ$.

$\therefore \qquad y + 2y + 4y + 6y + 100^\circ = 360^\circ$

$\Rightarrow \qquad 13y = 260^\circ$

$\Rightarrow \qquad y = \frac{260}{13} = 20^\circ$



चित्र 5.12

अतः $\qquad \angle AOB = y = 20^\circ,$

$\qquad \angle BOC = 2y = 40^\circ,$

$\qquad \angle COD = 4y = 80^\circ$

तथा $\qquad \angle DOE = 6y = 120^\circ$

उदाहरण 3: चित्र 5.13 से $\angle x, \angle y$ एवं $\angle z$ के माप ज्ञात कीजिये।

हल : चित्र से

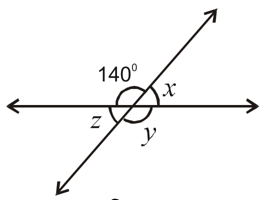
$\angle y = 140^\circ$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle x + 140^\circ = 180^\circ$ (रैखिक कोण युग्म)

$\Rightarrow \qquad \angle x = 40^\circ$

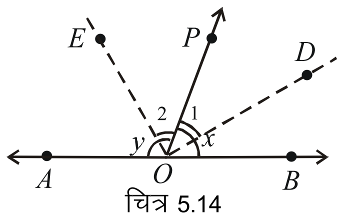
अब $\qquad \angle x = \angle z$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः $\qquad \angle z = 40^\circ$



चित्र 5.13

उदाहरण 4. चित्र 5.14 में AB एक रेखा है इससे दूसरी रेखा OP, बिन्दु O पर मिल रही है। रेखाएँ OD तथा OE क्रमशः कोण $\angle BOP$ और $\angle POA$ के समद्विभाजक हैं। $\angle EOD$ का माप ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.14

हल : माना $\angle BOP = x$ तथा $\angle POA = y$

$\angle x + \angle y = 180^\circ$ (रैखिक कोण युग्म है) $\qquad \ldots$ (i)

और $\qquad \angle x = 2\angle 1, \angle y = 2\angle 2$ (दिये हुए हैं) $\qquad \ldots$ (ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से

$2\angle 1 + 2\angle 2 = 180^\circ$

$\Rightarrow \qquad 2(\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ$ [समी. (i) से]

$\Rightarrow \qquad \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \qquad \angle EOD = 90^\circ$

उदाहरण 5. एक कोण अपने सम्पूरक कोण का आधा है तो प्रत्येक कोण का परिमाण ज्ञात कीजिए।

हल : माना कोण का मान x है

अतः प्रश्नानुसार, इसके सम्पूरक कोण का मान $\frac{x}{2}$ होगा।

हम जानते है कि सम्पूरक कोणों का योग 180° होता है।

अतः $\quad x + \frac{x}{2} = 180^\circ$

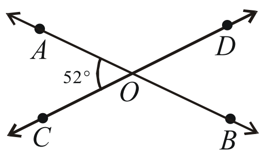
$\Rightarrow \quad x = 120^\circ$

$\therefore \quad \frac{x}{2} = 60^\circ$

अतः सम्पूरक कोणों के परिमाण 120° तथा 60° हैं।

प्रश्नमाला 5.1

1. $(2x+4)$ एवं $(x-1)$ अंश माप के कोण रैखिक कोण युग्म हैं, इन्हें ज्ञात कीजिए।
2. दिए गए चित्र 5.15 से



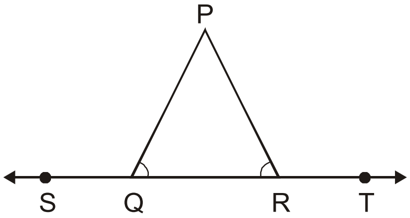
चित्र 5.15

(i) $\angle BOD$ का माप बताइए। (ii) $\angle AOD$ का माप बताइए।

(iii) शीर्षाभिमुख कोण युग्म कौन–कौन से हैं ?

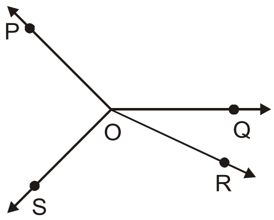
(iv) $\angle AOC$ के आसन्न सम्पूरक कोण कौन–कौन से हैं ? बताइए।

3. दिये गये चित्र 5.16 में यदि $\angle PQR = \angle PRQ$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\angle PQS = \angle PRT$



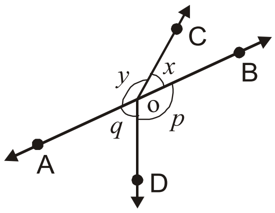
चित्र 5.16

4. चित्र 5.17 में, OP, OQ, OR और OS चार किरणें हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle POQ + \angle QOR + \angle ROS + \angle SOP = 360^\circ$ है।



चित्र 5.17

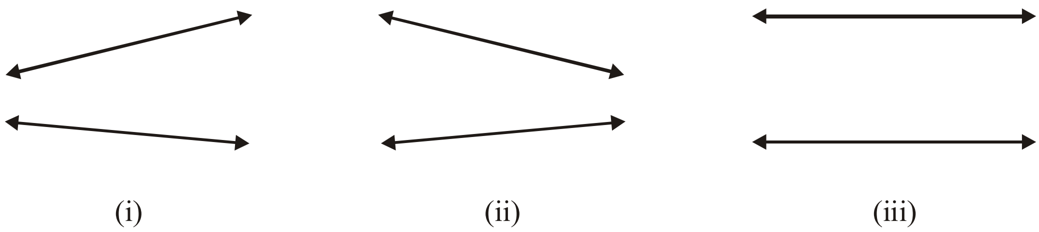
5. चित्र 5.18 में यदि $\angle x + \angle y = \angle p + \angle q$ है तो सिद्ध कीजिए कि AOB एक सरल रेखा है।



चित्र 5.18

5.08 प्रतिच्छेदी रेखाएँ तथा समान्तर रेखाएँ

यदि आप से किसी कागज या समतलन पृष्ठ पर दो–दो सरल रेखाओं के युग्म खींचने को कहा जाए तो निश्चित ही निम्न चित्रानुसार रेखा युग्म खींचेगे

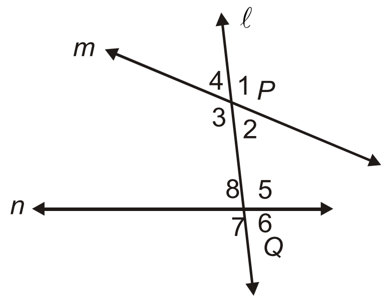


चित्र 5.19

अब प्रत्येक रेखा युग्मों के मध्य की दूरी कम से कम दो स्थानों से स्केल की सहायता से मापिए। आप क्या पातें है?

निःसन्देह आप देखेंगे कि चित्र 5.19 (i) एवं (ii) में रेखा युग्मों के मध्य दूरी प्रत्येक स्थान पर समान नहीं है। अर्थात् इन रेखाओं को आगे या पीछे बढ़ाने पर ये परस्पर एक स्थान पर प्रतिच्छेद करेंगे। अतः ये प्रतिच्छेदी रेखाएं हैं। चित्र 5.19 (iii) में दर्शाई गई रेखाओं के मध्य दूरी प्रत्येक स्थान पर समान है। इन्हें आगे या पीछे बढ़ाएँ तो ये प्रतिच्छेद नहीं करेगी। अतः ये समान्तर रेखाएँ है।

तिर्यक रेखा– दो या दो से अधिक रेखाओं के समूह को कोई एक रेखा प्रत्येक रेखा को भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें, तिर्यक रेखा कहलाती है (देखिए चित्र 5.20में) रेखाℓ , रेखाओं m तथा n को क्रमशः P और Q पर प्रतिच्छेद करती है। इस प्रकार रेखा ℓ रेखाओं m व n के लिए एक तिर्यक रेखा है।



चित्र 5.20

क्या आपको प्रत्येक प्रतिच्छेदी बिन्दु P व Q पर चार कोण बनते दिखाई दे रहे हैं? हाँ।

बिन्दु P पर $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ और $\angle 4$ तथा Q पर $\angle 5, \angle 6, \angle 7$ एवं $\angle 8$ बने हैं।

इनमें से $\angle 1, \angle 4, \angle 6$ व $\angle 7$ बाह्य कोण तथा $\angle 2, \angle 3, \angle 5$ व $\angle 8$ को अन्तः कोण कहते हैं।

याद कीजिए पिछली कक्षाओं में, आपने कुछ कोणों के युग्मों का नामांकन किया था, जो एक तिर्यक रेखा द्वारा दो रेखाओं को प्रतिच्छेद करने से बनते हैं। इन युग्मों को पुनः स्मरण कर लेतें है।

(a) संगत कोण (corresponding angle):

(i) $\angle 1$ तथा $\angle 5$ (ii) $\angle 2$ तथा $\angle 6$

(iii) $\angle 3$ तथा $\angle 7$ (iv) $\angle 4$ तथा $\angle 8$

(b) एकान्तर अन्तः कोण (Alternate interior angles):

(i) $\angle 2$ तथा $\angle 8$ (ii) $\angle 3$ तथा $\angle 5$

यहाँ एकान्तर अन्तः कोणों के लिए हम केवल एकान्तर कोणों शब्दों का ही प्रयोग करेंगे।

(c) एकान्तर बाह्यः कोण (Alternate exterior angles):

(i) $\angle 1$ तथा $\angle 7$ (ii) $\angle 4$ तथा $\angle 6$

(d) तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोण

(i) $\angle 2$ तथा $\angle 5$ (ii) $\angle 3$ तथा $\angle 8$

तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोणों के लिए क्रमागत अन्तः कोण या सम्बन्धित कोण या सह अन्तः कोण नाम से भी लिखा या पढ़ा जा सकता है। यहाँ तिर्यक रेखा के एक ओर के अन्तः कोण के लिए केवल अन्तः कोण का ही प्रयोग करेंगे।

सामान्यतः उपर्युक्त कोण युग्मों के मध्य कोई संबंध नहीं होता है, परन्तु यदि दो या अधिक समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करें तो

(i) संगत कोण बराबर होते हैं।

(ii) एकान्तर कोण बराबर होते हैं।

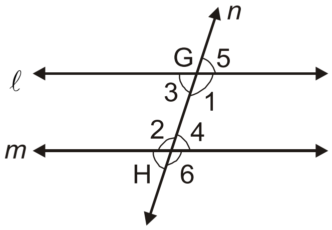
(iii) अन्तः कोण सम्पूरक होते हैं।

उपर्युक्त कथनों के विलोम भी सत्य होते हैं अभिगृहीत दो सरल रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे और संगत कोण बराबर हो तो वे रेखाएँ समान्तर होती हैं।

प्रमेय 5.2*

यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे तो एकान्तर कोण बराबर होते हैं।

दिया है : दो समान्तर रेखाएँ ℓ तथा m हैं जिन्हें n तिर्यक रेखा क्रमशः G तथा H बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। इस प्रकार एकान्तर कोण युग्म $(\angle 2, \angle 1)$ तथा $(\angle 3, \angle 4)$ बनते हैं।



चित्र 5.21

सिद्ध करना है : $\angle 1 = \angle 2$ एवं $\angle 3 = \angle 4$

उपपत्ति :

यहाँ $\angle 2 = \angle 6$ (शीर्षाभिमुख कोण) ... (i)

एवं $\angle 1 = \angle 6$ (संगत कोण अभिगृहीत से) ... (ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$\Rightarrow$ $\angle 1 = \angle 2$

इसी प्रकार $\angle 4 = \angle 5$ (संगत कोण अभिगृहीत से) ... (iii)

एवं $\angle 3 = \angle 5$ (शीर्षाभिमुख कोण) ... (iv)

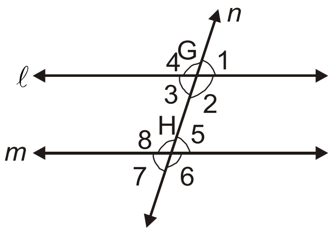
अतः समीकरण (iii) एवं (iv) से

$\Rightarrow$ $\angle 3 = \angle 4$ "इतिसिद्धम"।

प्रमेय 5.3 (प्रमेय 5.2 का विलोम)

यदि दो सरल रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे और इस प्रकार बने एकान्तर कोण बराबर हों तो रेखाएँ समान्तर होती हैं।

दिया है : ℓ तथा m दो रेखाएँ हैं जिनको तिर्यक रेखा n क्रमशः G तथा H बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं। एकान्तर कोण $\angle 2 = \angle 8$ तथा $\angle 3 = \angle 5$ हैं।



चित्र 5.22

सिद्ध करना है : $\ell \parallel m$

उपपत्ति :

यहाँ $\angle 1 = \angle 3$ (शीर्षाभिमुख कोण) ... (i)

एवं $\angle 3 = \angle 5$ (दिया है) ... (ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$\Rightarrow$ $\angle 1 = \angle 5$

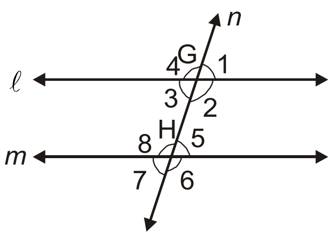
अतः संगत कोण अभिगृहीत से

$\Rightarrow$ $\ell \parallel m$ "इतिसिद्धम"।

प्रमेय 5.4*

यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे तो एक ओर के अन्तः कोणों का योग दो समकोण होता है।

दिया है : ℓ तथा m दो समान्तर रेखाएँ हैं जिन्हें n तिर्यक



चित्र 5.23

रेखा क्रमशः G तथा H बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। बिन्दुओं G तथा H पर क्रमशः कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ तथा $\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ बन रहे हैं। अन्तः कोण युग्म $\angle 2, \angle 5$ एवं $\angle 3, \angle 8$ हैं।

सिद्ध करना है : $\angle 2 + \angle 5 = 180°$ एवं $\angle 3 + \angle 8 = 180°$

उपपत्ति :

यहाँ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (रैखिक कोण युग्म से) ...(i)

एवं $\angle 1 = \angle 5$ (संगत कोण अभिगृहीत से) ...(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$$\angle 2 + \angle 5 = 180°$$

इसी प्रकार $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ (रैखिक कोण युग्म से) ... (iii)

$\angle 4 = \angle 8$ (संगत कोण अभिगृहीत से) ... (iv)

अतः समीकरण (iii) एवं (iv) से

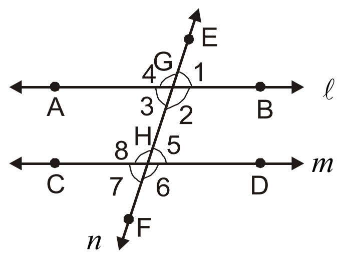
$$\angle 3 + \angle 8 = 180°$$

"इतिसिद्धम"।

प्रमेय 5.5 (प्रमेय 5.4 का विलोम)

यदि दो सरल रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे और तिर्यक रेखा के एक ही ओर बने अन्तः कोणों का योग दो समकोण हो तो वे रेखाएँ समान्तर होगी।

दिया है : ℓ तथा m दो रेखाएँ हैं, जिन्हें तिर्यक रेखा n क्रमशः G एवं H बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। इस प्रकार बिन्दु G एवं H पर क्रमशः $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ एवं $\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ बन रहे हैं।



चित्र 5.24

अन्तः कोण $\angle 2 + \angle 5 = 180°$ तथा $\angle 3 + \angle 8 = 180°$

सिद्ध करना है : $\ell \parallel m$

उपपत्ति :

यहाँ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (रैखिक कोण युग्म) ...(i)

एवं $\angle 2 + \angle 5 = 180°$ (दिया है) ...(ii)

समीकरण (i) एवं (ii) से

$$\angle 1 = \angle 5$$

अतः संगत कोण अभिगृहीत से

$$\ell \parallel m$$

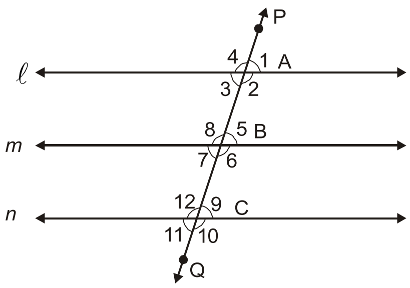
"इतिसिद्धम"।

प्रमेय 5.6*

यदि दो सरल रेखाएँ किसी तीसरी सरल रेखा के समान्तर हो, तो दोनों भी परस्पर समान्तर होगी।

$\ell \parallel n$ तथा $m \parallel n$ है।

दिया हुआ: $\ell \parallel m$ एक तिर्यक रेखा PQ खींची जो ℓ, m तथा n को A, B तथा C पर प्रतिच्छेद करती है।



चित्र 5.25

सिद्ध करना : $\ell \parallel m$

उपपत्ति: $\ell \parallel n$ एवं PQ तिर्यक रेखा है

अतः $\angle 1 = \angle 9$

(संगत कोण अभिगृहीत) $\quad\ldots(1)$

$m \parallel n$ एवं PQ तिर्यक रेखा है

अतः $\angle 5 = \angle 9$ (संगत कोण अभिगृहीत) $\quad\ldots(2)$

(1) व (2) से

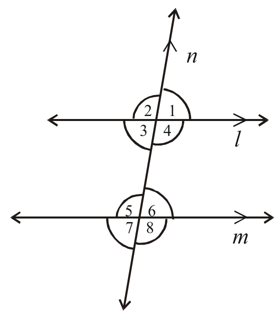
$\angle 1 = \angle 5 \quad\ldots(3)$

$\angle 1$ तथा $\angle 5$ ℓ व m पर बने संगत कोण है और बराबर है अतः संगत कोण अभीगृहीत से $\ell \parallel m$ है।

''इतिसिद्धम''

उदाहरण 6: चित्र 5.26 में रेखाएँ ℓ m एवं n तिर्यक रेखा उन्हें काट रही है। यदि $\angle 1 = 55°$ हो तो शेष ज्ञात कीजिए।

हल :



चित्र 5.26

यहाँ	$\angle 3 = \angle 1$	(शीर्षभिमुख कोण)	
और	$\angle 1 = 55°$	(दिया है)	
अतः	$\angle 3 = 55°$		
अब	$\angle 1 + \angle 4 = 180°$	(रैखिक कोण युग्म)	
$\Rightarrow$	$55° + \angle 4 = 180° \Rightarrow \angle 4 = 125°$		
$\because$	$\angle 2 = \angle 4$	(शीर्षाभिमुख कोण)	
अतः	$\angle 2 = 125°$		
$\because$	$\angle 1 = \angle 6$	(संगत कोण)	
और	$\angle 1 = 55°$	$\therefore$	$\angle 6 = 55°$
$\because$	$\angle 4 = \angle 8$	(संगत कोण)	
और	$\angle 4 = 125°$	$\therefore$	$\angle 8 = 125°$
$\because$	$\angle 7 = \angle 6$	(शीर्षाभिमुख कोण)	
और	$\angle 6 = 55°$		
	$\angle 7 = 55°$	(शीर्षाभिमुख कोण)	
	$\angle 5 = \angle 8$		
और	$\angle 8 = 125°$	$\therefore$	$\angle 5 = 125°$

उदाहरण 7. चित्र 5.27 में रेखाएँ $\ell \parallel m$ हो तो समान कोणों को ज्ञात कीजिए। कारण भी बताइए।

हल :

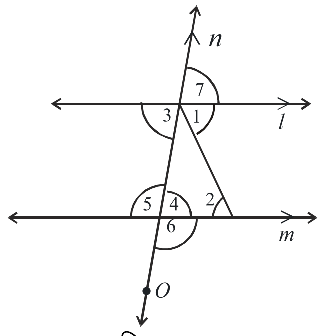
यहाँ $\angle 1 = \angle 2$ (एकान्तर कोण)

$\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोण)

$\angle 5 = \angle 6$ (शीर्षाभिमुख कोण)

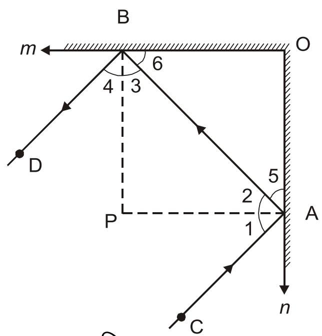
$\angle 3 = \angle 7$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle 4 = \angle 7$ (संगत कोण)



चित्र 5.27

उदाहरण 8: चित्र 5.28 में *m* और *n* दो समतल दर्पण हैं जो परस्पर लम्बवत् हैं। दर्शाइए कि आपतित किरण CA परावर्तित किरण BD के समान्तर है।



चित्र 5.28

हल : मान लीजिए कि A और B पर अभिलम्ब P पर मिलते हैं।

क्योंकि दर्पण परस्पर लम्बवत हैं, इसलिए $BP \parallel OA$ और $AP \parallel OB$ है।

चूंकि $BP \parallel OA$ तथा BA तिर्यक रेखा है

अतः $\angle 3 = \angle 5$ (एकान्तर कोण) . . . (1)

और $PA \perp OA$ अर्थात् $\angle PAO = 90^\circ$

और $\angle PAO = \angle 2 + \angle 5 = 90^\circ$ . . . (2)

(1) व (2) से $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ . . . (3)

चूंकि $\angle 1 = \angle 2$ एवं $\angle 4 = \angle 3$ (आपतन कोण = परावर्तन कोण) . . . (4)

(3) व (4) $\angle 1 + \angle 4 = 90^\circ$ . . . (5)

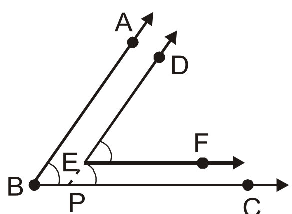
(3) व (5) को जोड़ने पर

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$$

अर्थात् $\angle CAB + \angle DBA = 180^\circ$ (तिर्यक रेखा AB के एक ही ओर के कोणें का योग 180° है)

अतः $CA \parallel BD$

उदाहरण 9: चित्र 5.29 में $BA \parallel ED$ और $BC \parallel EF$ है दशाईइए कि $\angle ABC = \angle DEF$ है।



चित्र 5.29

हल: रचना DE को इतना आगे बढ़ाइए कि वह BC को P पर मिले

चूंकि $BC \parallel EF$ (दिया हुआ) तथा को DP तिर्यक रेखा माने तो

$\angle DEF = \angle DPC$ (संगत कोण) . . . (1)

$AB \parallel DE$ (दिया हुआ) तो $AB \parallel DP$ (DE को ही P तक बढ़ाया गया है) तथा BC को तिर्यक रेखा माने तो

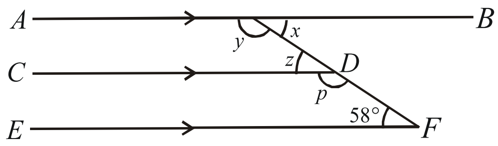
$\angle ABC = \angle DPC$ (संगत कोण) . . . (2)

(1) व (2) से $\angle ABC = \angle DEF$

प्रश्नमाला 5.2

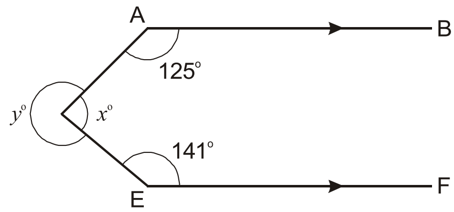
9J5ZC7

1. चित्र 5.30 में रेखाएँ AB, CD तथा EF परस्पर समान्तर हैं तो $\angle x, \angle y, \angle z$ और $\angle p$ ज्ञात कीजिए।



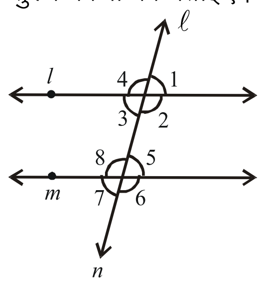
चित्र 5.30

2. चित्र 5.31 में $AB \parallel EF$ हैं। $\angle x$ एवं $\angle y$ ज्ञात कीजिए।



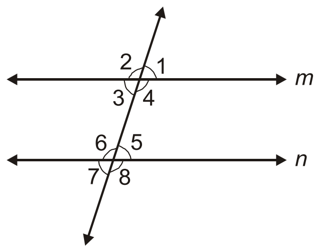
चित्र 5.31

3. चित्र 5.32 में $\ell \parallel m$ तो $\angle 1$ के तुल्य कोणों को बताइए।



चित्र 5.32

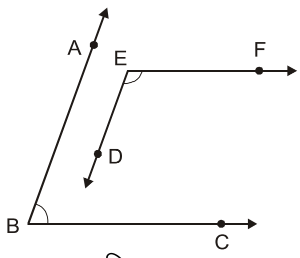
4. चित्र चित्र 5.33 में $\angle 1 = 60^\circ$ और $\angle 6 = 120^\circ$ है। दर्शाइए कि m और n समांतर है।



चित्र 5.33

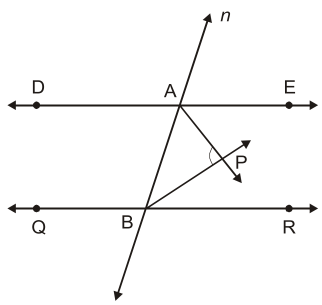
5. AP और BQ उन दो एकान्तर कोणों के समद्विभाजक हैं जो समान्तर रेखाओं ℓ और m के तिर्यक रेखा n द्वारा प्रतिच्छेद से बनते हैं दर्शाइए कि $AP \parallel BQ$ है।

6. चित्र 5.34 में $BA \parallel ED$ और $BC \parallel EF$ है। दर्शाइए कि $\angle ABC + \angle DEF = 180^\circ$ है।



चित्र 5.34

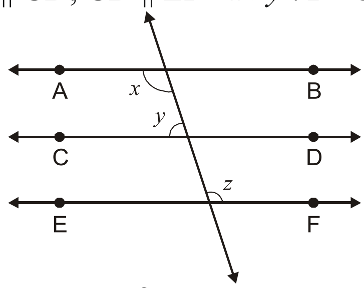
7. चित्र 5.35 में $DE \parallel QR$ तथा AP और BP क्रमशः $\angle EAB$ और $\angle RBA$ के समद्विभाजक हैं। $\angle APB$ का मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.35

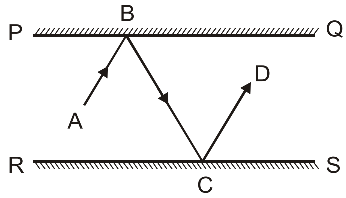
8. दो सरल रेखाएँ क्रमशः दो समान्तर रेखाओं पर लम्ब हैं। दर्शाइए कि ये दोनों सरल रेँखाएं परस्पर समान्तर हैं।

9. चित्र 5.36 में यदि $AB \parallel CD$, $CD \parallel EF$ और $y : z = 3 : 7$ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।



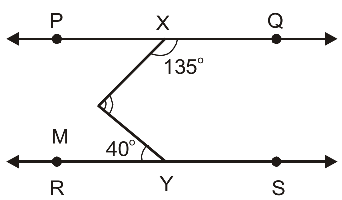
चित्र 5.36

10. चित्र 5.37 में PQ और RS दो दर्पण हैं जो परस्पर समांतर हैं। एक आपतित किरण AB दर्पण PQ के बिन्दु B से परावर्तित होकर पथ BC पर चलकर दर्पण RS के बिन्दु C से पुनः परावर्तित होकर पथ CD के अनुदिश चलती है, तो सिद्ध कीजिए $AB \parallel CD$ है।



चित्र 5.37

11. चित्र 5.38 में यदि $PQ \parallel RS$, $\angle MXQ = 13.5^\circ$ और $\angle MYR = 40^\circ$ है, तो $\angle XMY$ ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.38

5.09 आधारभूत रचनाएँ (Basic Constructions)

प्रमेय सिद्ध करते समय या उससे संबंधित प्रश्नों को हल करते समय जो चित्र या आकृतियाँ बनाई जाती हैं उनमें अधिक शुद्धता नहीं होती है। लेकिन ज्यामितीय रचना में ज्यामितीय यन्त्रों यथा पटरी, चाँदा, परकार, सेट स्क्वायर इत्यादि का प्रयोग करने से रचना यथार्थ और शुद्ध (accurate) होती है। रचना करते समय यह ध्यान में रखना आवश्यक है कि –

1. जिस आकृति की रचना करनी है उसका कच्चा–चित्र पहले बनाना चाहिये तथा यह भी ध्यान में रहे कि रेखाएँ स्पष्ट हो तथा गहरी पेन्सिल से खींचनी चाहिये।
2. रचना के पदों का शब्दों में वर्णन किया जाना चाहिए।

कुछ सरल रचनाएँ

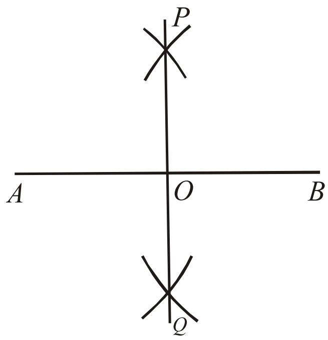
आपने पूर्व की कक्षाओं में ज्यामिति की बहुत ही सरल रचनाएँ जैसे दिये गए नाप का रेखा खण्ड खींचना, चाँदे से कोण बनाना आदि सीखा है। इस पुस्तक के पूर्व के अध्यायों में भी आपने विभिन्न ज्यामितीय तथ्यों के बारे में सैद्धान्तिक जानकारी प्राप्त की है। इन्हीं ज्यामितीय जानकारियों या नियमों के आधार पर अब हम कुछ ज्यामितीय रचनाएँ बना सकते हैं। इस अध्याय में इन्हीं ज्यामितीय रचनाओं को आप निर्मेय के रूप में सीखेंगे।

निर्मेय–1

किसी दिए हुए रेखा खण्ड का समद्विभाजन करना।

रेखा खण्ड AB का समद्विभाजन कीजिए।

रचना : दी गई माप के बराबर रेखा खण्ड AB खींचते हैं। रेखा खण्ड के बिन्दु A और B को केन्द्र मानकर, रेखा खण्ड के आधे से अधिक दूरी की त्रिज्या से AB के दोनों ओर चाप खींचिए, जो एक–दूसरे को क्रमशः P और Q बिन्दुओं पर काटते हैं। PQ को मिलाइए और जहाँ यह AB को काटे वहाँ O बिन्दु अंकित कीजिए। बिन्दु O रेखा खण्ड को समद्विभाजित करता है (चित्र 5.39)।



चित्र 5.39

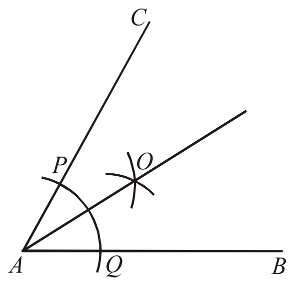
रचना का आधार : दो दिए हुए बिन्दुओं से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ (PQ), उन बिन्दुओं से बने रेखा खण्ड (AB) पर लम्ब अर्द्धक होता है।

निर्मेय–2

किसी दिए हुए कोण का समद्विभाजन करना।

$\angle BAC$ का समद्विभाजन कीजिए।

रचना : दिये गए कोण BAC के बिन्दु A को केन्द्र मानकर किसी भी त्रिज्या से एक चाप खींचिए, जो $\angle BAC$ की भुजाओं AC तथा AB को क्रमशः P और Q बिन्दुओं पर काटता है। अब P और Q को केन्द्र मानकर चाप PQ के आधे से अधिक दूरी की त्रिज्या से दो चापखींचिए जो एक दूसरे को O बिन्दु पर काटते हैं। AO को मिलाइए। AO रेखा $\angle BAC$ को समद्विभाजित करती है।



चित्र 5.40

रचना का आधार : दो प्रतिच्छेदी रेखाओं (CA तथा BA) से समान दूरी पर (AO पर) स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ उन रेखाओं के बीच के कोण ($\angle BAC$) का अर्द्धक होता है (चित्र 5.40)।

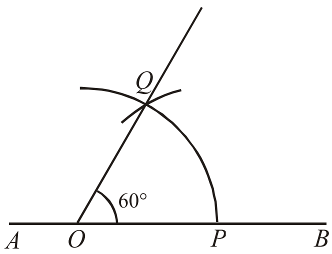
निर्मेय–3

परकार और पटरी की सहायता से 60° के कोण की रचना करना।

AB रेखा खण्ड के बिन्दु O पर $60°$ का कोण बनाइए।

रचना : रेखा खण्ड AB पर बिन्दु O को केन्द्र मानकर किसी भी त्रिज्या से चाप खींचिए जो AB को P पर काटे। P को केन्द्र मानकर उसी त्रिज्या से एक चाप खींचिए जो पहले चाप को Q पर काटे। OQ को मिलाइए। इस प्रकार $\angle BOQ = 60°$ (चित्र 5.41)।

रचना का आधार : समबाहु त्रिभुज (PQ को मिलाने पर ΔPOQ) का प्रत्येक कोण $60°$ होता है।



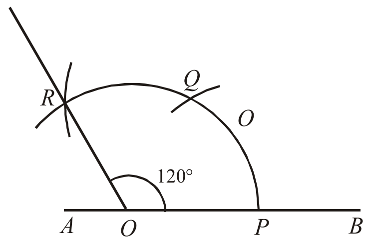
चित्र 5.41

निर्मेय–4

परकार और पटरी की सहायता से 120° के कोण की रचना करना।

AB रेखा खण्ड के O बिन्दु पर $120°$ का कोण बनाइए।

रचना : रेखा खण्ड AB पर बिन्दु O को केन्द्र मानकर किसी भी त्रिज्या से चाप खींचिए, जो AB को P पर काटे। P को केन्द्र मानकर उसी त्रिज्या से क्रमशः दो चाप खींचिए, जो पहले चाप को क्रमशः Q तथा R पर काटे। OR को मिलाइए। इस प्रकार $\angle BOR = 120°$ (चित्र 5.42)।

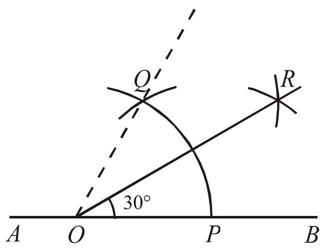


चित्र 5.42

निर्मेय–5 के आधार पर कुछ विशेष कोणों की रचनाएँ:

(क) 30° के कोण की रचना : $\left[\because 30° = \frac{60°}{2}\right]$

रचना : परकार व पटरी की सहायता से $60°$ का कोण BOQ बनाइए। निर्मेय 2 के आधार पर $\angle BOQ$ का अर्द्धक OR काटिए। इस प्रकार $\angle BOR = 30°$ (चित्र 5.43)।

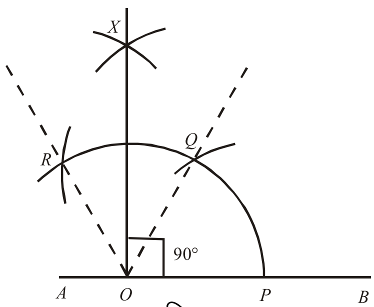


चित्र 5.43

(ख) 90° के कोण की रचना :

प्रथम विधि : $\left[\because 90° = 60° + \frac{60°}{2}\right]$

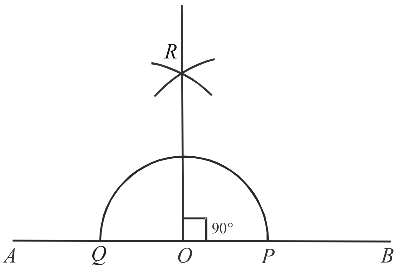
रचना : परकार व पटरी की सहायता से चित्रानुसार $60°$ व $120°$ के लिए दो चाप लगाकर क्रमशः बिन्दु Q तथा R अंकित कीजिए। निर्मेय 2 के आधार पर $\angle QOR$ का अर्द्धक OX काटिए। इस प्रकार $\angle BOX = 90°$ (चित्र 5.44)।



चित्र 5.44

द्वितीय विधि : $\left[\because 90° = \frac{180°}{2}\right]$

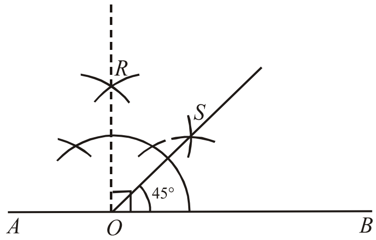
रचना : सरल रेखा पर बने कोण $BOA = 180°$ का निर्मेय 2 के आधार पर अर्द्धक OR द्वारा कीजिए। इस प्रकार $\angle BOR = 90°$ (चित्र 5.45)।



चित्र 5.45

(ग) 45° के कोण की रचना : $\left[\because 45° = \frac{90°}{2}\right]$

रचना : परकार व पटरी की सहायता से $\angle BOR = 90°$ बनाइए। निर्मेय 2 के आधार पर $\angle BOR$ का अर्द्धक OS द्वारा कीजिए। इस प्रकार $\angle BOS = 45°$ (चित्र 5.46)।



चित्र 5.46

(घ) 135° के कोण की रचना :

$$\left[\because 135° = 90° + \frac{90°}{2} \quad \text{या} \quad 180° - \frac{90°}{2}\right]$$

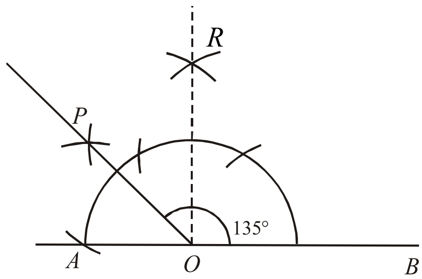
रचना : परकार व पटरी की सहायता से 90° का कोण BOR बनाइए। निर्मेय 2 के आधार पर $\angle ROA$ का अर्द्धक OP द्वारा कीजिए। इस प्रकार $\angle BOP = 135°$ (चित्र 5.47)।

इसी प्रकार आप निम्न कोणों की रचना भी कर सकते हैं।

1. $15° = \frac{30°}{2}$
2. $75° = 60° + 15°$
3. $105° = 90° + 15°$
4. $150° = 120° + 30°$

   या

   $150° = 180° - \frac{60°}{2} = 180° - 30°$



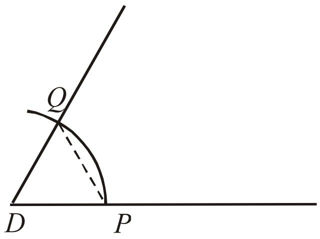
चित्र 5.47

निर्मेय–6

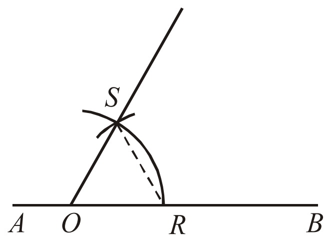
किसी दी हुई रेखा पर स्थित किसी बिन्दु पर एक दिये हुए कोण के बराबर कोण की रचना करना।

रचना : रेखा खण्ड AB के O बिन्दु पर दिये गये कोण $\angle D$ के बराबर कोण बनाइए।

D को केन्द्र मानकर एक उचित त्रिज्या का चाप खींचिए जो कोण की भुजाओं को P और Q पर काटे। अब O को केन्द्र मानकर उसी त्रिज्या से चाप खींचिए जो AB रेखा खण्ड को R पर काटे। R को केन्द्र मानकर PQ की त्रिज्या से चाप खींचिए जो पूर्व चाप को S पर काटे। OS को मिलाइए। $\angle BOS$ अभीष्ट कोण है (चित्र 5.48)।



चित्र 5.48



चित्र 5.49

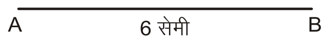
रचना का आधार :

दो सर्वांगसम त्रिभुजों ΔPDQ तथा ΔBOS में $\angle PDQ = \angle BOS$.

निर्मेय – 7

पिछली कक्षाओं हमने चान्दे की मदद से कोण की रचना की है आइए अब हम चान्दे की अनुपस्थिति में परकार तथा स्केल की सहायता से किसी भी नाप के कोण की रचना करना सीखते हैं।

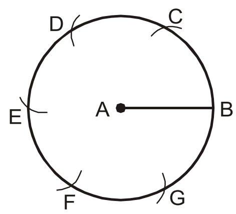
चरण–1 स्केल की सहायता से एक 6 सेमी की सरल रेखा AB की चित्र 5.50 के अनुसार रचना कीजिए।



चित्र 5.50

चरण–2 परकार को 6 सेमी खोलकर या AB के बराबर खोलकर A को केन्द्र मानकर एक वृत्त की रचना कीजिए। (प्राप्त वृत्त की त्रिज्या भी 6 सेमी होगी) जो बिन्दु B से गुजरेगा।

बिन्दु B से प्रारम्भ करते हुए चित्र(ii) के अनुसार उक्त वृत्त के परकार को6 सेमी त्रिज्या बनाए रखते हुए बराबर के भाग कीजिए उन्हे क्रमशः C, D, E, F तथा G नाम दीजिए।



चित्र 5.51

चरण–3 A व B को मिलाइए अब स्केल को B व C के मध्य इसी प्रकार रखिये कि स्केल का O भाग (जहाँ से स्केल पर माप के चिन्ह प्रारम्भ होते हैं) B पर हो तथा C स्केल पर लिखी संख्या 6 पर दिखाई देने लगे। प्रत्येक 1-1 सेमी पर चित्र 5.52 के अनुसार चिन्हित कीजिए। इस प्रकार शेष सभी भाग CD, DE, EF, FG व GB पर भी कर सकते हैं।

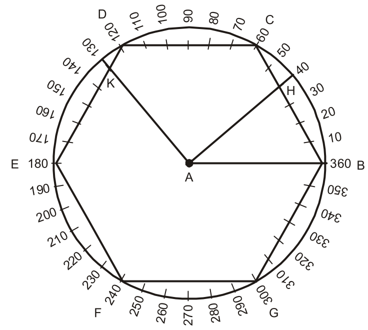
यहाँ अंकित प्रत्येक 1-1 सेमी दूरी पर अंकित चिन्ह एक दूसरे से A बिन्दू पर 10-10 डिग्री के कोण में निर्मित करेंगे।

यदि 1-1 मिलिमिटीर में विभाजन करें तो प्रत्येक 1-1 मिलिमीटर की दूरी A बिन्दु पर 1-1 डिग्री के कोण निर्मित करेंगे।

माना कि हमें 40^o के कोण की रचना करनी है तो BC रेखा पर अंकित चिन्ह में से चौथे बिन्दु जहाँ चित्र में40 लिखा है को A से मिला दीजिए। इस प्रकार प्राप्त $\angle BAH = 40^o$ का होगा।

माना कि 130^o के कोण की रचना करनी है तो चित्र में बिन्दु D से E की ओर प्रथम बिन्दु जहां 130^o लिखा है को A से मिला दीजिए। इस प्रकार प्राप्त $\angle BAK = 130^o$ का होगा

(नोट इस विधि में मिलिमीटर वाले मापों का उपयोग करके1^o से 360^o के प्रत्येक धन पूर्णांको माप वाले कोणों की रचना कर सकते हैं।



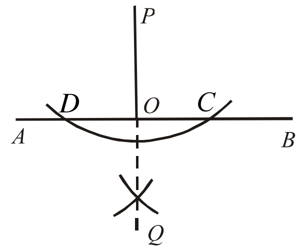
चित्र 5.52

टिप्पणीः उपरोक्त विधि में 6 सेमी की सरल रेखा एवं सरल रेखा के एक छोर जहाँ कोण की रचना करनी है को केन्द्र मान कर 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त की रचना करवाइए। वृत्त को6 बाराबर भागों में विभक्त करवाइए। (यहाँ प्रत्येक भाग आधार रेखा के साथ 360^o तक 60^o के गुणज के रूप में कोण की रचना करेगा।) किन्तु प्रत्येक बिन्दू को क्रमशः न मिलाकर स्केल को दो क्रमागत बिन्दुओं परO तथा 6 वाले बिन्दुओं को मिलाते हुए वान्छित कोण की रचना स्केल पर अंकित चिन्हों का प्रयोग करते हुये ही करवायें।

निर्मेय – 8

किसी दी हुई सरल रेखा पर किसी दिए हुए बिन्दु से, जो सरल रेखा के बाहर है, लम्ब खींचना।

विधि–1 : AB एक सरल रेखा है और इसके बाहर के बिन्दु P से इस पर लम्ब खींचिए।



चित्र 5.53

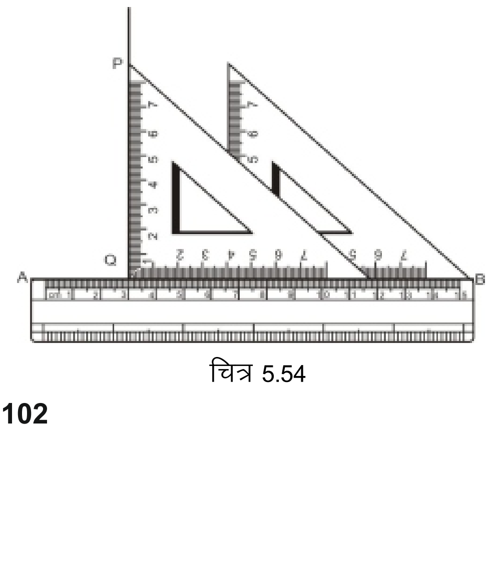
रचना : बिन्दु P को केन्द्र मानकर, बिन्दु P से AB तक की दूरी से अधिक की उचित त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए जो AB को क्रमशः C और D बिन्दुओं पर काटे। C और D को क्रमशः केन्द्र मानकर CD के आधे से अधिक उचित त्रिज्या से दो चाप AB के नीचे की ओर खींचिए जो एक दूसरे को Q पर काटे। PQ को मिलाइए। यह AB को जहाँ मिले वहाँ O लिखिए। PO अभीष्ट लम्ब है (चित्र 5.53)।

रचना का आधार :

बिन्दुओं C और D से समान दूरी पर स्थित बिन्दुओं का बिन्दुपथ लम्ब अर्द्धक PQ होगा।

विधि–2 :

AB सरल रेखा पर पटरी या सेट स्क्वायर की एक भुजा रखिए। दूसरे सेट स्क्वायर के कर्ण के अतिरिक्त अन्य भुजा को पटरी पर इस प्रकार रखिये कि वह सरक सके तथा स्थिर रहे। सेट स्क्वायर को आगे–पीछे इतना सरकाइए कि दूसरी भुजा बिन्दु P तक आ जाए। P से भुजा के साथ–साथ AB तक खींची गई रेखा PQ ही सरल रेखा पर अभीष्ट लम्ब है (चित्र 5.54)।



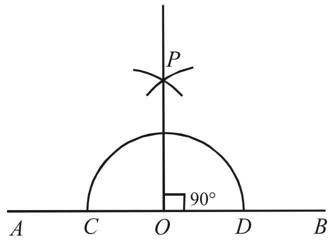
चित्र 5.54

निर्मेय–9

किसी दी हुई सरल रेखा के किसी बिन्दु पर लम्ब खींचना।

AB एक सरल रेखा है, इसके बिन्दु O पर लम्ब खींचिए।

रचना : दी गई सरल रेखा AB पर स्थित बिन्दु O को केन्द्र मानकर एक चाप खींचिए जो AB को क्रमशः C और D बिन्दुओं पर काटे। C और D बिन्दुओं को क्रमशः केन्द्र मानकर CD के आधे से अधिक उचित दूरी की त्रिज्या से AB के एक तरफ दो चाप खींचिए जो एक–दूसरे को बिन्दु P पर काटे। PO को मिलाइए। PO अभीष्ट लम्ब है (चित्र 5.55)।



चित्र 5.55

रचना का आधार : यदि PC व PD को मिलादें तो इस प्रकार ΔPOC तथा ΔPOD सर्वांगसम होगे। फलतः $\angle POC = \angle POD = 90°$.

5.10 समान्तर सरल रेखाओं की रचना

निर्मेय – 10

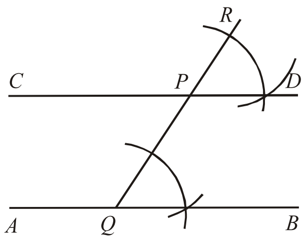
किसी दिए हुए बाहरी बिन्दु P से किसी दी गई सरल रेखा के समान्तर सरल रेखा खींचना।

जब दो सरल रेखाओं को एक तिर्यक सरल रेखा काटे और इस प्रकार बने संगत कोण या एकान्तर कोण बराबर हो तो वे रेखाएँ समान्तर होती है।

(क) संगत कोण की विधि से :

AB पर कोई बिन्दु Q लेकर P से मिलाइए और QP को आगे R तक बढ़ाइए। अब QR के बिन्दु P पर $\angle BQR$ के बराबर $\angle DPR$ कोण बनाईए।

इस प्रकार CD रेखा AB के समान्तर अभीष्ट रेखा हुई (चित्र 5.56)।

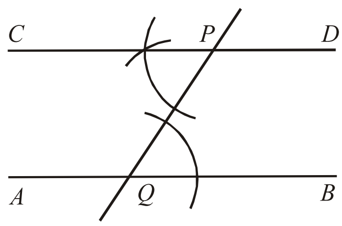


चित्र 5.56

(ख) एकान्तर कोण विधि :

AB पर कोई बिन्दु Q लेकर P से मिलाओ। अब QP के बिन्दु P पर एकान्तर कोण $\angle CPQ = \angle BQP$ ।

इस प्रकार AB रेखा के समान्तर रेखा CD अभीष्ट रेखा हुई (चित्र 5.57)।

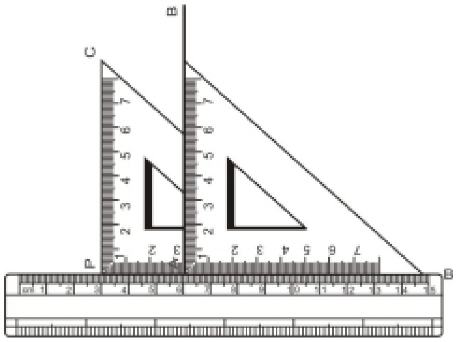


चित्र 5.57

(ग) सेट स्क्वायर की सहायता से समान्तर रेखाएँ खींचनाः

मान लीजिए AB कोई सरल रेखा है जिसके समान्तर P बिन्दु से कोई सरल रेखा खींचनी है।

सेट स्क्वायर की कर्ण के अतिरिक्त अन्य भुजा को AB भुजा पर रखिए तथा इसकी दूसरी भुजा के साथ मापनी या सेट स्क्वायर की भुजा को सटाकर इस प्रकार रखिये कि वह स्थिर रहे। AB भुजा पर रखे सेट स्क्वायर को इस प्रकार सरकाइए कि वह P बिन्दु पर आ जाए। अब भुजा के साथ PC रेखा खींचिए। PC ही अभीष्ट समान्तर सरल रेखा है (चित्र 5.58)।



चित्र 5.58

प्रश्नमाला 5.3

1. रेखा खण्ड $AB = 10$ सेमी खींचिए। इसका समद्विभाजन कीजिए तथा दोनों रेखा खण्डों को माप कर उत्तर की जाँच कीजिए।
2. $120°$ के कोण की रचना कीजिए। इस कोण की समद्विभाजक रेखा खींचिए। दोनों कोणों को मापकर उत्तर की जाँच कीजिए।
3. चाँदे की सहायता से $40°$ का कोण बनाइए। इसके बराबर कोण की रचना परकार तथा मापनी की सहायता से कीजिए।
4. एक 6 सेमी की रेखा खींचिए, इसके बाहर किसी बिन्दु P से इस पर लम्ब खींचिए।
5. $\angle ABC = 120°$ की रचना कीजिए। A से BC के समान्तर सरल रेखा खींचिए।
6. 9 सेमी लम्बा एक रेखा खण्ड खींचिए। परकार एवं मापनी की सहायता से इसको तीन बराबर भागों में बांटिए।
7. 10 सेमी लम्बा रेखा खण्ड खींचकर, परकार तथा मापनी की सहायता से इसको $3:2$ भागों में बाँटिए। इनकी माप भी ज्ञात कीजिए।
8. एक 6 सेमी लम्बा रेखा खण्ड AB खींचिए। परकार एवं पटरी की सहायता से इसको $1:2:3$ भागों में बाँटिए।
9. परकार और मापनी की सहायता से निम्न कोणों की रचना कीजिए :
   $45°$, $75°$, $105°$, $150°$.

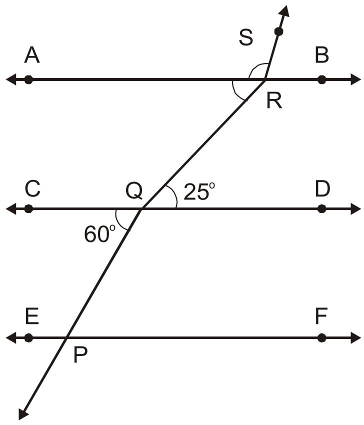
❑

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. जब एक बिन्दु से दो किरणें निकलती हैं तो कोण की आकृति बनती है। उभयनिष्ठ बिन्दु को कोण का शीर्ष बिन्दु या शीर्ष कहते हैं और किरणों को कोण की भुजाएँ कहते हैं।
2. यदि एक रेखा, दूसरी रेखा पर सीधी खड़ी हो तो वे एक समकोण बनाती हैं। एक समकोण $90°$ के बराबर होता है।
3. परिक्रामक रेखा द्वारा एक चक्कर घूमने पर चार समकोण बनते हैं अर्थात् कुल $360°$ का कोण बनता हैं।
4. एक न्यून कोण में कोण का परिमाण $0°$ व $90°$ के मध्य होता है।
5. एक अधिक कोण में कोण का परिमाण $90°$ व $180°$ के मध्य होता है।
6. एक सरल कोण में कोण का परिमाण दो समकोणों के तुल्य होता है।
7. एक वृहत् कोण में कोण का परिमाण दो समकोणों से अधिक परन्तु चार समकोणों से कम होता है।
8. यदि दो कोणों के मापों का योगफल $90°$ के बराबर हो तो वे एक–दूसरे के पूरक कोण कहलाते हैं।
9. यदि दो कोणों के मापों का योगफल $180°$ के बराबर हो तो वे एक–दूसरे के सम्पूरक कोण कहलाते हैं।
10. यदि दो कोणों में शीर्ष एवं एक भुजा उभयनिष्ठ हो और अन्य भुजाएँ, उभयनिष्ठ भुजा के विपरीत ओर स्थित हो तो वे आसन्न कोण कहलाते हैं।
11. यदि दो आसन्न कोणों के मापों का योग $180°$ हो तो वे रैखिक कोण युग्म कहलाते हैं।
12. दो प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा प्रतिच्छेद बिन्दु पर, एक–दूसरे के विपरीत ओर बनें कोणों को शीर्षाभिमुख कोण कहते हैं और ये तुल्य होते हैं।
13. यदि दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे तो इस प्रकार बने
    (i) संगत कोण बराबर होते हैं।
    (ii) एकान्तर कोण बराबर होते हैं।
    (iii) एक ही ओर के अन्तः कोणों का योग $180°$ के बराबर होता है।
14. यदि किन्हीं दो रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे और इस प्रकार बने कोणों में से
    (i) संगत कोण समान हो, या
    (ii) एकान्तर कोण समान हो, या
    (iii) एक ही ओर स्थित अन्तः कोणों का योग $180°$ के बराबर हो तो वे रेखाएँ समान्तर होती हैं।

विविध प्रश्नमाला 5

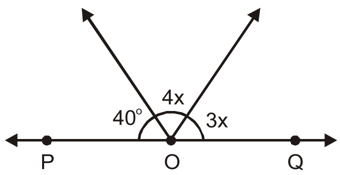
1. चित्र 5.59 में यदि $AB \parallel CD \parallel EF$, $PQ \parallel RS$, $\angle RQD = 25^\circ$ और $\angle CQP = 60^\circ$ है तो $\angle QRS$ बराबर है



चित्र 5.59

(A) 85° (B) 135° (C) 145° (C) 110°

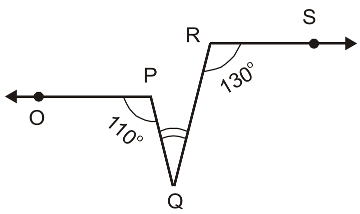
2. चित्र 5.60 में POQ एक सरल रेखा है। x का मान है



चित्र 5.60

(A) 20° (B) 25° (C) 30° (C) 35°

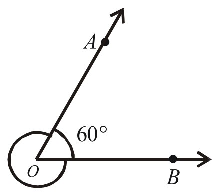
3. चित्र 5.61 में $OP \parallel RS$, $\angle OPQ = 110^\circ$ और $\angle QRS = 130^\circ$ है तो $\angle PQR$ बराबर है



चित्र 5.61

(A) 40° (B) 50° (C) 60° (C) 70°

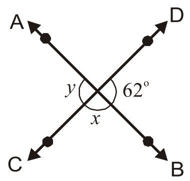
4. चित्र 5.62 में वृहत् कोण, $\angle AOB$ बराबर है :



चित्र 5.62

(A) 60° (B) 120° (C) 300° (C) 360°

5. चित्र 5.63 में दो सरल रेखाएँ AB तथा CD एक दूसरे को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद कर रही हैं और इस प्रकार बिन्दु O पर बने कोण अंकित हैं।

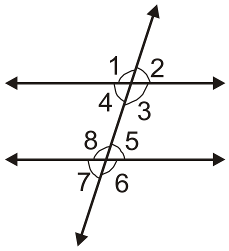


चित्र 5.63

यहाँ $\angle x - \angle y$ का मान है :

(A) 56° (B) 118° (C) 62° (D) 180°

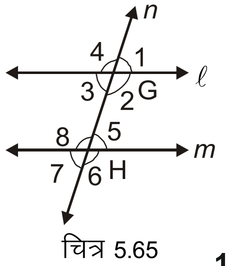
6. चित्र 5.64 से बताइए कि निम्न में कौनसा कोण युग्म, संगत कोण नहीं है :



चित्र 5.64

(A) $\angle 1, \angle 5$ (B) $\angle 2, \angle 6$ (C) $\angle 3, \angle 7$ (D) $\angle 3, \angle 6$

7. चित्र 5.65 में दो समान्तर रेखाएँ ℓ तथा m को एक तिर्यक रेखा n, बिन्दुओं G तथा H पर काट रही है, इस प्रकार बनने वाले कोण चित्र में अंकित है।



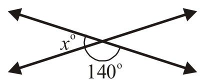
चित्र 5.65

यदि $\angle 1$ न्यून कोण हो तो बताइए निम्न में से कौनसा कथन असत्य है :

(A) $\angle 1+\angle 2=180°$ (B) $\angle 2+\angle 5=180°$

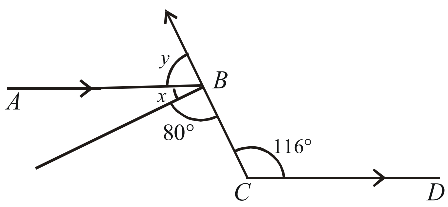
(C) $\angle 3+\angle 8=180°$ (D) $\angle 2+\angle 6=180°$

8. चित्र 5.66 से $\angle x$ का मान बताइए।



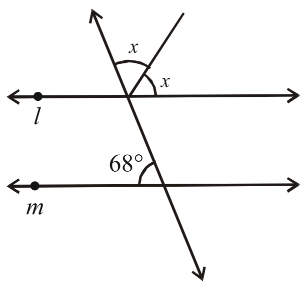
चित्र 5.66

9. दिए गए चित्र 5.67 में रेखाएँ $AB \quad CD$ है। चित्र में दिए गए कोणों से $\angle x$ तथा $\angle y$ ज्ञात कीजिए।



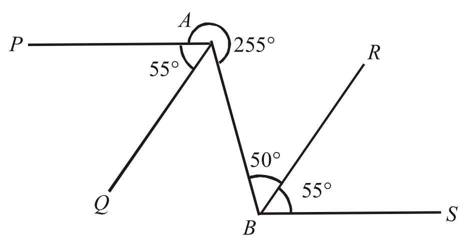
चित्र 5.67

10. चित्र 5.68 में रेखाएँ ℓ तथा m समान्तर हैं तो $\angle x$ का मान ज्ञात कीजिए। कारण भी स्पष्ट कीजिए।



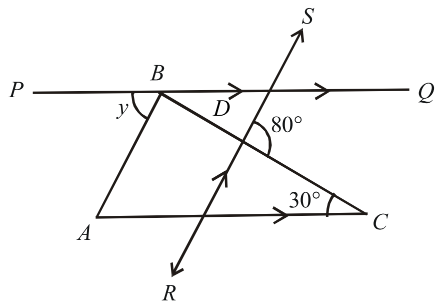
चित्र 5.68

11. चित्र 5.69 में कौन–कौन सी रेखाएँ समान्तर हैं और क्यों ?



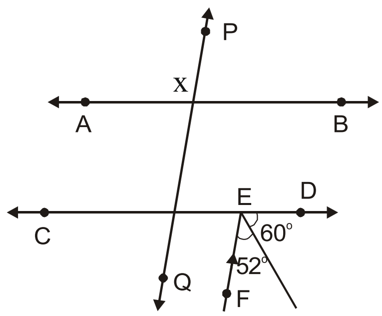
चित्र 5.69

12. सामने दिए गए चित्र 5.70 में $AC \| PQ$ एवं $AB \| RS$ तो $\angle y$ का मान ज्ञात कीजिए। प्रयोग में आने वाले कथनों के कारण भी लिखिए।



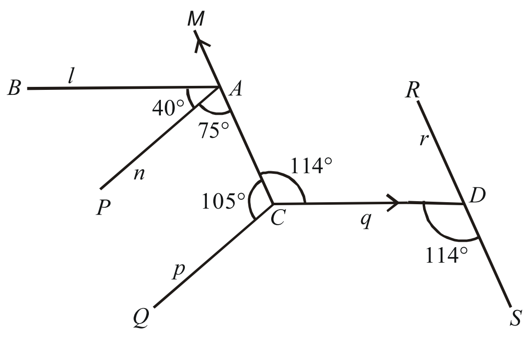
चित्र 5.70

13. चित्र 5.71 में $AB \| CD$ एवं $PQ \| EF$ हो तो $\angle x$ का मान ज्ञात कीजिए।



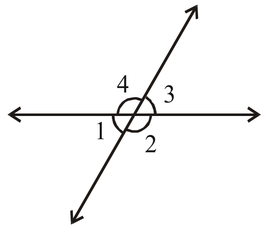
चित्र 5.71

14. चित्र 5.72 में रेखाओं ℓ, m, n, p, q एवं r में से कौन–कौन सी रेखाएँ समान्तर हैं? और क्यों?



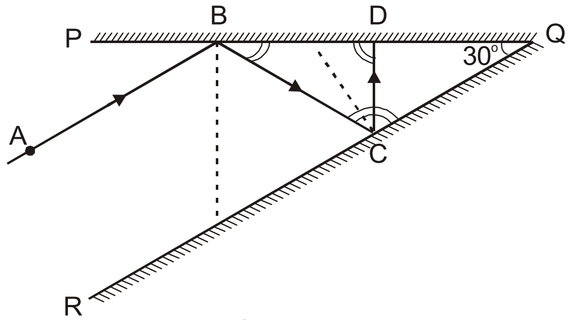
चित्र 5.72

15. चित्र 5.73 में दोसरल रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद कर रही है। अंकित कोणों में यदि $\angle 1+\angle 2+\angle 3=230^\circ$ हो तो $\angle 1$ एवं $\angle 4$ ज्ञात कीजिए।



चित्र 5.73

16. चित्र 5.74 में PQ एवं QR दो समतल दर्पण एक दूसरे के साथ Q पर 30° कोण बनाते हुए जुड़े हुए हैं। आपतित किरण AB दर्पण RC के समान्तर है तो $\angle BCQ, \angle CBQ$ तथा $\angle BDC$ का मान बताइए।



चित्र 5.74

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 5.1

1. 122° और 58°

2. (i) 52° (ii) 128° (iii) $\angle AOC, \angle BOD$ एवं $\angle AOD, \angle BOC$

(iv) $\angle AOD$ एवं $\angle BOC$ हैं।

प्रश्नमाला 5.2

1. $\angle x=58^\circ,\ \angle y=122^\circ,\ \angle z=58^\circ,\ \angle p=122^\circ$

2. $\angle x=94^\circ,\ \angle y=266^\circ$

3. $\angle 3, \angle 5, \angle 7$

7. 90°

9. 126°

11. 85°

विविध प्रश्नमाला 5

1. (C) **2.** (A) **3.** (C) **4.** (C)

5. (A) **6.** (D) **7.** (B)

8. 40°

9. $x = 36,\ y = 64$

10. $x = 56^\circ$

11. $AQ \parallel BR,\ AP \parallel BS$

12. $y = 110^\circ$

13. 112°

14. $m \parallel r,\ n \parallel p$

15. $\angle 1 = 50,\ \angle 4 = 113^\circ$

16. $\angle BCQ = 120^\circ,\ \angle CBQ = 30^\circ,\ \angle BDC = 90^\circ$

अध्याय

6

सरल रेखीय आकृतियाँ (Rectilinear Figures)

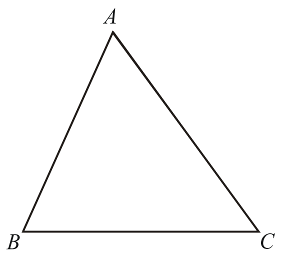
9JNRFH

9JXHH5

6.01 त्रिभुज एवं उसके कोण :

हमने रेखाओं द्वारा एक बिन्दु पर बनने वाले कोणों का अध्ययन पूर्व में किया है। अब हम समतल में स्थित एक सरलतम आकृति पर विचार करेंगे जो कि दो से अधिक रेखाओं से बनी हो। यदि हम समतल में कोई तीन असंरेख बिन्दु लें और स्केल द्वारा दो–दो बिन्दुओं को लेकर रेखाखण्ड खींचे तो कुल तीन रेखाखण्ड खींचे जा सकेंगे। इस प्रकार तीन रेखाखण्डों से घिरि हुई आकृति को त्रिभुज कहते हैं।

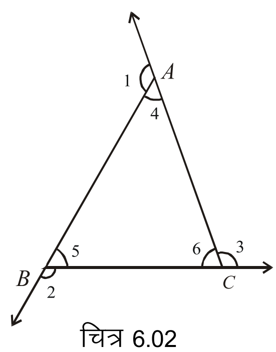
"तीन असंरेख बिन्दुओं में से दो–दो को मिलाने से बने तीन रेखाखण्डों के सम्मिलन से बनी बन्द आकृति को त्रिभुज कहते हैं।"



चित्र 6.01

चित्र 6.01 में तीन असंरेख बिन्दुओं A, B एवं C को मिलाया गया है और इस प्रकार तीन रेखाखण्डों AB, BC एवं CA से घिरि आकृति ABC को त्रिभुज कहते हैं। त्रिभुज शब्द के लिए संकेतΔ का प्रयोग करते हैं, अर्थात् त्रिभुज ABC को ΔABC लिखते हैं।

उन तीन बिन्दुओं को जिन्हें मिलाने से एक त्रिभुज बनता है, त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु या शीर्ष (vertices) कहते हैं। त्रिभुज के तीन रेखाखण्डों को उसकी भुजाएँ (sides) कहते हैं। त्रिभुज के तीन रेखाखण्डों से शीर्ष बिन्दुओं पर बने तीन कोणों को त्रिभुज के कोण कहते हैं।



चित्र 6.02

चित्र 6.02 से स्पष्ट है कि ΔABC में

(i) बिन्दु A, B एवं C उसके शीर्ष बिन्दु हैं।

(ii) रेखाखण्ड AB, BC एवं CA उसकी भुजाएँ हैं।

(iii) $\angle CAB$, (या $\angle A$), $\angle ABC$ (या $\angle B$) $\angle BCA$ (या $\angle C$) त्रिभुज के कोण हैं।

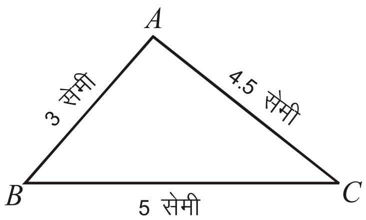
यदि ΔABC की भुजाओं को क्रमानुसार आगे बढाया जाए तो बढी हुई भुजा और अन्य संलग्न भुजा के बीच बने कोण को त्रिभुज का बहिष्कोण कहते हैं।

चित्र 6.02 में अंकित $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ त्रिभुज के **बहिष्कोण** हैं। $\angle 4, \angle 5$ एवं $\angle 6$ त्रिभुज के अन्तः कोण हैं। त्रिभुजों को भुजाओं या कोणों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है :

6.02 भुजाओं के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण :

(i) विषमबाहु त्रिभुज (Scalene Triangle) :

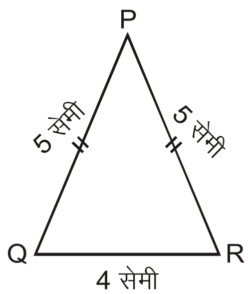
जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ अलग–अलग माप की हों, उसे विषमबाहु त्रिभुज कहते हैं। चित्र 6.03 में ΔABC एक विषमबाहु त्रिभुज है।



चित्र 6.03

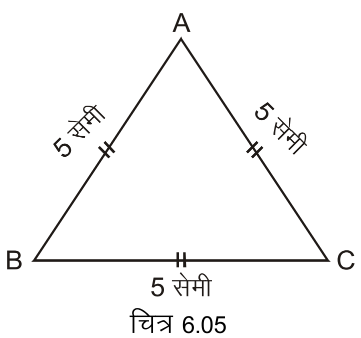
(ii) समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) :

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ समान माप की हों, तो उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहा जाता है। चित्र 6.04 में ΔPQR एक समद्विबाहु त्रिभुज है, इसमें $PQ = PR$ है।



चित्र 6.04

(iii) समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle) :



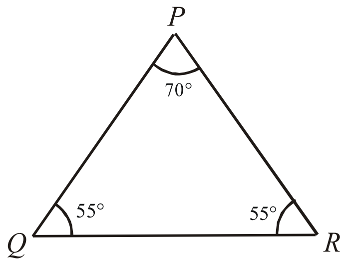
चित्र 6.05

जिस त्रिभुज में सभी भुजाएँ समान माप की हों। उसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं। चित्र 6.05 में ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है इसमें $AB = BC = CA$ है।

6.03 कोणों के आधार पर त्रिभुजों का वर्गीकरण :

(i) न्यून कोण त्रिभुज (Acute angled Triangle) :

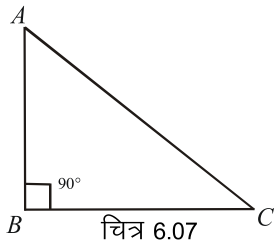
जिस त्रिभुज का प्रत्येक कोण, न्यून कोण हो, उसे न्यून कोण त्रिभुज कहते हैं। चित्र 6.06 में ΔPQR एक न्यून कोण त्रिभुज है, क्योंकि इसमें $\angle P, \angle Q$ तथा $\angle R$ न्यून कोण हैं।



चित्र 6.06

(ii) समकोण त्रिभुज (Right angled Triangle) :

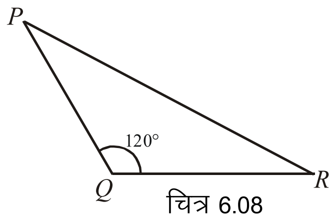
जिस त्रिभुज का कोई एक कोण 90° के बराबर हो उसे समकोण त्रिभुज कहते हैं। चित्र 6.07 में ΔABC एक समकोण त्रिभुज है, क्योंकि इसमें $\angle B = 90^\circ$ है।



चित्र 6.07

(iii) अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse angled Triangle) :

जिस त्रिभुज में कोई एक कोण 90° से अधिक हो, उसे अधिक कोण त्रिभुज कहते हैं। चित्र 6.08 में ΔPQR एक अधिक कोण त्रिभुज है, क्योंकि इसमें $\angle PQR$ 90° से अधिक है।



चित्र 6.08

त्रिभुज के तीनों कोणों के माप को जोड़ने पर योगफल सदैव 180° प्राप्त होता है। नीचे इसी ज्यामितीय तथ्य को सिद्ध किया गया है।

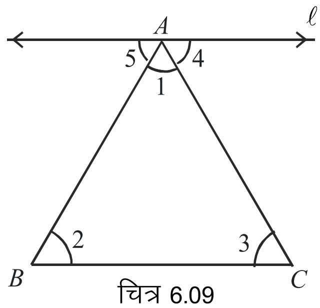
प्रमेय 6.1 *

त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल दो समकोण के बराबर होता है।

दिया है : एक त्रिभुज ABC में उसके कोणों को $\angle 1, \angle 2$ तथा $\angle 3$ द्वारा अंकित किया गया है।

सिद्ध करना है : $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$

रचना : त्रिभुज ABC के शीर्ष A से गुजरती हुई एक सरल रेखा ℓ, भुजा BC के समान्तर खींची।



चित्र 6.09

उपपत्ति : $\because\ BC \parallel \ell$ है

अतः $\angle 2 = \angle 5$ (एकान्तर कोण) ... (i)

एवं $\angle 3 = \angle 4$ (एकान्तर कोण) ... (ii)

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर

$\Rightarrow \quad \angle 2 + \angle 3 = \angle 5 + \angle 4$ ... (iii)

(iii) के दोनों पक्षों में $\angle 1$ जोड़ने पर

$\Rightarrow \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 5 + \angle 4$ ... (iv)

रैखिक कोण युग्म अभिगृहीत से

$\angle 1 + \angle 5 + \angle 4 = 180°$ ... (v)

(iv) व (v) से, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ "इतिसिद्धम"

उपप्रमेय 1

यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ा दी जाए तो इस प्रकार बना बहिष्कोण अन्तराभिमुख अन्तःकोणों के योग के बराबर होता है।

$\because \Delta$ के तीनों अन्तःकोणों का योग $180°$ के बराबर होता है चित्र 6.10 में

$\therefore \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$ ... (i)

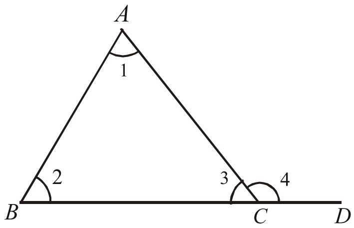
रैखिक कोण युग्म अभिगृहीत से

$\angle 3 + \angle 4 = 180°$ ... (ii)

समीकरण (i) व (ii) से

$\Rightarrow \quad \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4$

$\Rightarrow \quad \angle 1 + \angle 2 = \angle 4$



चित्र 6.10

उपप्रमेय 2

किसी त्रिभुज में एक बहिष्कोण, प्रत्येक अन्तराभिमुख अन्तःकोण से बड़ा होता है।

उपरोक्त चित्र 6.10 में, $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ (उपप्रमेय 1 से)

$\Rightarrow \quad \angle 4 > \angle 1$

एवं $\quad \angle 4 > \angle 2$

उपप्रमेय 3

एक समकोण त्रिभुज में, समकोण ही सबसे बड़ा कोण होता है।

$\because$ एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल $= 180°$

$\therefore$ एक समकोण + दो अन्य कोणों का योग $= 180°$

$\therefore$ दो अन्य कोणों का योग $= 90°$

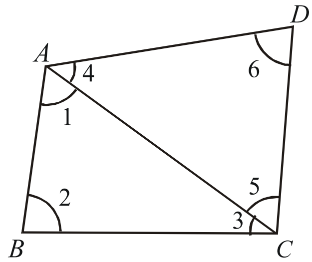
$\Rightarrow$ शेष दोनों कोणों में प्रत्येक न्यून कोण है।

$\Rightarrow$ समकोण, शेष दोनों न्यून कोणों से बड़ा है।

टिप्पणी : प्रत्येक त्रिभुज में कम से कम दो कोण अवश्य ही न्यूनकोण होते हैं।

उपप्रमेय 4

किसी चतुर्भुज के चारों कोणों का योगफल चार समकोण के बराबर होता है।



चित्र 6.11

चित्र 6.11 में $ABCD$ एक चतुर्भुज है इसके चार कोण $\angle A, \angle B, \angle C$ एवं $\angle D$ हैं। AC रेखा चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में बाँट रही है।

ΔABC में $\quad \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ \quad \ldots(i)$

एवं ΔADC म $\quad \angle 4+\angle 5+\angle 6=180^\circ \quad \ldots(ii)$

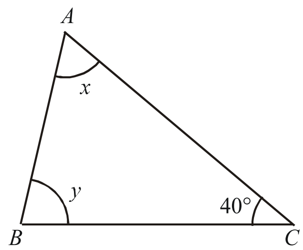
(i) तथा (ii) से $\quad \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=360^\circ$

या $\quad (\angle 1+\angle 4)+\angle 2+(\angle 3+\angle 5)+\angle 6=360^\circ$

या $\quad \angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1. चित्र 6.12 में त्रिभुज ABC का एक कोण 40° है। यदि शेष दोनों कोणों का अन्तर 30° हो तो उन्हें ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.12

हल : माना ΔABC के दूसरे कोण $\angle x$ एवं $\angle y$ हैं।

$\therefore \quad \angle x+\angle y+40^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow \quad \angle x+\angle y=140^\circ \quad \ldots(i)$

एवं $\quad \angle x-\angle y=30^\circ$ (दिया हुआ है) $\quad \ldots(ii)$

(i) तथा (ii) का योग करने पर

$\angle x+\angle y+\angle x-\angle y=140^\circ+30^\circ$

$\Rightarrow \quad 2\angle x=170^\circ$

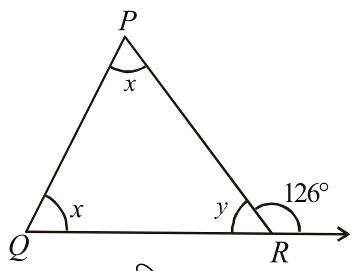
$\Rightarrow \quad \angle x=85^\circ$

अतः (i) से $\quad \angle y=140^\circ-\angle x$

$=140^\circ-85^\circ=55^\circ$

अतः अभीष्ट कोण $\angle x=85^\circ$ तथा $\angle y=55^\circ$ है।

उदाहरण 2. चित्र 6.13 से $\angle RPQ, \angle QRP$ एवं $\angle PQR$ ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.13

हल : चित्र 5.13 के अनुसार

$\angle x+\angle x=126^\circ$

$\Rightarrow \qquad 2\angle x = 126°$

$\Rightarrow \qquad \angle x = 63°$

अतः $\qquad \angle RPQ = 63°$

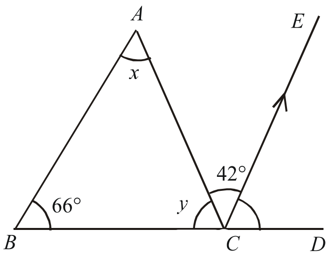
एवं $\qquad \angle PQR = 63°$

अब $\qquad \angle y + \angle 126° = 180°$ (दोनों रैखिक कोण युग्म हैं)

$\therefore \qquad \angle y = 180° - 126° = 54°$

अतः $\qquad \angle QRP = 54°$

उदाहरण 3. चित्र 6.14 में $\angle x, \angle y$ एवं $\angle ACD$ ज्ञात कीजिए। यहाँ रेखा $BA \quad CE$ है।



चित्र 6.14

हल : यहाँ $\angle x = 42°$ (एकान्तर कोण हैं)

एवं $\qquad \angle ACD = \angle x + 66°$

$\qquad = 42° + 66°$

$\qquad = 108°$

$\angle y + \angle ACD = 180° \qquad \ldots (i)$

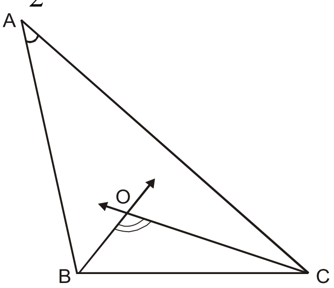
या $\qquad \angle y + 108° = 180°$

$\Rightarrow \qquad \angle y = 180° - 108°$

$\Rightarrow \qquad \angle y = 72°$

उदाहरण 4. यदि किसी त्रिभुज ABC के कोण B तथा C के समद्विभाजक बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ ।

हल : चित्र 6.15 में दर्शाए अनुसार ΔABC की आकृति बनाकर $\angle B$ तथा $\angle C$ के समद्विभाजक BO व CO खींचते हैं।



चित्र 6.15

$\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180°$

(Δ के तीनों कोणों का योग 180°)

या, $\qquad \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times 180°$

या, $\qquad \frac{1}{2}\angle A + \angle OBC + \angle OCB = 90° \qquad \ldots (1)$

(दिया हुआ है कि BO व CO क्रमशः $\angle B$ व $\angle C$ के समद्विभाजक है)

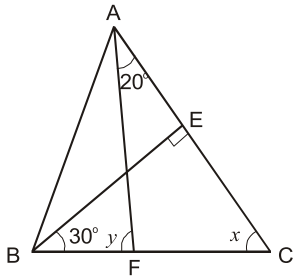
$\because \qquad \angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$ (ΔOBC के तीनों कोण) $\qquad \ldots (2)$

(2) में से (1) को घटाने पर

$$\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB - \frac{1}{2}\angle A - \angle OBC - \angle OCB = 180 - 90$$

$\Rightarrow$ $$\angle BOC - \frac{1}{2}\angle A = 90^o$$

या, $$\angle BOC = 90^o + \frac{1}{2}\angle A$$



चित्र 6.16

उदाहरण 5: चित्र 6.16 में यदि BE $\perp$ AC, $\angle EBC = 30^o$ और $\angle FAC = 20^o$ है, तो $\angle x$ और $\angle y$ के मान कीजिए।

हल: ΔBCE में $90^o + 30^o + x = 180^o$

या, $120^o + \angle x = 180$

या, $\angle x = 180 - 120$

अतः $\angle x = 60^o$

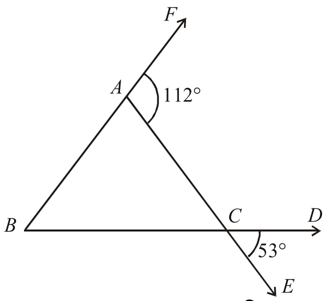
अब $\angle y = \angle FAC + \angle x$ (बहिष्कोण = अन्तराभिमुख कोणों का योग)

अतः, $\angle y = 20^o + 60^o = 80^o$

9K7IIS

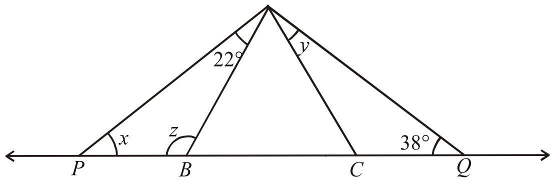
प्रश्नमाला 6.1

1. दिए गए चित्र 6.17 से ΔABC के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.17

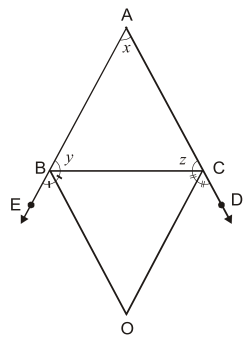
2. चित्र 6.18 में ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। चित्र से $\angle x, \angle y$ और $\angle z$ के मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.18

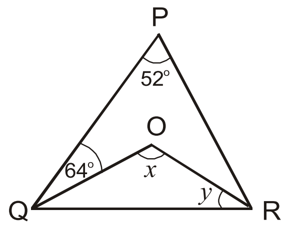
3. चित्र 6.19 में ΔABC की भुजाएँ AB और AC को क्रमशः E और D तक बढ़ाया गया है। यदि

$\angle CBE$ और $\angle BCD$ के समद्विभाजक क्रमशः BO और CO बिन्दु O पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle BOC = 90^\circ - \dfrac{\angle x}{2}$ है।



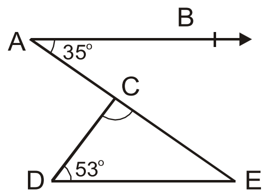
चित्र 6.19

4. चित्र 6.20 में $\angle P = 52^\circ$ और $\angle PQO = 64^\circ$ है। यदि QO और RO क्रमशः $\angle PQR$ और $\angle PRQ$ के समद्विभाजक हैं, तो $\angle x$ और $\angle y$ के मान ज्ञात कीजिए।



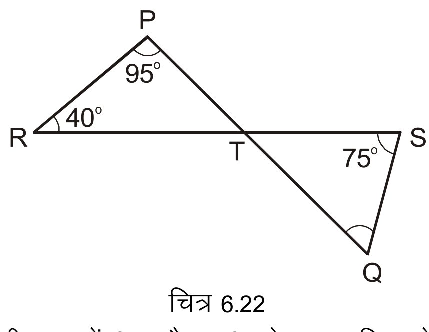
चित्र 6.20

5. चित्र 6.21 में, यदि AB || DE, $\angle BAC = 35^\circ$ और $\angle CDE = 53^\circ$ है, तो $\angle DCE$ ज्ञात कीजिए।



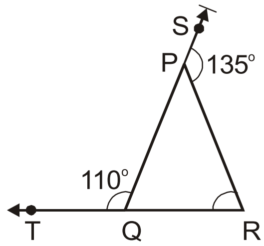
चित्र 6.21

6. चित्र 6.22 में, यदि रेखाएँ PQ और RS बिन्दु T पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि $\angle PRT = 40^\circ$, $\angle RPT = 95^\circ$ और $\angle TSQ = 75^\circ$ है तो $\angle SQT$ ज्ञात कीजिए।



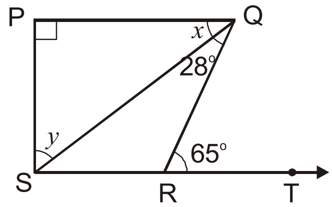
चित्र 6.22

7. चित्र 6.23 में, ΔPQR की भुजाओं QP और RQ को क्रमशः बिन्दुओं S और T तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle SPR = 135^\circ$ है और $\angle PQT = 110^\circ$ है, तो $\angle PRQ$ ज्ञात कीजिए।



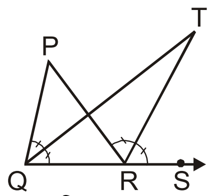
चित्र 6.23

8. चित्र 6.24 में, यदि $PQ \perp PS, PQ \parallel SR, \angle SQR = 28^\circ$ और $\angle QRT = 65^\circ$ है, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.24

9. चित्र 6.25 में, ΔPQR की भुजा QR को बिन्दु S तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle PQR$ और $\angle PRS$ के समद्विभाजक बिन्दु T पर मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\angle QTR = \frac{1}{2}\angle QPR$ है।



चित्र 6.25

10. एक त्रिभुज ABC का कोण A समकोण है। BC पर एक बिन्दु L इस प्रकार है कि $AL \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए $\angle BAL = \angle ACB$

11. किसी त्रिभुज के कोणों का अनुपात 2 : 3 : 4 है। इस त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

6.04 सरल रेखीय आकृतियाँ :

तीन या तीन से अधिक सरल रेखाओं से घिरि हुई समतलीय आकृति को सरल रेखीय आकृति कहते हैं। यदि हम समतल में $n(n \geq 3)$ अलग–अलग बिन्दु लें जो कि इस प्रकार हों कि :

(i) विचाराधीन n बिन्दुओं में से कोई भी दो बिन्दुओं से बना रेखाखण्ड अपने सिरों के दोनों बिन्दुओं के अतिरिक्त शेष किसी भी बिन्दु ($n-2$ बिन्दुओं) में से न गुजरे।

(ii) एक ही अंत्य बिन्दु से खींचे गए कोई दो रेखाखण्ड एक ही रेखा में न हो।

तब दो–दो बिन्दुओं को क्रमशः (एक ही क्रम में) मिलाने से घिरी हुई समतलीय आकृति को n भुजा का

बहुभुज कहते हैं। वे बिन्दु जिन्हें मिलाने से बहुभुज बनता है, बहुभुज के शीर्ष बिन्दु कहलाते हैं।जिन रेखाखण्डों से बहुभुज बनता है, उन्हें बहुभुज की भुजाएँ कहते हैं। शीर्ष बिन्दुओं पर रेखाखण्डों से बने कोण, बहुभुज के अन्तःकोण कहलाते हैं।

स्पष्ट है कि n भुजा के बहुभुज में :

(i) n शीर्ष बिन्दु (या शीर्ष) होते हैं,

(ii) n भुजाएँ होती हैं,

(iii) n अन्तःकोण होते हैं।

बहुभुज को भुजाओं की संख्या और कोणों के माप के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है।

(i) त्रिभुज (Triangle) :

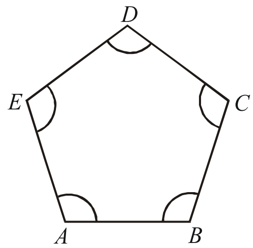
जब $n = 3$ हो तो सरल रेखीय आकृति को त्रिभुज कहते हैं।

(ii) चतुर्भुज (Quadrilateral) :

जब $n = 4$ हो तो समतलीय आकृति को चतुर्भुज कहा जाता है।

(iii) पंचभुज (Pentagon) :

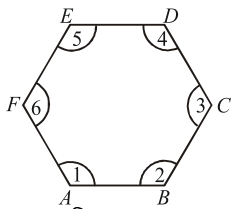
वह बहुभुज जिसमें भुजाओं की संख्या पाँच होती है, पंचभुज कहलाता है। चित्र 6.26 में समतलीय आकृति $ABCDE$ एक पंचभुज है। इसमें AB, BC, CD, DE एवं EA इसकी भुजाएँ हैं और $\angle EAB, \angle ABC, \angle BCD, \angle CDE$ एवं $\angle DEA$ इसके अन्तःकोण हैं।



चित्र 6.26

(vi) षट्भुज (Hexagon) :

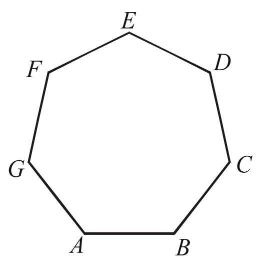
यदि किसी बहुभुज में भुजाओं की संख्या 6 हो तो उसे षट्भुज कहते हैं। चित्र 6.27 में $ABCDEF$ एक षट्भुज है। इसमें अंकित कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$ तथा $\angle 6$ इसके अन्तःकोण हैंतथा AB, BC, CD, DE, EF एवं FA इसकी भुजाएँ हैं।



चित्र 6.27

(vii) सप्तभुज (Heptagon) :

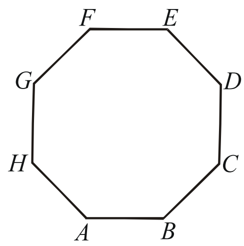
यदि किसी बहुभुज में सात भुजाएँ हो तो उसे सप्तभुज कहा जाता है। चित्र 6.28 में $ABCDEFG$ एक सप्तभुज है।



चित्र 6.28

(viii) अष्टभुज (Octagon) :

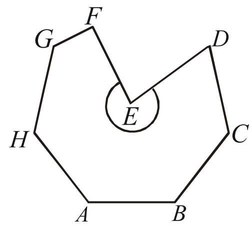
यदि किसी बहुभुज में भुजाओं की संख्या आठ हो तो उसे अष्टभुज कहते हैं। चित्र 629 में $ABCDEFGH$ एक अष्टभुज है।



चित्र 6.29

उत्तल बहुभुज (Convex polygon) :

वह बहुभुज जिसमें प्रत्येक अन्तःकोण का माप दो समकोण से छोटा होता है, उत्तल बहुभुज कहलाता है। जब तक अन्यथा उल्लेखित न हो बहुभुज शब्द से आशय एक उत्तल बहुभुज से ही लिया जाना चाहिए।



चित्र 6.30

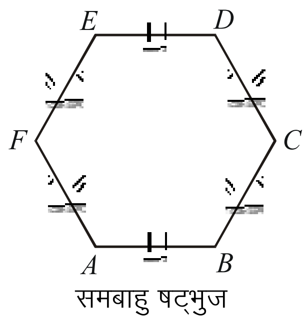
अवतल बहुभुज (Concave polygon) :

जिस बहुभुज में कम से कम एक अन्तःकोण दो समकोण से अधिक हो, उसे अवतल बहुभुज कहते हैं।

दिए गए चित्र 6.30 में $ABCDEFGH$ एक अवतल बहुभुज है क्योंकि इसमें अन्तःकोण $\measuredangle FED$ दो समकोण से अधिक हैं।

समबाहु बहुभुज (Equilateral ploygon) :

जब किसी बहुभुज की सभी भुजाएँ समान माप की हों तो उसे एक समबाहु बहुभुज कहते हैं। (चित्र 6.31)

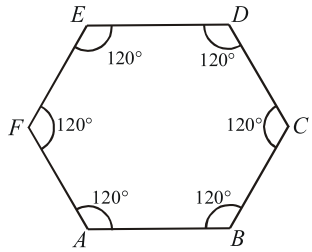


समबाहु षट्भुज

चित्र 6.31

समान कोणिक बहुभुज (Equiangular ploygon) :

यदि किसी बहुभुज के सभी अन्तःकोणों के माप समान हों तो उसे समान कोणिक बहुभुज कहते हैं। (चित्र 6.32)

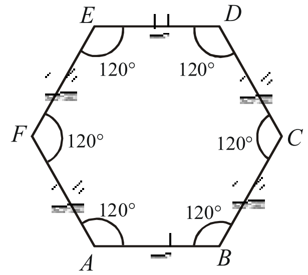


समान कोणिक षट्भुज

चित्र 6.32

समबहुभुज (Regular ploygon) :

जो बहुभुज समबाहु एवं समान कोणिक दोनों ही प्रकार का हो, उसे एक समबहुभुज कहते हैं। (चित्र 6.33)



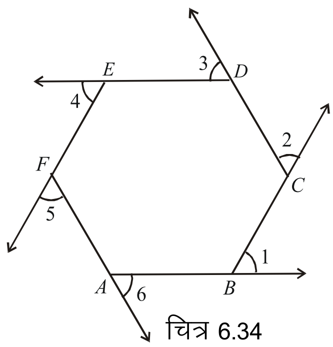
समषट्भुज

चित्र 6.33

बहुभुज के बहिष्कोण (Exterior angles of a ploygon) :

बहुभुज की भुजाओं को एक ही क्रम वामावर्त या दक्षिणावर्त में बढ़ाने पर बहुभुज के बाहर की ओर बने कोण जो कि अन्तः कोणों के संपूरक कोण हैं, बहुभुज के बहिष्कोण कहलाते हैं।

चित्र 6.34 में बहुभुज $ABCDEF$ की भुजाओं को एक ही क्रम में बढ़ाया गया है, इस प्रकार बहिष्कोण $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5$ तथा $\angle 6$ बन रहे हैं।



चित्र 6.34

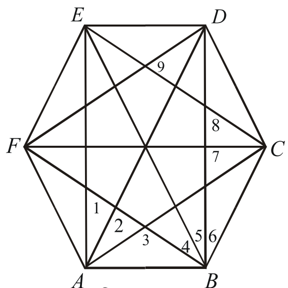
बहुभुज का परिमाप (Perimeter of a ploygon) :

किसी बहुभुज की भुजाओं की लम्बाइयों का योग उसका परिमाप कहलाता है।

बहुभुज के विकर्णः (Diagonals of a polygon) :

बहुभुज के शीर्षों को मिलाने से प्राप्त वे सरल रेखाएँ, जो कि भुजाएँ नहीं होती, बहुभुज के विकर्ण कहलाती हैं।

चित्र 6.35 में रेखाएँ AC, AD एवं AE, शीर्ष बिन्दु A से खींचे गए विकर्ण हैं। यहाँ कुल 9 विकर्ण चित्रांकित हैं।



चित्र 6.35

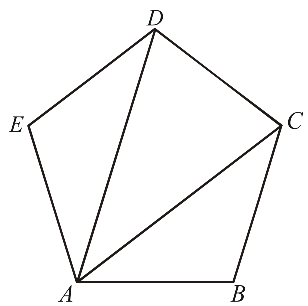
किसी n भुजा के एक बहुभुज में कुल विकर्णों की संख्या

$=\dfrac{n(n-1)}{2}-n$ होती है।

जैसे, यहाँ $n=6$ है तो विकर्णों की संख्या

$$=\frac{6(6-1)}{2}-6=\frac{6\times 5}{2}-6=15-6=9$$

n भुजाओं के एक बहुभुज में एक शीर्ष बिन्दु से खींचे गये विकर्णों द्वारा कुल $(n-2)$ त्रिभुज बनते हैं। चित्र 6.36 में पंचभुज $ABCDE$ के शीर्ष बिन्दु A से विकर्ण AC एवं AD खींचने पर कुल तीन त्रिभुज बनते हैं।



चित्र 6.36

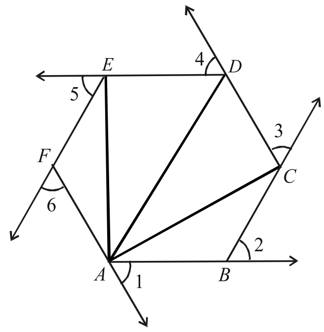
उपर्युक्त तथ्य के आधार पर हम किसी बहुभुज के समस्त अन्तःकोणों का योग ज्ञात करने का सूत्र स्थापित करेंगे और इसी के आधार पर किसी भी बहुभुज के समस्त बहिष्कोणों का योगफल भी ज्ञात करेंगे।

प्रमेय 6.2*

(i) ***एक n भुजा वाले बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल $(2n-4)$ समकोण के बराबर होता है।***

(ii) ***एक बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योगफल चार समकोण होता है।***

(iii) ***यदि n भुजाओं वाला बहुभुज, सम बहुभुज हो, तो उसके प्रत्येक अन्तः कोण $\frac{1}{n}(2n-4)$ समकोण होते हैं।***



चित्र 6.37

एक n भुजाओं वाला उत्तल बहुभुज $ABCDEF\cdots\cdots$ की भुजाओं $AB, BC, CD, DE, EF, FA\cdots\cdots$ को एक ही क्रम में बढाया गया है। इस प्रकार शीर्ष बिन्दुओं $A, B, C, D, E, F\cdots\cdots$ पर बहिष्कोण क्रमशः $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6\cdots\cdots$ बन रहे हैं।

सिद्ध करना है :

(i) समस्त अन्तःकोणों का योग $=(2n-4)$ समकोण

(ii) समस्त बहिष्कोणों का योग $=4$ समकोण

(iii) समबहुभुज के प्रत्येक अन्तः कोण $=\dfrac{(2n-4)}{n}$ समकोण

रचना :

शीर्ष बिन्दु A से, बहुभुज के विकर्ण $AC, AD, AE\cdots\cdots$ खींचे। इस प्रकार कुल $(n-2)$ त्रिभुज बन गए।

उपपत्ति :

(i) हम जानते हैं कि बहुभुज क्षेत्र को, उसके एक शीर्ष बिन्दु पर खींचे गए समस्त विकर्ण, $(n-2)$ त्रिभुजों में बाँटता है, अतः

n भुजा के बहुभुज के समस्त अन्तःकोणों का योगफल

= इसमें एक शीर्ष से खींचे गए समस्त विकर्णों द्वारा बने $(n-2)$ त्रिभुजों के अन्तःकोणों का योग

$=(n-2)\times 2$ समकोण [एक त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग दो समकोण होता है]

$=(2n-4)$ समकोण

उपपत्ति :

(ii) हम जानते हैं कि बहुभुज की भुजाओं को क्रमानुसार बढ़ाने से अन्तः कोण तथा बहिष्कोण के रैखिक कोण युग्म दो समकोण के बराबर होता है, अतः

n भुजा के बहुभुज में अन्तःकोण एवं बहिष्कोण के n जोड़े हैं और इनका योगफल

$= n \times 2$ समकोण $= 2n$ समकोण ...(i)

n अन्तः कोणों का योगफल $=(2n-4)$ समकोण ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) से

n बहिष्कोणों का योग $= 2n$ समकोण $-(2n-4)$ समकोण

$=(2n-2n+4)$ समकोण

$= 4$ समकोण "इतिसिद्धम्"

(iii) यदि बहुभुज समबहुभुज हो तो उसका प्रत्येक अन्तः कोण का मान $\frac{1}{n}(2n-4)$ समकोण होता है।

उपपत्ति– हम जानतें है कि n भुजाओं के बहुभुज के सभी अन्तः कोणों का योग $(2n–4)$ समकोण होता है

हम यह भी जानते हैं कि समबहुभुज का प्रत्येक कोण समान होता है।

यदि हम n समान कोण वाले सम बहुभुज का एक कोण x^o मान लें तो

$nx^o = (2n-4)$ समकोण (सभी n कोणों का योग)

या $x^o = \frac{1}{n}(2n-4)$ समकोण "इतिसिद्धम"

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 6. एक समबहुभुज में भुजाओं की संख्या 10 है तो उसके प्रत्येक अन्तःकोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ n भुजा वाले एक समबहुभुज का प्रत्येक बहिष्कोण

$= \frac{4}{n}$ समकोण

$= \frac{4}{10} \times 90°$ (यहाँ $n = 10$)

$= 36^o$

$\therefore$ प्रत्येक अन्तःकोण $= 180° - 36°$

$= 144°$

या

n भुजा वाले समबहुभुज का प्रत्येक कोण

$= \frac{(2n-4)\text{ समकोण}}{n}$

$= \frac{(2 \times 10 - 4) \times 90^o}{10}$

$= \frac{16 \times 90^o}{10} = 144^o$

उदाहरण 7. एक सप्तभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ n भुजाओं वाले एक बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल

$=(2n-4)$ समकोण

$\therefore$ 7 भुजाओं वाले एक बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल

$=(2 \times 7 - 4) \times 90°$

$= 10 \times 90° = 900°$

वैकल्पिक विधि :

सप्तभुज के किसी एक शीर्ष बिन्दु से खींचे गए समस्त विकर्णों

द्वारा बहुभुज में बने त्रिभुजों की संख्या $= 7 - 2 = 5$

$\because$ एक त्रिभुज के अन्तःकोणों का योग $=180°$

$\therefore$ त्रिभुजों के सभी अन्तःकोणों का योग $=180° \times 5$
$= 900°$

उदाहरण 8. एक समबहुभुज के प्रत्येक अन्तःकोण का मान 175° हो, तो भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ 1 अन्तःकोण $+1$ बहिष्कोण $=180°$

$\therefore$ 1 बहिष्कोण $=180° - 1$ अन्तःकोण

$= 180° - 175°$
$= 5°$

$\because$ n बहिष्कोणों का योग $= 360°$ (माना कि भुजाएँ n है)

$\therefore$ $n \times 5° = 360°$

या $n = \dfrac{360}{5} = 72$

उदाहरण 9. क्या ऐसा समबहुभुज बनाया जा सकता है जिसका प्रत्येक अन्तःकोण 115° का हो ? जाँच कीजिए।

हल : $\because$ दिया गया है कि समबहुभुज का प्रत्येक अन्तःकोण
$= 115°$ (यदि हो तो)

$\therefore$ प्रत्येक बहिष्कोण $= 180° - 115° = 65°$

अब माना कि भुजाओं की संख्या n है।

$\because$ एक बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योग $= 4$ समकोण

$\therefore$ n बहिष्कोणों का योग $= 4$ समकोण

$\Rightarrow$ $n \times 65° = 360°$

$\Rightarrow$ $n = \dfrac{360°}{65°} = \dfrac{72}{13} = 5\dfrac{7}{13} \neq$ एक पूर्ण संख्या

अतः 115° प्रत्येक अन्तःकोण वाला एक समबहुभुज नहीं हो सकता।

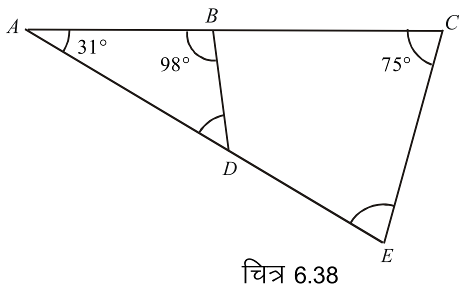
प्रश्नमाला 6.2

1. एक समबहुभुज में 8 भुजाएँ हैं तो
   (i) उसके सभी बहिष्कोणों के माप का योग बताइए।
   (ii) प्रत्येक बहिष्कोण का माप बताइए।
   (iii) सभी अन्तःकोणों के माप का योग ज्ञात कीजिए।
   (iv) प्रत्येक अन्तःकोण का माप ज्ञात कीजिए।
2. एक बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योग 2160° है तो बहुभुज की भुजाएँ कितनी होंगी ? ज्ञात

कीजिए।

3. क्या $137°$ के प्रत्येक अन्तःकोण वाला कोई समबहुभुज हो सकता है ? जाँच कीजिए।

4. नीचे दिए गए चित्र 6.38 में $\angle CED$ तथा $\angle BDE$ ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.38

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. n रेखाखण्डों से घिरी हुई समतलीय आकृति को n भुजा का बहुभुज कहते है। n भुजा के एक बहुभुज में n शीर्ष बिन्दु (या शीर्ष), n अन्तःकोण और n ही भुजाएँ होती हैं।
2. $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ होने के अनुसार बहुभुज के नाम क्रमशः त्रिभुज, चतुर्भुज, पंचभुज, षट्भुज, सप्तभुज और अष्टभुज होते हैं।
3. किसी त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग $180°$ के बराबर होता है।
4. किसी n भुजा के बहुभुज के सभी अन्तः कोणों का योग $(2n - 4)$ समकोण के बराबर होता है।
5. जब किसी बहुभुज में सभी भुजाएँ और सभी कोण बराबर माप के हों तो उसे एक समबहुभुज कहते हैं।
6. n भुजा के एक समबहुभुज का प्रत्येक अन्तःकोण $= \left(\frac{2n-4}{n}\right) \times$ समकोण
7. किसी बहुभुज के सभी बहिष्कोणों का योग $= 360°$
8. n भुजा के एक समबहुभुज का प्रत्येक बहिष्कोण $= \frac{4}{n}$ समकोण

विविध प्रश्नमाला 6

1. यदि किसी त्रिभुज में दो कोण $90°$ एवं $30°$ माप के हों तो तीसरा कोण है :

   (A) $90°$ (B) $30°$ (C) $60°$ (D) $120°$ [ ]

2. एक त्रिभुज के तीनों कोणों के मापों का अनुपात $2:3:4$ है, तो उसके सबसे बडे कोण का माप है :

   (A) $80°$ (B) $60°$ (C) $40°$ (D) $180°$ [ ]

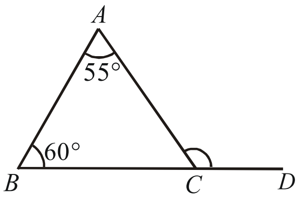
3. एक समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोण का माप है :

   (A) $90°$ (B) $30°$ (C) $45°$ (D) $60°$ [ ]

4. एक चतुर्भुज के चारों कोणों के माप का अनुपात $1:2:3:4$ हो तो उसके सबसे छोटे कोण का माप है

(A) $120°$ (B) $36°$ (C) $18°$ (D) $10°$ [ ]

5. चित्र 6.39 में ΔABC की भुजा BC को बिन्दु D तक बढाया गया है। यदि $\angle A = 55°$ और $\angle B = 60°$ हो तो $\angle ACD$ का माप है :



चित्र 6.39

(A) $120°$ (B) $110°$

(C) $115°$ (D) $125°$ [ ]

6. एक षट्भुज के सभी अन्तःकोणों का योग है :

(A) $720°$ (B) $360°$ (C) $540°$ (D) $1080°$ [ ]

7. एक n भुजा वाले बहुभुज की भुजाओं को एक ही क्रम में बढ़ाने से बने बहिष्कोणों का योग है :

(A) n समकोण (B) $2n$ समकोण

(C) $(2n-4)$ समकोण (D) 4 समकोण [ ]

8. एक समबहुभुज में भुजाओं की संख्याn है तो उसके प्रत्येक अन्तःकोण का माप है

(A) $\frac{360}{n}$ अंश (B) $\left(\frac{2n-4}{n}\right)$ समकोण

(C) n समकोण (D) $2n$ समकोण [ ]

9. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण अन्य दो कोणों के योग के बराबर हो, तो वह त्रिभुज है एक

(A) समद्विबाहु त्रिभुज (B) अधिककोण त्रिभुज

(C) समबाहु त्रिभुज (D) समकोण त्रिभुज [ ]

10. एक त्रिभुज का एक बहिष्कोण $105°$ है तथा उसके दोनों अन्तराभिमुख कोण बराबर हैं। इनमें से प्रत्येक बराबर कोण है

(A) $37\frac{1}{2}^{\circ}$ (B) $52\frac{1}{2}^{\circ}$ (C) $72\frac{1}{2}^{\circ}$ (D) $75°$ [ ]

11. किसी त्रिभुज के कोणों का अनुपात $5:3:7$ है। वह त्रिभुज है एक

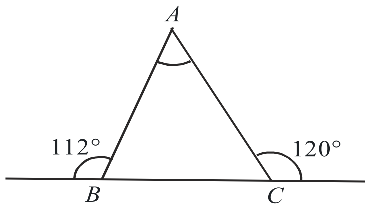
(A) न्यूनकोण त्रिभुज (B) अधिक कोण त्रिभुज

(C) समकोण त्रिभुज (D) समद्विबाहु त्रिभुज [ ]

12. यदि किसी त्रिभुज का एक कोण $130°$ है, तो अन्य दोनों कोणों के समद्विभाजकों के बीच का कोण हो सकता है

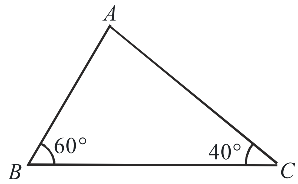
(A) $50°$ (B) $65°$ (C) $145°$ (D) $155°$ [ ]

13. चित्र 6.40 में $\angle A$ का माप बताइए।



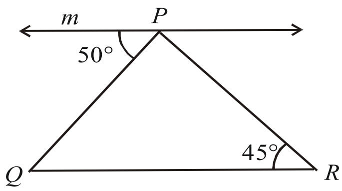
चित्र 6.40

14. चित्र 6.41 में $\angle B = 60°$ और $\angle C = 40°$ है। $\angle A$ का माप बताइए।



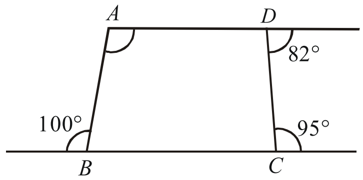
चित्र 6.41

15. चित्र 6.42 में $m \parallel QR$ तो $\angle QPR$ का माप बताइए।



चित्र 6.42

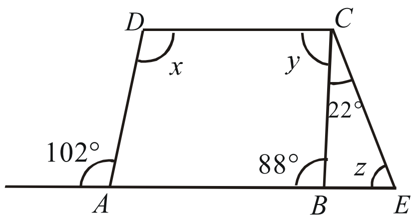
16. चित्र 6.43 में $\angle A$ का माप बताइए।



चित्र 6.43

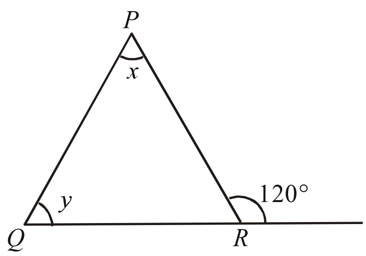
17. एक पंचभुज के चार अन्तः कोण $40°, 75°, 125°$ और $135°$ है तो पाँचवे कोण का माप बताइए।
18. एक समबहुभुज का प्रत्येक बहिष्कोण $45°$ है तो उसकी भुजाओं की संख्या बताइए।
19. एक समबहुभुज में भुजाओं की संख्या 12 है तो उसके प्रत्येक अन्तः कोण का माप बताइए।
20. एक बहुभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल 10 समकोण है तो भुजाओं की संख्या बताइए।
21. क्या $110°$ माप के प्रत्येक अन्तःकोण का कोई एक बहुभुज हो सकता है? जाँच कीजिए।
22. यदि एक ΔABC में $\angle A + \angle B = \angle C$ हो तो ΔABC का सबसे बड़ा कोण ज्ञात कीजिए।

23. एक अष्टभुज के सभी अन्तःकोणों का योगफल ज्ञात कीजिए।
24. एक समदशभुज के प्रत्येक अन्तःकोण का माप ज्ञात कीजिए।
25. एक त्रिभुज की भुजाओं को एक ही क्रम में बढाने से प्राप्त बहिष्कोण क्रमशः$110°, 130°$ एवं $x°$ है, तो $x°$ का मान ज्ञात कीजिए।
26. एक षट्भुज का एक अन्तःकोण $165°$ है और शेष प्रत्येक अन्तःकोण का माप $x°$ है, तो शेष कोण का माप बताइए।
27. चित्र 6.44 में, $AB \parallel DC$ हो तो दिए गए कोणों से $\angle x, \angle y$ तथा $\angle z$ ज्ञात कीजिए।



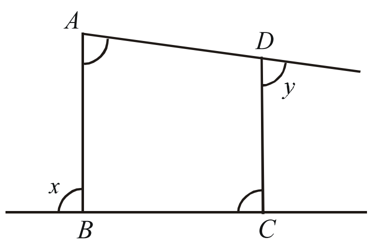
चित्र 6.44

28. दिए गए चित्र 6.45 से $\angle x$ तथा $\angle y$ के माप ज्ञात कीजिए, जहाँ $\angle x - \angle y = 10°$ है।



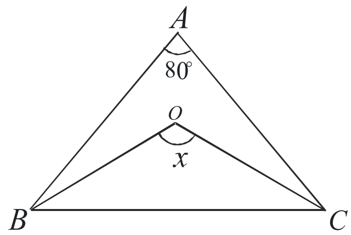
चित्र 6.45

29. एक बहुभुज में दो कोण प्रत्येक एक समकोण है और शेष प्रत्येक कोण$150°$ के बराबर हो तो बहुभुज की भुजाओं की सख्या ज्ञात कीजिए।
30. दिए गए चित्र 6.46 से सिद्ध कीजिए कि $\angle x + \angle y = \angle A + \angle C.$



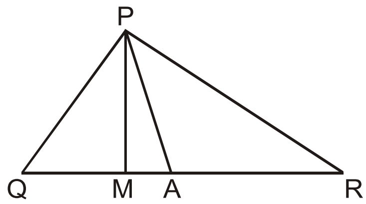
चित्र 6.46

31. दिए गए चित्र 6.47 से, $\angle x$ ज्ञात कीजिए। यहाँ रेखाएँ BO एवं CO क्रमशः $\angle B$ एवं $\angle C$ के समद्विभाजक हैं।



चित्र 6.47

32. चित्र 6.48 में $\angle Q > \angle R$, PA कोण QPR का समद्विभाजक है तथा $PM \perp QR$ है। सिद्ध कीजिए $\angle APM = \frac{1}{2}(\angle Q - \angle R)$



चित्र 6.48

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 6.1

1. $\angle A = 68°, \angle B = 59°, \angle C = 53°$
2. $\angle x = 38°, \angle y = 22°, \angle z = 120°$

4. $\angle x = 116°, \angle y = 32°$ 5. 92° 6. 60°

7. 65° 9. $\angle x = 37°$ व $y = 53°$ 11. 40°, 60°, 80°

प्रश्नमाला 6.2

1. (i) 360° (ii) 45° (iii) 1080° (iv) 135°
2. 14 3. नहीं 4. 74°

विविध प्रश्नमाला 6

1. (C)	2. (A)	3. (D)	4. (B)	5. (C)	6. (A)
7. (D)	8. (B)	9. (D)	10. (B)	11. (A)	12. (D)

13. $\angle A = 52°$ 14. 80° 15. 85° 16. 97 17. 165

18. 8 19. 150° 20. 17 21. नहीं 22. $\angle C$ 23. 1080°

24. 144° 25. 120° 26. 111° 27. $x = 102°, y = 92°, z = 66°$

28. $x = 65°, y = 55°$ 29. 6 30. (B) 31. 140°

अध्याय

7

त्रिभुजों की सर्वांगसमता एवं असमिकाएँ
(Congruence and Inequalities of Triangles)

7.01 प्रस्तावना

पूर्व में आप त्रिभुज एवं त्रिभुजों के गुणधर्मों का अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता, सर्वांगसता के नियमों, त्रिभुजों के कुछ अन्य गुणधर्मों तथा त्रिभुज की असमिकाओं का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

7.02 त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruence of triangles):

आपने कभी एक फोटोग्राफर से स्वयं की एक ही साइज की एक से अधिक फोटों प्रतियाँ अवश्य बनवाई होगी। इसी प्रकार अपनी माँ के हाथों में एक ही माप की चूड़ियाँ तथा एक ही फोटो युक्त डाक टिकिट आदि देखें होंगे। ऐसी सभी आकृतियाँ सर्वांगसम (identical) होती है। आप यदि इनमें से किन्ही दो सर्वसम आकृतियों का चयन करके एक को दूसरे पर रख कर देखेंगे तो, वे एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं।

क्या आप जानते हैं कि ऐसी आकृतियाँ ज्यॉमिति में किस नाम से जानी जाती है? इन्हें सर्वांगसम आकृतियाँ (Congruent figures) कहते हैं।

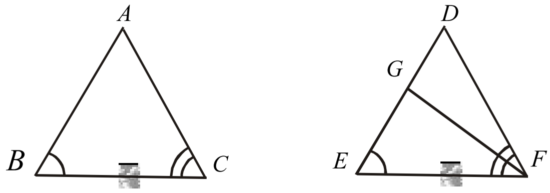
सर्वांगसम का अर्थ है 'सभी प्रकार से समान' अर्थात वे आकृतियाँ जिनका आकार एवं माप समान हो। दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता को दर्शाने के लिए एक अभिगृहीत भुजा कोण भुजा (SAS) का प्रयोग करते हैं।

अभिगृहीत 1 (**SAS**) : यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

प्रमेय 7.1* : कोण–भुजा–कोण नियम (A S A Rule):

यदि एक त्रिभुज के कोई दो कोण और उनकी अन्तरित भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और उनकी अन्तरित भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

दिया है : ABC एवं DEF दो त्रिभुज हैं, जहाँ $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle ACB = \angle DFE$ एवं $BC = EF$ है।



चित्र 7.01

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उपपत्ति : यहाँ दोनों त्रिभुजों ABC एवं DEF की भुजा AB एवं DE की लम्बाई की तुलना करने पर निम्न तीन स्थितियाँ संभव है :

(i) $AB = DE$ (ii) $AB < DE$ एवं (iii) $AB > DE$

स्थिति (i) : यदि $AB = DE$ हो तों ΔABC एवं ΔDEF में

$AB = DE$ (माना)

$\angle ABC = \angle DEF$ (दिया है)

$BC = EF$ (दिया है)

अतः ΔABC एवं ΔDEF भुजा–कोण–भुजा नियम से सर्वांगसम हैं।

अर्थात् $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

स्थिति (ii) : जब $AB < DE$ हो तो भुजा DE पर एक बिन्दु G इस प्रकार लिया कि $AB = GE$ एवं GF को (चित्र 6.01) मिलाया।

ΔABC एवं ΔGEF के लिए

$AB = GE$ (माना)

$BC = EF$ (दिया है)

$\angle ABC = \angle GEF$ (दिया है) $[\because \angle GEF = \angle DEF]$

अर्थात् भुजा –कोण–भुजा नियम से $\Delta ABC \cong \Delta GEF$

अतः $\angle ACB = \angle GFE \quad \ldots(1)$

एवं $\angle ACB = \angle DFE$ (दिया है) $\ldots(2)$

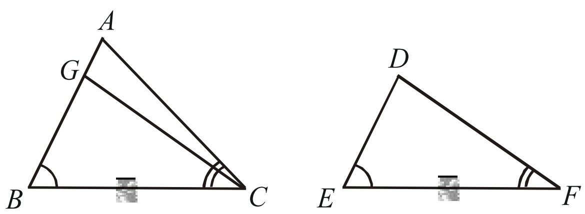
(1) व (2) से $\angle GFE = \angle DFE$ जो तब तक असंभव है जब तक GF, DF के साथ सम्पाती नहीं हो जाये अर्थात्

G एवं D सम्पाती है। $\therefore \quad AB = DE$

अतः भुजा–कोण–भुजा नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta DEF.$

स्थिति (iii) : जब $AB > DE$ हो तो चित्र 7.02 के अनुसार ΔABC में भुजा AB पर एक बिन्दु G इस प्रकार लिया कि $BG = ED$ हो,



चित्र 7.02

यहाँ स्थिति (ii) के अनुसार हम सिद्ध कर सकते है कि बिन्दु G, बिन्दु A के सम्पाती होगा अर्थात् $AB = DE$ और भुजा–कोण– भुजा नियम से $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

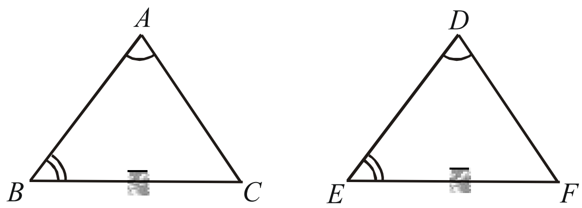
इसलिए सभी तीनों स्थितियों में $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. "इतिसिद्धम्"

टिप्पणी : हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग $180°$ होता हैं, इसलिए जब त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुजों के तीसरे कोण स्वतः ही समान हो जायेंगे। इस नियम के आधार पर निम्न उप प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 7.2 : कोण–कोण–भुजा नियम : (AAS)

यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और संगत भुजा के बराबर हो तो त्रिभुज सर्वांगसम होते है।

दिया है : ΔABC एवं ΔDEF में $\angle B = \angle E; \angle A = \angle D$ एवं भुजा BC =भुजा EF.



चित्र 7.03

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग $180°$ होता है, अतः

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ ...(1)

$\angle D + \angle E + \angle F = 180°$ ...(2)

(1) व (2) से $\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$ ...(3)

दिया है कि $\angle B = \angle E$ $\angle A = \angle D$

अतः $\angle C = \angle F$ [(3) से] ...(4)

अब ΔABC एवं ΔDEF में

$\angle B = \angle E$ (दिया है)

$BC = EF$ (दिया है)

$\angle C = \angle F$ [(4) से]

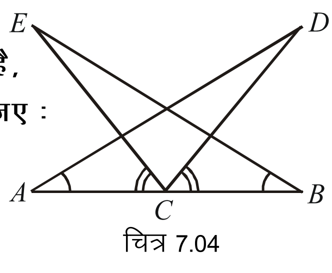
अर्थात् कोण–भुजा–कोण नियम से $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. इतिसिद्धम्।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: चित्र 7.04 में, AB का मध्य बिन्दु C है, $\angle BCD = \angle ACE$ एवं $\angle DAB = \angle EBA$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

(i) $\Delta DAC \cong \Delta EBC$

(ii) $DA = EB$.



चित्र 7.04

हल : दिया है : चित्र 6.04 में

$AC = BC, \ \angle DAB = \angle EBA$ एवं $\angle BCD = \angle ACE$

सिद्ध करना है : (i) $\Delta DAC \cong \Delta EBC$ (ii) $DA = EB.$

उपपत्ति : दिया हुआ है कि C, भुजा AB का मध्य बिन्दु है

अतः $AC = BC$ $\quad \ldots(1)$

एवं $\angle BCD = \angle ACE$ (दिया हुआ है) $\quad \ldots(2)$

दोनों पक्षों में $\angle DCE$ जोड़ने पर

$$\angle BCD + \angle DCE = \angle ACE + \angle DCE$$

या $\angle ECB = \angle DCA$ $\quad \ldots(3)$

अब ΔDAC एवं ΔEBC में

$\angle DAC = \angle EBC$ (दिया हुआ है)

$AC = BC$ $\left[(1) \text{ से}\right]$

$\angle DCA = \angle ECB$ $\left[(3) \text{ से}\right]$

$\because$ कोण–भुजा–कोण गुणधर्म से

$\Delta DAC \cong \Delta EBC$

एवं सर्वांगसमता गुणधर्म से दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होती हैं।

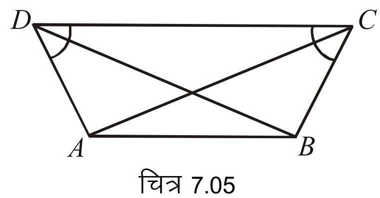
अतः $DA = EB$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 2: चित्र 7.05 में, एक चतुर्भुज *ABCD* में $BC = AD$ एवं $\angle ADC = \angle BCD$ हो, तो सिद्ध कीजिए :

(i) $AC = BD$ (ii) $\angle ACD = \angle CDB.$

हल : चित्र 6.05 के अनुसार दिया हुआ है कि

$BC = AD$ एवं $\angle ADC = \angle BCD$



चित्र 7.05

अतः ΔADC एवं ΔBCD में

$AD = BC$ (दिया है)

$CD = CD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ADC = \angle BCD$ (दिया है)

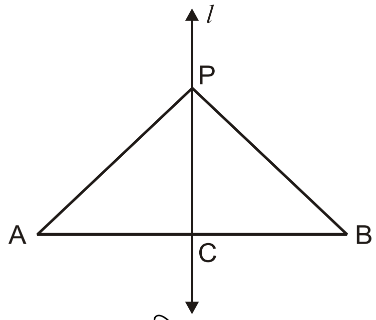
अतः भुजा–कोण–भुजा से $\Delta ADC \cong \Delta BCD$ है।

अतः संगत भुजाएँ एवं संगत कोण समान होंगे

अर्थात् $AC = BD$ एवं $\angle ACD = \angle CDB.$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 3: AB एक रेखाखंड है और रेखा ℓ इसका लम्ब समद्विभाजक है। यदि ℓ पर स्थित कोई बिन्दु P है, तो दर्शाइए कि P, बिन्दुओं A और B से समदूरस्थ (equidistant) है।

हल : AB एक रेखाखण्ड है और AB के मध्य–बिन्दु C से होकर जाती है (देखिए चित्र 7.06)। आपको दर्शाना है कि $PA = PB$ है। इसके लिए ΔPCA और ΔPCB पर विचार कीजिए। हमें प्राप्त है:



चित्र 7.06

$AC = BC$ (C, AB का मध्य–बिन्दु है)

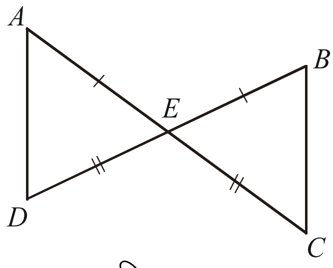
$\angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$ (दिया है)

$PC = PC$ (उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta PCA \cong \Delta PCB$ (SAS नियम)

इसलिए, $PA = PB$ (सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ) ''इतिसिद्धम्''

उदाहरण 4: चित्र 7.07 में, $AE = EC$ एवं $DE = BE$ हो, तो सिद्ध कीजिए :
(i) $\Delta AED \cong \Delta CEB$ (ii) $\angle A = \angle C$.



चित्र 7.07

हल : चित्र 7.07 के अनुसार दिया हुआ है कि

$AE = EC$

$DE = BE \quad \ldots(1)$

अब ΔAED एवं ΔBEC के लिए

$AE = EC$ (दिया है)

$\angle AED = \angle CEB$ (सम्मुख कोण)

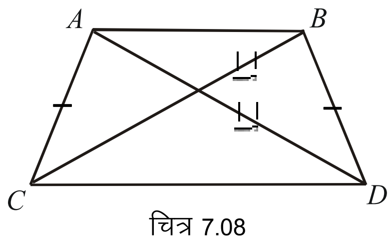
$DE = EB$ (दिया है)

अतः भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta AED \cong \Delta CEB$ है एवं इनके संगत कोण $\angle A = \angle C$ एवं $\angle D = \angle B$ होंगे। "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 5: चित्र 7.08 मे, $AD = BC$ एवं $BD = CA$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\angle ADB = \angle BCA$

(ii) $\angle DAB = \angle CBA$.



चित्र 7.08

हल : प्रश्नानुसार $AD = BC$ एवं $BD = CA$ है

अतः ΔABD एवं ΔABC में

$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ BD = CA \end{array}\right\}$ (दिया हुआ है)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः भुजा–भुजा–भुजा गुणधर्म से

$\Delta ABD \cong \Delta ABC$

अतः संगत कोण

$\angle ADB = \angle BCA$ एवं $\angle DAB = \angle CBA$ "इतिसिद्धम्"।

प्रश्नमाला 7.1

1. त्रिभुजों ABC और PQR में $\angle A = \angle Q$ और $\angle B = \angle R$ है। ΔPQR की कौन सी भुजा ΔABC की भुजा AB के बराबर होनी चाहिए कि दोनों त्रिभजु सर्वांगसम हों? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

2. त्रिभुजों ABC और PQR में $\angle A = \angle Q$ और $\angle B = \angle R$ है। $\Delta\, PQR$ की कौन–सी भुजा $\Delta\, ABC$ की भुजा BC के बराबर होनी चाहिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हों? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

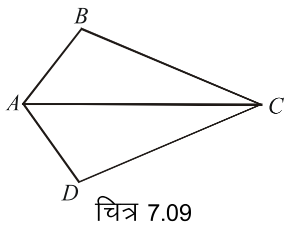
3. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और एक कोण के बराबर हों, तो दोनो त्रिभुज अवश्य की सर्वांगम होने चाहिए।'' क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

4. ''यदि किसी त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा के बराबर हों, तो त्रिभुज अवश्य ही सर्वांगम होने चाहिए।'' क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

5. $\Delta\, ABC \cong \Delta RPQ$ दिया हुआ है। क्या यह कहना सत्य है कि $BC = QR$ है? क्यों?

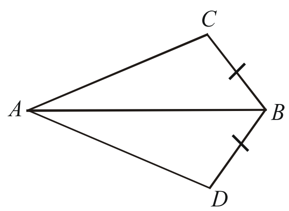
6. यदि $\Delta PQR \cong \Delta EDF$ है, तो यह कहना सत्य है कि $PR = EF$ है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

7. चित्र 7.09 में चतुर्भुज $ABCD$ का विकर्ण AC शीर्ष कोण A एवं C का समद्विभाजक हो, तो सिद्ध कीजिए : $AB = AD$ एवं $CB = CD$.



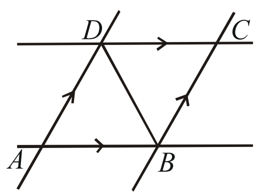
चित्र 7.09

8. चित्र 7.10 में चतुर्भुज $ADBC$ के $\angle ABC = \angle ABD$ एवं $BC = BD$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta\, ABC \cong \Delta\, ABD$.



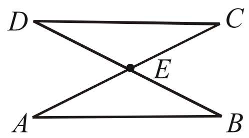
चित्र 7.10

9. चित्र 7.11 के अनुसार, $AB \quad DC$ एवं $AD \quad BC$ हो, तो सिद्ध कीजिए : $\Delta\, ADB \cong \Delta\, CBD$.



चित्र 7.11

10. चित्र 7.12 में, यदि AB DC एवं E भुजा AC का मध्यबिन्दु हो, तो सिद्ध कीजिए कि E, भुजा BD का मध्य बिन्दु होगा।



चित्र 7.12

7.03 त्रिभुज के विशेष गुणधर्म

पिछले अनुच्छेद में आपने त्रिभुज की सर्वांगसता की दो कसौटियों का अध्ययन किया हैं। अब इनके परिणामों का उपयोग समद्विबाहु त्रिभुज सम्बन्धित प्रमयों एवं त्रिभुज की सर्वांगसमता की शेष प्रमेयों को सिद्ध करने के लिए करेंगे।

7.04 समद्विबाहु त्रिभुजः

एक त्रिभुज समद्विबाहू त्रिभुज कहलाता है, यदि इसकी दो भुजाएँ समान हो।

प्रमेय 7.3* :

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हों, तो उनके सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

या

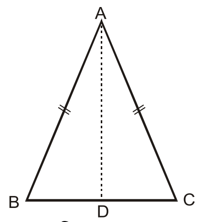
एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते है।

दिया है : $\Delta\, ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है,

जहाँ $AB = AC$ है।

सिद्ध करना है : $\angle B = \angle C$

रचना : $\angle A$ का अर्धक AD खींचा जो BC को D पर मिला।



चित्र 7.13

उपपत्ति : $\Delta\, ABD$ एवं $\Delta\, ACD$ में

$AB = AC$ (दिया है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (रचना से)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

भुजा – कोण–भुजा गुणधर्म से, $\Delta\, ABD \cong \Delta\, ACD$

अतः संगत कोण $\angle B = \angle C$ "इतिसिद्धम्" ।

प्रमेय 7.4 :

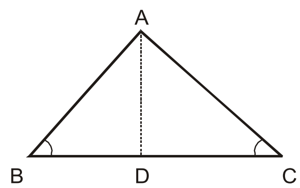
यदि किसी त्रिभुज में दो कोण बराबर हों, तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होंगी।

दिया है : $\Delta\, ABC$

जिसमें $\angle B = \angle C$ है।

सिद्ध करना है : $AB = AC$

रचना : $\angle BAC$ का समद्विभाजक AD खींचा।



चित्र 7.14

उपपत्ति : $\Delta\ ABD$ एवं $\Delta\ ACD$ में

$\angle B = \angle C$ (दिया है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle BAD = \angle CAD$ (रचना से)

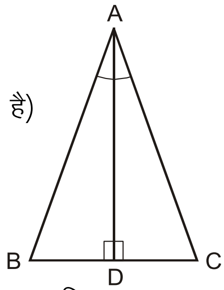
कोण–भुजा–कोण गुणधर्म से

$\Delta\ ABD \cong \Delta\ ACD$

अतः संगत भुजाएँ $AB = AC$ "इतिसिद्धम्" ।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 6: ΔABC में $\angle A$ का समद्विभाजक AD भुजा BC पर लम्ब है। दर्शाइए ΔABC एक समद्विबाहू त्रिभुज है।



चित्र 7.15

हलः ΔABD वं ΔACD में

$\angle BAD = \angle CAD$ ($\angle A$ का समद्विभाजक AD है, दिया हुआ है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

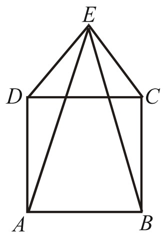
$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ (दिया हुआ है)

अतः $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA नियत से)

इसलिए $AB = AC$

इस कारण ΔABC समद्विबाहु है।

उदाहरण 7: चित्र 7.16 के अनुसार *ABCD* एक वर्ग हैं तथा ΔCDE एक समबाहु हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AE = BE$.



चित्र 7.16

हल : दिया है : $ABCD$ एक वर्ग है एवं $\Delta\ CDE$ एक समबाहु त्रिभुज है।

सिद्ध करना है : $AE = BE$

उपपत्ति : $\Delta\ CDE$ एक समबाहु त्रिभुज है।

अतः $CD = DE = CE \quad \ldots (1)$

$\angle DEC = \angle EDC = \angle DCE = 60^\circ \quad \ldots (2)$

एवं $ABCD$ एक वर्ग है अतः

$\angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$

दोनों पक्षों में $\angle EDC$ जोड़ने पर

$\angle ADC + \angle EDC = \angle BCD + \angle EDC$

$\Rightarrow \quad \angle EDA = \angle ECB \quad \ldots (3)$

अब $\Delta\ ADE$ एवं $\Delta\ BCE$ में,

$AD = BC$ (वर्ग की भुजाएँ)

$\angle EDA = \angle ECB$ [(3) से]

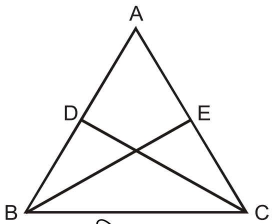
$DE = EC$ [(1) से]

अर्थात् भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta ADE \cong \Delta BCE$.

अतः संगत भुजाएँ $AE = BE$ "इतिसिद्धम्"

उदाहरण 8: सिद्ध कीजिए कि समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाओं को समद्विभाजित करने वाली माध्यिकाएँ समान होती हैं।

हल : दिया है : एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में समान भुजाओं AB एवं AC के मध्य बिन्दु D एवं E हैं।



चित्र 7.17

सिद्ध करना है : $BE = CD$

उपपत्ति : ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ AB एवं AC समान है।

$AB = AC$ ... (1)

एवं $\angle ABC = \angle ACB$ ... (2)

एवं D एवं E भुजा AB एवं AC के मध्यबिन्दु है।

अतः $DB = DA = EC = AE$ ... (3)

अब ΔBCD एवं ΔBCE में,

$BC = BC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle DBC = \angle ECB$ [(2) से]

$BD = CE$ [(3) से]

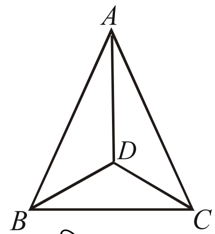
अर्थात् भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta BCD \cong \Delta BCE$ हैं।

अतः संगत भुजाएँ समान होंगी

$BE = CD$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 9: चित्र 7.18 में, $AB = AC$ हैं, एवं ΔABC में D एक ऐसा बिन्दु है कि $\angle DBC = \angle DCB$. सिद्ध कीजिए कि $\angle BAC$ को AD समद्विभाजित करता है।

हल : दिया है : ΔABC में $AB = AC$ एवं $\angle DBC = \angle DCB$.



चित्र 7.18

सिद्ध करना है : AD कोण BAC का समद्विभाजक है।

अर्थात् $\angle BAD = \angle CAD$

उपपत्ति : ΔBDC में $\angle DBC = \angle DCB$ है अतः इनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होगी।

अतः $CD = BD$ ... (1)

अब ΔABD एवं ΔACD में

$BD = CD$ [(1) से]

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AB = AC$ (दिया है)

अर्थात् भुजा–भुजा–भुजा गुणधर्म से $\Delta ABD \cong \Delta ACD$.

अतः संगत कोण समान होंगे $\angle BAD = \angle CAD$.

अतः $AD, \angle BAC$ का समद्विभाजक है। "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 10: यदि एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरी दो भुजाओं पर डाले गये लम्ब समान हो, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा।

हल : दिया है : ΔABC की भुजा BC का मध्य बिन्दु D हैं, एवं DE और DF क्रमशः AC एवं AB पर लम्ब है एवं $DE = DF$.

सिद्ध करना है : ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, अर्थात् $AB = AC$

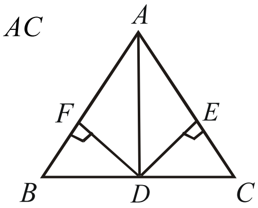
रचना : AD को मिलाया।

उपपत्ति : $\Delta\, BDF$ एवं $\Delta\, CDE$ में,

कर्ण $BD =$ कर्ण CD (दिया है)

$\angle DFB = \angle DEC = 90°$

एवं $DF = DE$ (दिया है)



चित्र 7.19

अर्थात् समकोण – कर्ण – भुजा गुणधर्म से

$\Delta\, BDF \cong \Delta\, CDE.$

अतः संगत कोण $\angle B = \angle C$ होंगे, एवं दोनों कोणों की सम्मुख भुजाएँ भी समान होंगी, अर्थात् $AB = AC$.

"इतिसिद्धम्" ।

उदाहरण 11: एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC में $AB = AC$ हो, एवं भुजा BC, AC एवं AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E, F हो, तो सिद्ध कीजिए कि $DE = DF$.

हल : चित्र 7.20 के अनुसार, $\Delta\, ABC$ में

$AB = AC \quad \ldots(1)$

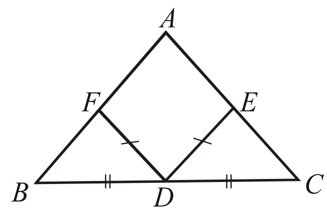
एवं D, E, F भुजाओं के मध्य बिन्दु है

अतः $\Delta\, BDF$ एवं $\Delta\, CDE$ में

$BD = CD$ [D भुजा BC का मध्य बिन्दु है]

$CE = BF$ [दिया है कि $AB = AC$]

एवं $\angle B = \angle C$ [समान भुजाओं के सामने के कोण]



चित्र 7.20

अतः भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से

$\Delta\, BDF \cong \Delta\, CDE$

अतः $DE = DF$

उदाहरण 12: चित्र 7.21 में, ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका कोण B समकोण इस प्रकार है कि $\angle BCA = 2\angle BAC$ है। दर्शाइए कि कर्ण $AC = 2\,BC$ है।

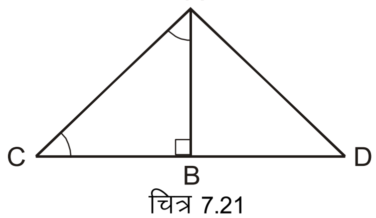
हल : CB को बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाइए कि $BC = BD$ हो तथा AD को मिलाइए।

ΔABC और ΔABD में,

$BC = BD$ (रचना से)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle ABC = \angle ABD$ (प्रत्येक 90^0 है)



चित्र 7.21

इसलिए$\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (SAS)

अतः, $\angle CAB = \angle DAB$ (1)

और $AC = AD$ (2)

इस प्रकार, $\angle CAD = \angle CAB + \angle BAD = 2\angle CAB$ [(1) से] (3)

परन्तु $\angle ACB = 2\angle CAB$ अर्थात् $\angle CAD = 2\angle ACB$ (4)

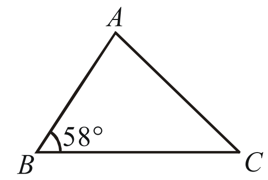
तथा $\angle ACD = \angle ADB$ (5)

अर्थात् ΔACD एक समबाहु त्रिभुज है। [(3) और (4) से]

अर्थात् $AC = CD$, या $AC = 2\,BC$ (क्योंकि $BC = BD$) ''इतिसिद्धम्''।

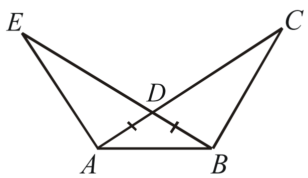
प्रश्नमाला 7.2

1. चित्र 7.22 में, $AB = AC$ एवं $\angle B = 58°$ हो तो $\angle A$ का मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 7.22

2. चित्र 7.23 में, $AD = BD$ एवं $\angle C = \angle E$ हो, तो सिद्ध कीजिए $BC = AE$.

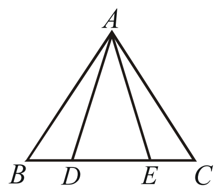


चित्र 7.23

3. यदि एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC की माध्यिका AD हो तथा $\angle A = 120°$ एवं $AB = AC$ हो, तो $\angle ADB$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि त्रिभुज के किसी कोण का सम द्विभाजक सम्मुख भुजा को भी समद्विभाजित करता है, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु होगा।

5. चित्र 7.24 में, $AB = AC$ एवं $BE = CD$ हो, तो सिद्ध कीजिए $AD = AE$.

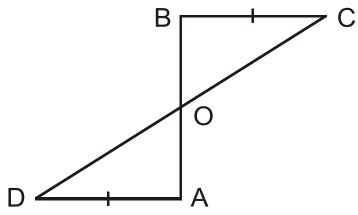


चित्र 7.24

6. एक वर्ग $ABCD$ की भुजाओं AD एवं BC पर क्रमशः E एवं F दो बिन्दु इस प्रकार है कि $AF = BE$ तो सिद्ध कीजिए कि

   (i) $\angle BAF = \angle ABE$ (ii) $BF = AE$

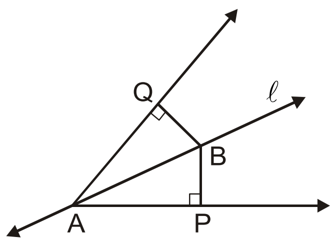
7. एक रेखाखंड AB पर AD और BC दो बराबर लंब रेखाखंड हैं (देखिए चित्र 7.25)। दर्शाइए कि CD, रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है।



चित्र 7.25

8. $AB = AC$ वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। BO को एक बिन्दु M तक बढ़ाया जाता है। सिद्ध कीजिए $\angle MOC = \angle ABC$ है।

9. रेखा ℓ कोण A को समद्विभाजित करती है और B रेखा ℓ पर स्थित कोई बिन्दु है। BP और BQ कोण A की भुजाओं पर B से डाले गए लम्ब हैं (देखिए चित्र 7.26)। दर्शाइए कि

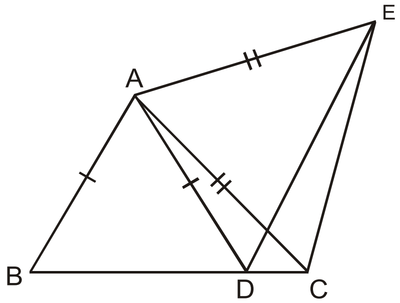


चित्र 7.26

(i) $\Delta APB \cong \Delta AQB$

(ii) $BP = BQ$ है, अर्थात् बिन्दु B कोण की भुजाओं से समदूरस्थ है

11. चित्र 7.27 में, $AC = AE, AB = AD$ और $\angle BAD = \angle EAC$ है। दर्शाइए कि $BC = DE$ है।



चित्र 7.27

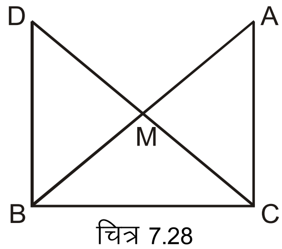
12. एक समकोण त्रिभुज ABC में, जिसमें कोण C समकोण है, M कर्ण AB का मध्य–बिन्दु है। C को M से मिलाकर D तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि DM = CM है। बिन्दु D को बिन्दु B से मिला दिया जाता है (देखिए आकृति 7.28)। दर्शाइए कि

(i) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

(ii) $\angle DBC$ एक समकोण है

(iii) $\Delta DBC \cong \Delta ACB$

(iv) $CM = \frac{1}{2} AB$



चित्र 7.28

7.05 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए कुछ और कसौटियाँ:

एक त्रिभुज के तीनों कोणों से दूसरे त्रिभुज के तीनों कोण बराबर होने पर दोनों त्रिभुजों का सर्वांगसम होना आवश्यक नहीं है।

आपके अनुसार क्या एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर होने पर दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे? निःसन्देह दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

आइए अब हम अब तक प्राप्त परिणामों का प्रयोग करके इस प्रमेय को भी सिद्ध करते है।

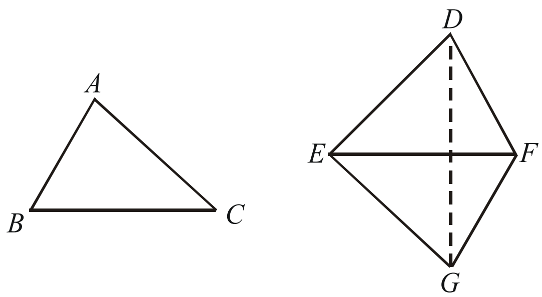
प्रमेय 7.5* : भुजा–भुजा–भुजा नियम (S S S Rule):

यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हों, तो दोनो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

दिया है : ΔABC एवं ΔDEF की संगत भुजाएँ समान है

अर्थात् $AB = DE; BC = EF$ एवं $AC = DF$

सिद्ध करना है : $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



चित्र 7.29

रचना : ΔDEF के दूसरी ओर रेखा खण्ड EG इस प्रकार खींचा कि $EG = AB$ हो एवं $\angle ABC = \angle FEG$ हो। GF एवं DG को मिलाया।

उपपत्ति : ΔABC एवं ΔGEF में,

$AB = GE$ (रचना से)

$\angle ABC = \angle GEF$ (रचना से)

$BC = EF$ (दिया है)

अर्थात् भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, ABC \cong \Delta\, GEF$ है,

अतः दोनों भुजाओं के संगत कोण एवं संगत भुजा समान हैं

$$\angle A = \angle G; \quad AB = GF \qquad \ldots(1)$$

अब $AB = EG$ (रचना से) एवं $AC = DF$ (दिया है)

अतः $EG = DE$ $\ldots(2)$

इसी प्रकार $AC = GF$ समीकरण (1) से एवं $AC = DF$ (दिया है)

अतः $GF = DF$ $\ldots(3)$

अर्थात् $\Delta\, EDG$ में समान भुजाओ EG एवं DE के सम्मुख कोण समान होंगे,

$$\angle EDG = \angle EGD \qquad \ldots(4)$$

इसी प्रकार $\Delta\, FDG$ में भी समान भुजाओं GF एवं DF के सम्मुख कोण समान होंगे,

$$\angle GDF = \angle DGF \qquad \ldots(5)$$

(4) व (5) से

$$\angle EDG + \angle GDF = \angle EGD + \angle DGF$$

$$\Rightarrow \quad \angle D = \angle G \qquad \ldots(6)$$

परन्तु समीकरण (1) से

$$\angle A = \angle G \qquad \ldots(7)$$

अर्थात् (6) व (7) से

$$\angle A = \angle D \qquad \ldots(8)$$

अतः $\Delta\, ABC$ एवं $\Delta\, DEF$ के लिए

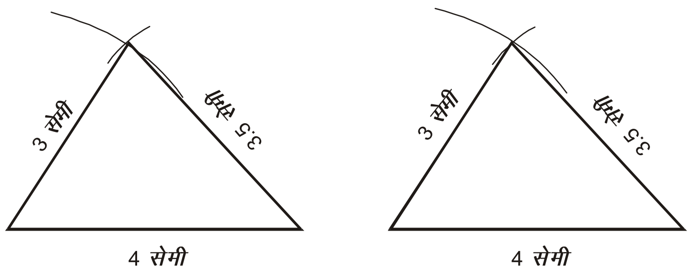
$AB = DE$ (दिया है)

$\angle A = \angle D$ [(8) से]

$AC = DF$ (दिया है)

अतः भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$. इतिसिद्धम्।

अब इस प्रमेय को क्रिया कलाप द्वारा हम निम्नानुसार सत्यापित करने का भी प्रयत्न करते हैं। 4 सेमी, 3.5 सेमी एवं 3 सेमी भुजाओं को लेकर दो त्रिभुजों की रचना चित्रानुसार करते है।



चित्र 7.30

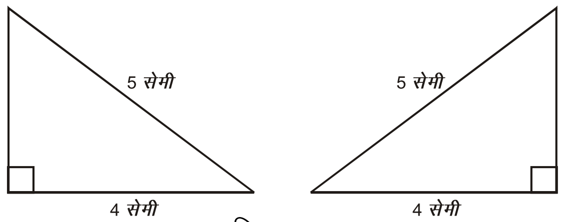
अब इन्हें काट कर एक दूसरे पर रखिए। आप क्या देखते हैं? यदि बराबर भुजाओं का ध्यान रख कर एक को दूसरे पर रखते हैं तो एक त्रिभुज दूसरे त्रिभुज को ढक लेता है। यह तभी सम्भव है जब दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हो।

अर्थात्– दोनों त्रिभुज सर्वांगसम ही है।

आप SAS सर्वांगसमता नियम में पहले ही देख चुके हैं कि बराबर कोणों के युग्म संगत बराबर भुजाओं के युग्मों के बीच में (अंतर्गत) होने चाहिए और यदि ऐसा नहीं हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं भी हो सकते हैं।

आइए निम्न क्रिया कलाप करके देखते हैं।

दो समकोण त्रिभुज ऐसे खींचिए जिनमें प्रत्येक का कर्ण 5 सेमी और एक भुजा 4 cm की हो (देखिए चित्र 7.31)



चित्र 7.31

इन्हें काटिए और एक दूसरे पर इस प्रकार रखिए कि इनकी बराबर भुजाएँ एक दूसरे पर आएँ। यदि आवश्यक हो, तो त्रिभुजों को घुमाइए। आप क्या देखते हैं?

आप देखते हैं कि दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं और इसीलिए ये सर्वांगसम हैं। यदि क्रियाकलाप समकोण त्रिभुजों के अन्य युग्म लेकर दोहराइए। आप क्या दखते हैं?

आप पाएँगे कि दोनों समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होंगे, यदि उनके कर्ण बराबर हों और भुजाओं का एक युग्म बराबर हो।

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में समकोण कर्ण एवं भुजा के अंतर्गत कोण नहीं है।

इस प्रकार, आप समकोण त्रिभुजों के लिए एक महत्वपूर्ण तथ्य पर पहुँच गए है जिसे प्रमेय के रूप में लिखकर सत्यापित करते है।

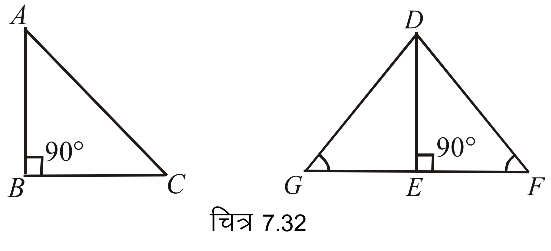
प्रमेय 7.6 (RHS सर्वांगसम नियम): यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

(ध्यान दीजिए कि यहाँ RHS समकोण (Right angle)– कर्ण (Hypotenuse)-भुजा (side) को दर्शाता है।)

दिया है : दो समकोण त्रिभुज ABC एवं $\Delta\, DEF$ में $\angle B = \angle E = 90^\circ$ है,

कर्ण AC = कर्ण DF

एवं भुजा AB = भुजा DE.



चित्र 7.32

सिद्ध करना है : $\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$

रचना : $\Delta\, DEF$ में E को G तक आगे इस प्रकार बढ़ाया कि $GE = BC$ हो एवं G को D से मिलाया।

उपपत्ति : यहाँ $\angle DEF = 90°$ हैं

अतः $\angle DEG = 90°$ होगा। … (1)

अब $\Delta\, ABC$ एवं $\Delta\, DEG$ में,

$AB = DE$ (दिया है)

$BC = GE$ (रचना से)

$\angle ABC = \angle DEG = 90°$ [(1) से]

अर्थात् भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, ABC$ एवं $\Delta\, DEG$ सर्वांगसम है, अतः इनके संगत कोण एवं संगत भुजाएँ बराबर होंगे

अतः $AC = DG$ एवं $\angle C = \angle G$ … (2)

परन्तु दिया हुआ है कि $AC = DF$ … (3)

(2) व (3) से $DG = DF$ … (4)

$\because \Delta\, DGF$ में समान भुजाओं $(DG = DF)$ के सम्मुख कोण समान होगे

अतः $\angle G = \angle F$ … (5)

(2) व (5) से $\angle C = \angle F$ … (6)

अब $\Delta\, ABC$ एवं $\Delta\, DEF$ में,

$AB = DE$ (दिया है)

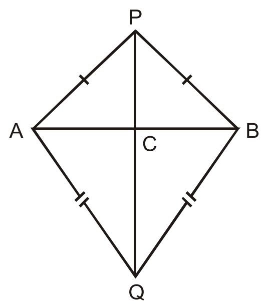
$\angle C = \angle F$ [(6) से]

एवं $\angle ABC = \angle DEF = 90°$ (दिया है)

अर्थात् कोण–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta\, ABC$ एवं $\Delta\, DEF$ सर्वांगसम है। "इतिसिद्धम्" ।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 13: AB एक रेखाखंड है तथा बिन्दु P और Q इस रेखाखंड AB के विपरीत ओर इस प्रकार स्थित हैं कि इनमें से प्रत्येक A और B से समदूरस्थ है (देखिए चित्र 7.33)। दर्शाइए कि रेखा PQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।



चित्र 7.33

हल : यहाँ PA = PB और QA = QB दिया हुआ है। हमें दर्शाना है कि $PQ \perp AB$ है और PQ रेखाखंड AB को समद्विभाजित करती है। मान लीजिए रेखा PQ रेखाखंड AB को C पर प्रतिच्छेद करती है।क्या आप इस आकृति में दो सर्वांगम त्रिभुजों को देख सकते हैं?

आइए Δ PAQ और Δ PBQ लें।

इन त्रिभुजों में,

$AP = BP$ (दिया है)

$AQ = BQ$ (दिया है)

$PQ = PQ$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः, $\Delta PQA \cong \Delta PBQ$ (SSS नियम)

इसलिए, $\angle PAQ = \angle BPQ$

अब ΔPAC और ΔPBC को लीजिए। आपको प्राप्त हैः

$AP = BP$ (दिया है)

$\angle APC = \angle BPC$ ($\angle APQ = \angle BPQ$ ऊपर सिद्ध किया है)

$PC = PC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः, $\Delta PAC \cong \Delta PBC$

और $\angle ACP = \angle BCP$

एवं $AC = CB$ ...(i)

साथ ही, $\angle ACP + \angle BCP = 180^{\circ}$ (रैखिक युग्म)

इसलिए, $2\angle ACP = 180^{\circ}$

या, $\angle ACP = 90^{\circ}$ ...(2)

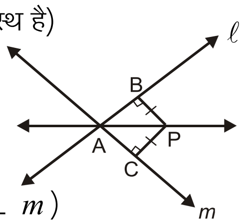
(1) और (2) से, आप निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि रेखाPQ रेखाखंड AB का लम्ब समद्विभाजक है।

ध्यान दीजिए कि ΔPAQ और ΔPBQ की सर्वांगसमता दर्शाए बिना, आप यह नहीं दिखा सकते कि $\Delta PAC = PBC$ है, यद्यपि $AP = BP$ (दिया है), $PC = PC$ (उभयनिष्ठ) और $\angle PAC = \angle PBC$ (ΔPAB में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण) है। यह इस कारण है कि इससे हमेंSSA नियम प्राप्त होता है, जो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए सदैव मान्य नहीं है। साथ ही, कोण बराबर भुजाओं के अंतर्गत नहींहै।

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 14: बिन्दु A पर प्रतिच्छेद करने वाली दो रेखाओं ℓ और m से समदूरस्थ एक बिन्दु P है (देखिए चित्र 7.34)। दर्शाइए कि रेखा AP दोनों रेखाओं के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है।

हल : आपको दिया है कि रेखाएँ ℓ और m परस्पर A पर प्रतिच्छेद करती हैं। मान लीजिए $PB \perp \ell$ और $PC \perp m$ है। यह दिया है कि $PB = PC$ है। ($\because$ P, ℓ व m से समदूरस्थ है)



चित्र 7.34

आपको दर्शाना है कि $\angle PAB = \angle PAC$ है।

अब, ΔPAB और ΔPAC में,

$PB = PC$ (दिया है)

$\angle PBA = \angle PCA = 90^{\circ}$ ($PB \perp \ell$ एवं $PC \perp m$)

$PA = PA$ (कर्ण उभयनिष्ठ)

अतः $\Delta PAB \cong \Delta PAC$ (RHS नियम)

इसलिए, $\angle PAB = \angle PAC$

प्रश्नमाला 7.3

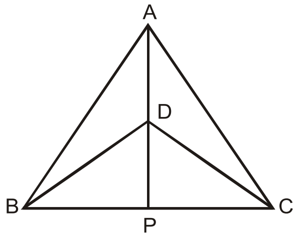
1. ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर बने दो समद्विबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि A और D भुजा BC के एक ही ओर स्थित हैं (देखिए चित्र 7.35)। यदि AD बढ़ाने पर BC को P पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि

    (i) $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

    (ii) $\Delta ABP \cong \Delta ACP$

    (iii) AP कोण A और कोण D दोनों को समद्विभाजित करता है।

    (iv) AP रेखाखंड BC का लम्ब समद्विभाजक है।



चित्र 7.35

2. AD एक समद्विभाबहु त्रिभुज ABC का एक शीर्षलम्ब है, जिसमें $AB = AC$ है। दर्शाइए कि

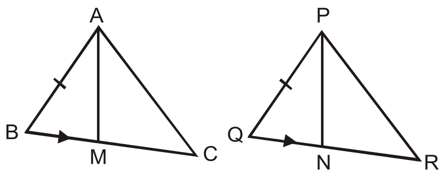
    (i) AD रेखाखंड BC को समद्विभाजित करता है।

    (ii) AD कोण A को समद्विभाजित करता है।

3. एक त्रिभुज ABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा माध्यिका AM क्रमशः एक दूसरे त्रिभुज की भुजाओं PQ और QR तथा माध्यिका PN के बराबर हैं (देखिए चित्र 7.36)। दर्शाइए कि

    (i) $\Delta ABM \cong \Delta PQN$

    (ii) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$



चित्र 7.36

4. BE और CF एक त्रिभुज ABC के दो बराबर शीर्षलम्ब हैं। RHS सर्वांगसमता नियम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

5. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है। $AP \perp BC$ खींच कर दर्शाइए कि $\angle B = \angle C$ है।

7.06 एक त्रिभुज की असमिकाएँ:

पिछले अध्याय में आपने सरल रेखीय आकृतियाँ के अन्तर्गत त्रिभुज की भुजाओं के आधार पर विषम बाहु त्रिभुज, सम द्विबाहु त्रिभुज तथा समबाहुत्रिभुज और कोणों के आधार पर न्यूनकोण त्रिभुज, समकोण त्रिभुज एवं अधिक कोण त्रिभुज के बारे में संक्षिप्त जानकारी प्राप्त की है।

क्या आपने कभी यह सोचा है, कि त्रिभुज की भुजाओं के माप बदलने पर उसके कोणों के माप भी बदल जाते है और यदि त्रिभुज के कोणों के माप बदलें तो भुजाओं के माप भी बदल जाते है। क्यों?

आइए अब हम निम्न क्रिया कलापों और प्रमेयों के माध्यम से इन्हें समझने का प्रयन्त करते है

प्रमेय 7.7*

यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हों, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण छोटी भुजा के सामने के कोण से बड़ा होता है।

दिया है : त्रिभुज ABC में $AB > AC$

सिद्ध करना है : $\angle C > \angle B$

रचना : शीर्ष C से CD रेखा इस प्रकार खींची कि $AC = AD$ हो।

उपपत्ति : रचना से $\Delta\, ACD$ में भुजा $AC = AD$ समान है अतः इनके सम्मुख कोण भी समान होंगे।

अतः $\angle ACD = \angle ADC \quad \ldots(1)$

$\because \ \angle ADC$ त्रिभुज BDC का बहिष्कोण है

अतः $\angle ADC > \angle B \quad \ldots(2)$

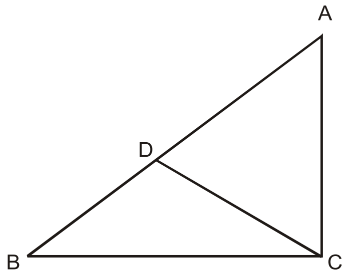
(1) व (2) से $\angle ACD > \angle B \quad \ldots(3)$

चित्र से $\angle ACB > \angle ACD \quad \ldots(4)$

(3) व (4) से $\angle ACB > \angle ACD > \angle B$

$\Rightarrow \quad \angle ACB > \angle B$

अर्थात् $\angle C > \angle B.$



चित्र 7.37

प्रमेय 7.8 (प्रमेय 7.7 का विलोम)

किसी त्रिभुज में बड़े कोण की सम्मुख भुजा छोटे कोण की सम्मुख भुजा से बड़ी होती है।

दिया है : त्रिभुज ABC में $\angle B > \angle C$

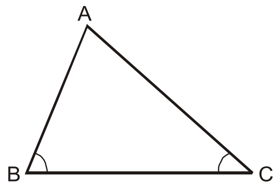
सिद्ध करना है : $AC > AB$

उपपत्ति : $\Delta\, ABC$ की भुजा AC एवं AB के लिए निम्नलिखित तीन संभावनाएँ हो सकती हैं जिनमें से केवल एक ही संभव है :

(i) $AC = AB$

(ii) $AC < AB$ एवं

(iii) $AC > AB$



चित्र 7.38

स्थिति (i) : जब $AC = AB$ हो ,

यदि $AC = AB$ हो तो $\Delta\, ABC$ में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होंगे अर्थात् $\angle B = \angle C$ जो कि असंभव है क्योंकि दिया हुआ है कि $\angle B > \angle C.$

अतः $AC \neq AB.$

स्थिति (ii) : जब $AC < AB$ हो,

हम जानते हैं कि बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा होता है

अतः $AC < AB \quad \Rightarrow \quad \angle C < \angle B$

जो दिये गये तथ्य का विरोधाभासी है अतः $AC \not< AB.$

स्थिति (iii) : जब $AC > AB$ हो,

अब हमारे पास केवल तीसरी संभावना शेष है जो अवश्य सत्य होगी, अर्थात्

$AC > AB.$ "इतिसिद्धम्"

प्रमेय 7.9* :

किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग उसकी तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

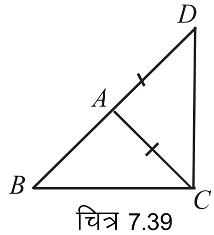
दिया है : एक त्रिभुज ABC है।

सिद्ध करना है :

(i) $AB+BC>AC$

(ii) $BC+AC>AB$

(iii) $AC+AB>BC$



चित्र 7.39

रचना : भुजा BA को D तक इस प्रकार आगे बढ़ाया कि $AD=AC$ हो।

उपपत्ति : ΔADC में रचना से $AD=AC$ है अतः इनके सम्मुख कोण बराबर होंगे।

अतः $\angle ACD=\angle ADC$ $\quad\ldots(1)$

एवं $\angle BCD>\angle ACD$ $\quad\ldots(2)$

(1) व (2) से $\angle BCD>\angle ADC=\angle BDC$

अतः $BD>BC$ [क्योंकि बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ी होती है।]

अतः $BD>BC$

$\Rightarrow$ $BA+AD>BC$ $\quad[\because BD=BA+AD]$

$\Rightarrow$ $BA+AC>BC$ $\quad[\because AD=AC$ (रचना से)$]$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$AB+BC>AC$

$BC+AC>AB$ "इतिसिद्धम्"।

7.07 रेखा एवं बाह्य बिन्दु से लम्बवत् दूरी

किसी रेखा एवं उसके बाहर स्थित किसी बिन्दु के मध्य दूरी, उस बिन्दु से उस रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई के बराबर होती है।

प्रमेय 7.10*

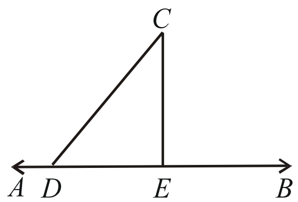
किसी बाह्य बिन्दु से सरल रेखा (रेखा खण्ड) पर खींचे गये सभी रेखा खण्डों में से लम्बवत् रेखा खण्ड ही सबसे छोटा होता है।

दिया है : रेखा AB पर बिन्दु C से रेखा खण्ड CD एवं लम्ब CE को मिलाया।

सिद्ध करना है : $CE<CD$

उपपत्ति : $\Delta\, CED$ में

$\angle CED=90^\circ$



चित्र 7.40

अतः $\angle CDE<\angle CED$ होगा, हम जानते हैं कि बड़े कोण की सम्मुख भुजा सदैव बड़ी होती है। अतः $CD>CE.$

अर्थात् बाह्य बिन्दु से खीचें गये सभी रेखा खण्डो में से लम्बवत् रेखा खण्ड ही सबसे छोटा होता हैं।

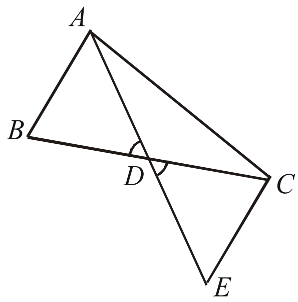
दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 15: चित्र 7.41 में, AD त्रिभुज ABC की मध्यिका है तो सिद्ध कीजिए कि

$$AB + AC > 2AD$$

(अथवा)

सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा पर खींची गई मध्यिका के दुगुने से अधिक होता है।



चित्र 7.41

gy %fn; kgS%त्रिभुज ABC की मध्यिका AD है,

सिद्ध करना है : $AB + AC > 2AD$

रचना : चित्रानुसार AD को E तक इस प्रकार आगे बढ़ाया कि $DE = AD$ हो एवं C तथा E को मिलाया।

उपपत्ति : ΔADB एवं ΔEDC में

$AD = DE$ (रचना से)

$BD = DC$ (दिया है)

$\angle ADB = \angle EDC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अर्थात् भुजा–कोण–भुजा गुणधर्म से $\Delta ADB \cong \Delta EDC$

अतः $AB = CE$

अब ΔACE में

$AC + CE > AE$

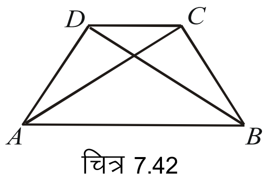
$\Rightarrow \quad AC + AB > AE \quad [\because CE = AB]$

$\Rightarrow \quad AC + AB > 2AD \quad [\because AE = 2AD]$ "इतिसिद्धम्"।

उदाहरण 16: यदि $ABCD$ एक चतुर्भुज हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $AB + BC + CD + DA > 2AC$

(ii) $AB + BC + CD + DA > AC + BD$.



चित्र 7.42

हल : दिया है : चित्र 7.42 के अनुसार एक चतुर्भुज $ABCD$.

सिद्ध करना है : (i) $AB + BC + CD + DA > 2AC$

(ii) $AB + BC + CD + DA > AC + BD$

रचना : विकर्ण AC एवं BD को मिलाया।

उपपत्ति : हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है अतः

ΔABC में $\quad AB + BC > AC \quad \ldots(1)$

ΔADC में $\quad AD + DC > AC \quad \ldots(2)$

ΔABD में $\quad AB + AD > BD \quad \ldots(3)$

ΔBCD में $\quad BC + CD > BD \quad \ldots(4)$

(1) व (2) का योग करने पर

$$AB + BC + AD + CD > 2AC \qquad \ldots(\text{i})$$

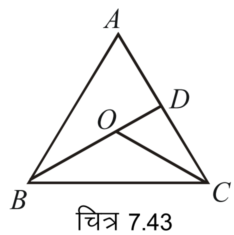
पुनः (1), (2), (3) व (4) का योग करने पर

$$2(AB + BC + AD + DC) > 2(AC + BD)$$

$$\Rightarrow \quad AB + BC + AD + DC > AC + BD \qquad \ldots(\text{ii})$$

''इतिसिद्धम्'' ।

उदाहरण 17: चित्र 7.43 में ΔABC के अन्दर कोई बिन्दु O हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AB + AC > OB + OC$.



चित्र 7.43

हल : दिया है : ΔABC में O एक अन्तः बिन्दु है।

सिद्ध करना है : $AB + AC > OB + OC$

रचना : BO को आगे बढ़ाया जो AC को D पर मिलती हैं।

उपपत्ति : हम जानते हैं कि त्रिभुज में किन्ही दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता हैं।

अतः ΔABD में $AB + AD > BD$

$$\Rightarrow \quad AB + AD > OB + OD \qquad \ldots(1)$$

इसी प्रकार ΔOCD में $\quad OD + DC > OC \qquad \ldots(2)$

(1) व (2) का योग करने पर

$$AB + AD + OD + DC > OB + OD + OC$$

$$\Rightarrow \quad AB + (AD + DC) > OB + OC$$

$$\Rightarrow \quad AB + AC > OB + OC$$ ''इतिसिद्धम्'' ।

महत्वपूर्ण बिन्दु

इस अध्याय में, आपने निम्न बिन्दुओं का अध्ययन किया है:

1. दो आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं, यदि उनका एक ही आकार हो और एक ही माप हो।

2. समान त्रिज्याओं वाले दो वृत्त सर्वांगसम होते हैं।

3. समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।

4. यदि त्रिभुज ABC और PQR संगतता $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow R$ के अंतर्गत सर्वांगसम हों, तो उन्हें सांकेतिक रूप में $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ लिखते हैं।

5. यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SAS सर्वागसमता नियम)।

6. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और अंतर्गत भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (ASA सर्वांगसमता नियम)।

7. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और संगत भुजा के बराबर हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (AAS सर्वांगसमता नियम)।

8. त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

9. त्रिभुज के बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

10. किसी समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° का होता है।

11. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (SSS सर्वांगसमता नियम)।

12. यदि दो समकोण त्रिभुजों में, एक त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं (RHS सर्वांगसमता नियम)।

13. किसी त्रिभुज में, लंबी (बड़ी) भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।

14. किसी त्रिभुज में, बड़े कोण की सम्मुख भुजा लंबी (बड़ी) होती है।

15. किसी त्रिभुज में, दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

विविध प्रश्नमाला 7

वस्तुनिष्ठ प्रश्न प्रश्न (1 से 16 तक)

1. निम्नलिखित में से कौन त्रिभुजों की सर्वांगसमता की एक कसौटी नहीं है?
   (A) SAS (B) ASA
   (C) SSA (D) SSS [ ]
2. यदि AB = QR, BC = PR और CA = PQ है, तो
   (A) $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (B) $\Delta CBA \cong \Delta PRQ$
   (C) $\Delta BAC \cong \Delta RPQ$ (D) $\Delta PQR \cong \Delta BCA$ [ ]
3. Δ ABC में, AB = AC और $\angle B = 50^o$ है, तब $\angle C$ बराबर है
   (A) 40^o (B) 50^o (C) 80^o (D) 130^o [ ]
4. Δ ABC में, BC = AB और $\angle B = 80^o$ है, तब $\angle A$ बराबर है
   (A) 80^o (B) 40^o (C) 50^o (D) 100^o [ ]
5. Δ PQR में, $\angle R = \angle P$ और QR = 4 cm और PR = 5 cm है, तब PQ की लम्बाई है
   (A) 4 cm (B) 5 cm (C) 2 cm (D) 2.5 cm [ ]
6. D एक त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिन्दु इस प्रकार स्थित है कि AD कोण BAC के समद्विभाजित करता है। तब
   (A) BD = CD (B) BA > BD
   (C) BD > BA (D) CD > CA [ ]
7. यह दिया है कि $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ है तथा AB = 5 cm, $\angle B = 40^o$ और $\angle A = 80^o$ है। निम्नलिखित में से कौन सत्य है?
   (A) DF = 5 cm, $\angle F = 60^o$ (B) DF = 5 cm, $\angle E = 60^o$
   (C) DE = 5 cm, $\angle E = 60^o$ (D) DE = 5 cm, $\angle D = 40^o$ [ ]
8. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लंबाइयाँ 5 cm और 1.5 cm हैं। इस त्रिभुज की तीसरी भुजा की लंबाई निम्नलिखित नहीं हो सकती
   (A) 3.6 cm (B) 4.1 cm (C) 3.8 cm (D) 3.4 cm [ ]
9. Δ PQR में, यदि $\angle R > \angle Q$ है, तो
   (A) QR > PR (B) PQ > PR (C) PQ < PR (D) QR < PR [ ]
10. त्रिभुजों ABC और PQR में, AB = AC, $\angle C = \angle P$ और $\angle B = \angle Q$ है। ये दोनों त्रिभुज है
    (A) समद्विबाहु परंतु सर्वांगसम नहीं (B) समद्विबाहु और सर्वांगसम
    (C) सर्वांगसम परंतु समद्विबाहु नहीं (D) न तो सर्वांगसम और न ही समद्विबाहु [ ]
11. त्रिभुजों ABC और DEF में, AB = FD तथा $\angle A = \angle D$ है। दोनों त्रिभुज SAS अभिगृहीत के अन्तर्गत सर्वांगसम होंगे, यदि
    (A) BC = EF (B) AC = DE (C) AC = EF (D) BC = [ ]

12. समकोण त्रिभुज ABC में कोण C समकोण हो तो, सबसे बड़ी भुजा होगी :

(A) AB (B) BC (C) CA (D) कोई नहीं [ ]

13. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से होता है :

(A) अधिक (B) समान (C) कम (D) आधा [ ]

14. यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हो, तो बड़ी भुजा के सामने का कोण होता है :

(A) बड़ा (B) छोटा (C) बराबर (D) आधा [ ]

15. त्रिभुज का परिमाप उसकी मध्यिकाओं के योग से होता है :

(A) अधिक (B) कम (C) समान (D) आधा [ ]

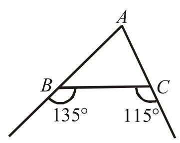
16. त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्बों का योग उसके परिमाप से होता है :

(A) अधिक (B) समान (C) आधा (D) कम [ ]

17. यदि ΔABC में $AB = AC$ हो तथा $\angle A < 60°$ हो, तो भुजा BC एवं AC में संबंध लिखिए :

....

18. चित्र 7.44 में, भुजा AB एवं AC में संबंध लिखिए।



चित्र 7.44

....

19. किसी त्रिभुज ABC में, $\angle A > \angle B$ एवं $\angle B > \angle C$ हो, तो सबसे छोटी भुजा होगी :

....

20. एक समबाहु त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

21. P कोण ABC के समद्विभाजक पर स्थित कोई बिन्दु है। यदि P से होकर BA के समांतर खींची गई रेखा BC से Q पर मिलती है, तो सिद्ध कीजिए कि BPQ एक समद्विबाहु त्रिभुज है।

22. ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। $\angle A$ का समद्विभाजक BC से D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि $BC = 2\,AD$ है।

23. ABC और DBC एक ही आधार BC पर स्थित दो त्रिभुज इस प्रकार हैं कि बिन्दु A और D आधार BC के विपरीत और स्थित हैं, $AB = AC$ और $DB = DC$ है। दर्शाइए कि AD रेखाखंड BC का लंब समद्विभाजक है।

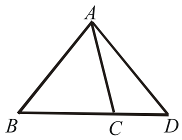
24. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AC = BC$ है। AD और BE क्रमशः BC और AC पर शीर्षलंब है। सिद्ध कीजिए कि $AE = BD$ है।

25. सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा की संगत माध्यिका के दोगुने से बड़ा होता है।

26. एक त्रिभुज ABC में, D भुजा AC का मध्य–बिन्दु है ताकि $BD = \frac{1}{2} AC$ है। दर्शाइए कि $\angle ABC$ एक समकोण है।

27. एक समकोण त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि कर्ण के मध्य–बिन्दु को उसके सम्मुख शीर्ष से मिलाने वालो रेखाखंड कर्ण का आधा होता है।

28. चित्र 7.45 में, यदि $AB = AC$ हो, तो भुजा AB एवं AD में संबंध लिखिए।



चित्र 7.45

29. AD किसी त्रिभुज ABC की एक माध्यिका है। क्या यह कहना सत्य है कि $AB + BC + CA > 2\,AD$ है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

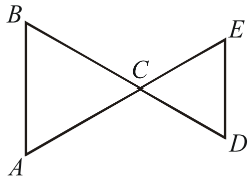
30. M किसी त्रिभुज ABC की भुजा BC पर स्थित एक बिन्दु ऐसा है कि AM कोण BAC का समद्विभाजक है। क्या यह कहना सत्य है कि त्रिभुज का परिमाप 2AM से अधिक है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

31. एक $\Delta\, PSR$ की भुजा SR पर एक बिन्दु Q इस प्रकार स्थित है कि $PQ = PR$ है। सिद्ध कीजिए कि $PS > PQ$ है।

32. $\Delta\, PQR$ की भुजा QR पर S कोई बिन्दु स्थित है। दर्शाइए कि $PQ + QR + RP > 2\,PS$ है।

33. $AB = AC$ वाले एक $\Delta\, ABC$ की भुजा, AC पर D कोई बिन्दु स्थित है। दर्शाइए कि $CD < BD$ है।

34. चित्र 7.46 में, $\angle B > \angle A$ एवं $\angle D > \angle E$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AE > BD$.



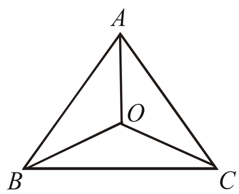
चित्र 7.46

35. किसी त्रिभुज ABC में $AB > AC$ एवं भुजा BC पर कोई बिन्दु D हो, तो सिद्ध कीजिए : $AB > AD$.

36. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग उसकी तीनों मध्यिकाओं के योग से अधिक होता है। [संकेत : उदाहरण 1 का प्रयोग करें]

37. चित्र 7.47, में त्रिभुज में कोई अन्तः बिन्दु O हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(BC + AB + AC) > 2(OA + OB + OC).$$



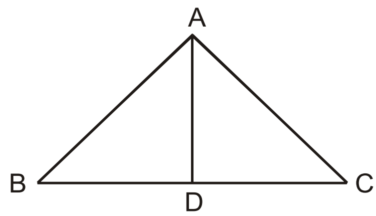
चित्र 7.47

38. सिद्ध कीजिए कि त्रिभुजों के तीनों शीर्ष लम्बों का योग त्रिभुज के परिमाप से कम होता है।

39. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से छोटा होता है।

40. $AB = AC$ वाले एक समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों B और C के समद्विभाजक परस्पर O परप्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि $\angle ABC$ के आसन्न एक बहिष्कोण $\angle BOC$ के बराबर है।

41. चित्र 6.48 में, AD कोण BAC का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $AB > BD$ है।



चित्र 6.48

उतरमाला

प्रश्नमाला 7.1

1. QR; ये ASA द्वारा सर्वांगसम होंगे।
2. RP; ये AAS द्वारा सर्वांगसम होंगे।
3. नहीं, कोण दोनों भुजाओं के अन्तर्गत होने चाहिए।
4. नहीं, भुजाएँ संगत होनी चाहिए।
5. नहीं, BC = PQ होना चाहिए।
6. हाँ, ये संगत भुजाएँ है।

प्रश्नमाला 7.2

1. 64°

3. 90°

विविध प्रश्नमाला 7

1. C	**2.** B	**3.** B	**4.** C	**5.** A	**6.** B
7. B	**8.** D	**9.** B	**10.** A	**11.** B	**12.** A
13. C	**14.** A	**15.** A	**16.** D		

17. BC < AC

18. AB > AC

19. AB

20. 60, 60, 60

28. AD > AB

29. हाँ, AB + BD > AD और AC + CD > AD

30. हाँ, AB + BM >AM और AC + CM > AM

अध्याय

8

त्रिभुजों की रचनाएँ
(Construction of Triangles)

8.01 प्रस्तावना (Introduction):

प्रत्येक त्रिभुज के छः अवयव होते हैं, तीन भुजाएँ और तीन कोण। पूर्व मे हम दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए आवश्यक प्रतिबन्धों का अध्ययन कर चुके हैं। इनके अनुसार त्रिभुज की रचना करने के लिए कम से कम तीन स्वतंत्र अवयव ज्ञात होने चाहिए अर्थात्

(i) तीन भुजाएँ, या

(ii) दो भुजाएँ और उनके मध्य का कोण, या

(iii) दो कोण और एक भुजा, या

(iv) समकोण त्रिभुज में कर्ण और एक भुजा,

टिप्पणी: (i) यदि तीनों कोण दिये हों, तो त्रिभुज की रचना नहीं की जा सकती है। (ii) यदि दो भुजाएँ और इनमें से एक के सामने का न्यून कोण दिया हो तो अभीष्ट त्रिभुज की संदिग्ध(Ambiguous) स्थिति उत्पन्न हो जाती है। इस अध्याय में विभिन्न स्थितियों में त्रिभुजों की रचना का अध्ययन करेंगे।

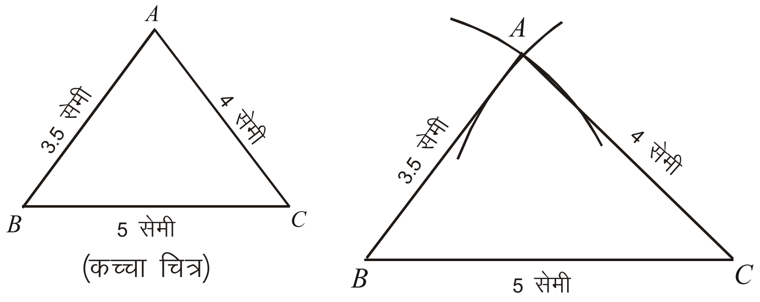
निर्मेय 8.1

त्रिभुज की रचना करना, जिसकी तीनों भुजाएँ दी गई हों।

ΔABC की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ क्रमशः a=5 सेमी, b=4 सेमी और c=3·5 सेमी हो। यहाँ पर a से आशय है शीर्ष A के समाने की भुजा, b का आशय है शीर्ष B के समाने की भुजा, c का आशय है शीर्ष C के सामने की भुजा।

सर्वप्रथम रचना करने से पूर्व दी गई माप के अनुसार त्रिभुज की कच्ची आकृति बनाकर इसमें मापों को अंकित करेंगे। इसी के आधार पर अभीष्ट त्रिभुज बनायेंगे।

रचना : सरल रेखा BC = 5 सेमी खींचिए। बिन्दु B को केन्द्र मानकर 3·5 सेमी की त्रिज्या से एक चाप खींचिए और इसी प्रकार C बिन्दु को केन्द्र मानकर 4 सेमी की त्रिज्या से एक चाप खींचिए जो पहले वाले चाप को A बिन्दु पर काटे।



चित्र 8.01

A को B व C से मिलाइए। ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

प्रश्नमाला 8.1

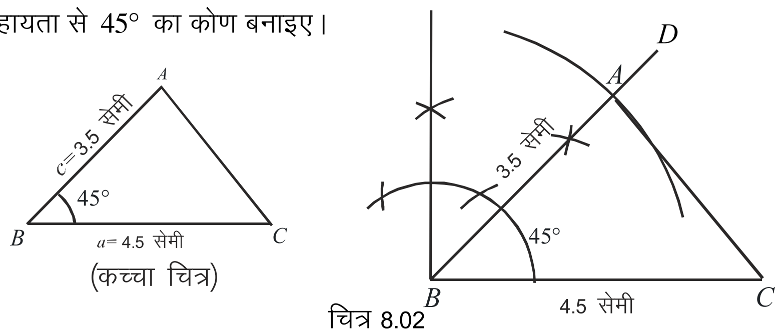
1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $AB=4$ सेमी, $BC=5$ सेमी और $CA=6$ सेमी हो।
2. दो बिन्दु A और B परस्पर $6\cdot5$ सेमी की दूरी पर है। A व B से क्रमशः 7 सेमी तथा 6 सेमी दूरी पर एक बिन्दु C का स्थान ज्ञात कीजिए।
3. ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $a=6\cdot5$ सेमी, $b=7\cdot2$ सेमी और $c=8$ सेमी। $\angle B$ का अर्द्धक खींचिए जो AC को M बिन्दु पर मिले।
4. ΔABC की रचना इस प्रकार कीजिए कि $a=7$ सेमी, $b=5$ सेमी और $c=4$ सेमी। A से BC पर लम्ब डालिए।
5. समबाहु ΔABC की रचना कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा $5\cdot5$ सेमी हो।
6. समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार 3 सेमी तथा अन्य भुजा 5 सेमी हो।

निर्मेय 8.2

त्रिभुज की रचना करना जिसकी दो भुजाएँ और उनके बीच कोण दिया हो।

ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें भुजा $a=4\cdot5$ सेमी, भुजा $c=3\cdot5$ सेमी और $\angle B=45°$ हो।

रचना : सरल रेखा $BC=a=4\cdot5$ सेमी खींचिए। बिन्दु B पर पटरी व परकार की सहायता से $45°$ का कोण बनाइए।



चित्र 8.02

B को केन्द्र मानकर $c = 3 \cdot 5$ सेमी की त्रिज्या से चित्रानुसार चाप द्वारा BD में से BA काटिए, A को C से मिलाइए। अभीष्ट त्रिभुज ABC है।

प्रश्नमाला 8.2

1. त्रिभुज ABC की रचना कीजए, जिसमें $a = 4$ सेमी, $b = 5$ सेमी और $\angle C = 60°$.
2. त्रिभुज LMN की रचना कीजिए जिसमें $\angle L = 120°, LM = 4$ सेमी तथा $LN = 5$ सेमी हो।
3. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $AB = AC = 8$ सेमी, $\angle A = 75°$, $\angle B$ का समद्विभाजक खींचिए जो सामने की भुजा को मिले।
4. समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका शीर्ष कोण $120°$ हो, और जिसकी समान भुजाओं में से प्रत्येक $5 \cdot 5$ सेमी लम्बी हो।

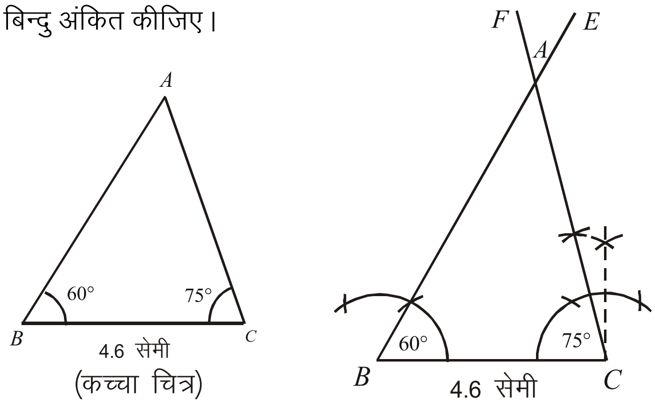
9ZQDK4

निर्मेय 8.3

त्रिभुज की रचना करना, जिसकी एक भुजा और दो कोण दिये गए हों।

ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $\angle B = 60°, \angle C = 75°$ और भुजा $BC = 4 \cdot 6$ सेमी हो।

रचना : $BC = 4 \cdot 6$ सेमी की खींचिए, B बिन्दु पर, पटरी व परकार की सहायता से $60°$ का तथा C पर $75°$ का कोण $\angle EBC$ व $\angle FCB$ बनाइए। BE तथा CF, जिस बिन्दु पर मिले उस पर A बिन्दु अंकित कीजिए।



चित्र 8.03

त्रिभुज ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

टिप्पणी : यदि भुजा BC के सिरों B व C पर कोई कोण न दिया होकर अन्य तीसरा कोण दिया गया हो, तो त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण के बराबर होता है, अतः इसकी सहायता से तीसरा कोणज्ञात कर उपर्युक्त निर्मेय के अनुसार त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

प्रश्नमाला 8.3

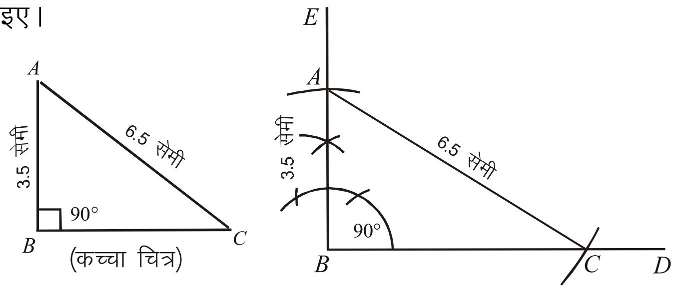
1. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमे $QR = 8$ सेमी, $\angle Q = 120°$ और $\angle R = 30°$.
2. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $b = 7$ सेमी, $\angle A = 90°$ और $\angle C = 60°$ है।
3. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका आधार 4 सेमी और शीर्ष कोण $= 30°$ हो। शीर्ष बिन्दु से आधार पर लम्ब खींचिए।

निर्मेय 8.4

समकोण त्रिभुज की रचना करना जिसका कर्ण और एक अन्य भुजा दी गई हो।

एक समकोण ΔABC की रचना कीजिए जिसका कर्ण $AC = 6\cdot5$ सेमी तथा भुजा $AB = 3\cdot5$ सेमी है।

रचना : कोई सरल रेखा BD खींचिए। BD के बिन्दु B पर $\angle DBE = 90°$ बनाइए। B को केन्द्र मानकर $3\cdot5$ सेमी की त्रिज्या से चाप लगाइए जो BE को A बिन्दु पर काटे, अब A को केन्द्र मानकर $6\cdot5$ सेमी की त्रिज्या से चाप लगाइए, जो BD को C बिन्दु पर काटे। A को C से मिलाइए।



चित्र 8.04

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

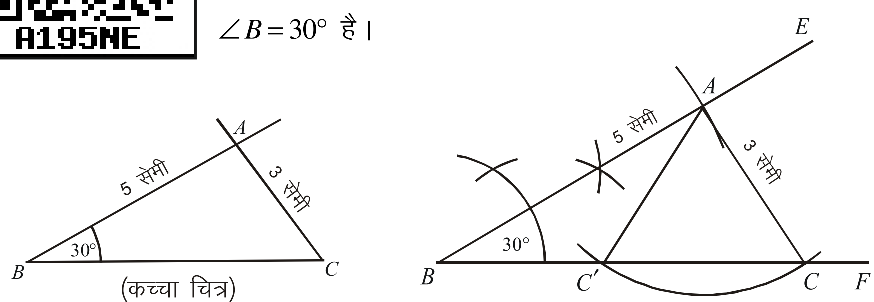
प्रश्नमाला 8.4

1. समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 5 सेमी तथा अन्य एक भुजा 3 सेमी हो।
2. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $\angle A = 90°$, भुजा $AC = 5\cdot4$ सेमी तथा कर्ण $BC = 10$ सेमी हो।
3. समकोण ΔABC की रचना कीजिए, जिसमें $\angle A = 90°$ तथा भुजा $a = 10$ सेमी तथा भुजा $b = 6$ सेमी हो। कर्ण पर शीर्ष A से लम्ब डालिए।

निर्मेय 8.5

त्रिभुज की रचना करना, जिसकी दो भुजाएँ तथा उनमें से एक के सामने का कोण दिया गया हो।

ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $AB = 5$ सेमी, $AC = 3$ सेमी तथा $\angle B = 30°$ है।



चित्र 8.05

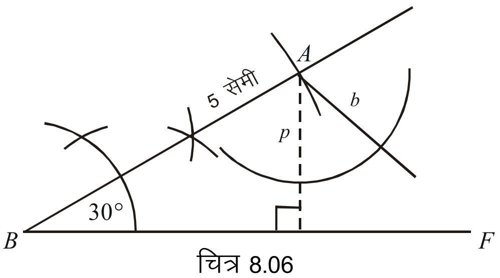
रचना : सरल रेखा BF खींचिए और बिन्दु B पर $\angle EBF = 30^\circ$ का कोण बनाइए। B बिन्दु से 5 सेमी की त्रिज्या का चाप लगाइए, जो BE को A पर काटे।

अब A बिन्दु से 3 सेमी की त्रिज्या से चाप घुमाइए, जो BF को बिन्दुओं C तथा C' पर काटे। C तथा C' को A से मिलाइए।

ΔABC तथा $\Delta ABC'$ दोनों ही अभीष्ट त्रिभुज हैं।

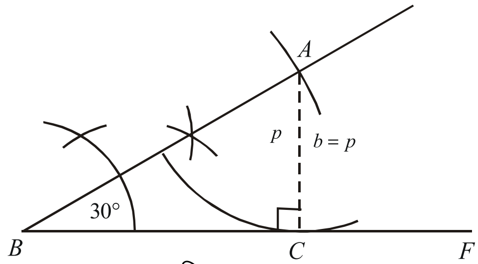
निर्मेय से संबंधित विभिन्न स्थितियाँ

स्थिति 1 : जब भुजा b की लम्बाई, शीर्ष A से BC पर डाले गए लम्ब p से छोटी हो तो A को केन्द्र मानकर b की त्रिज्या से खींचा गया चाप, BF को काटेगा ही नहीं। ऐसी स्थिति में त्रिभुज की रचना सम्भव नहीं है (चित्र 8.06)।



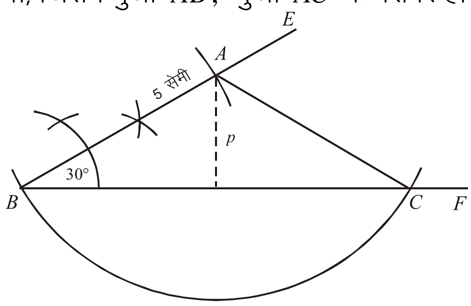
चित्र 8.06

स्थिति 2 : जब भुजा b की लम्बाई, लम्ब p के बराबर हो, तो A को केन्द्र मानकर b की त्रिज्या से खींचा गया चाप BF को स्पर्श करेगा। ऐसी स्थिति में केवल एक ही त्रिभुज बनेगा और वह समकोण त्रिभुज होगा (चित्र 8.07)।



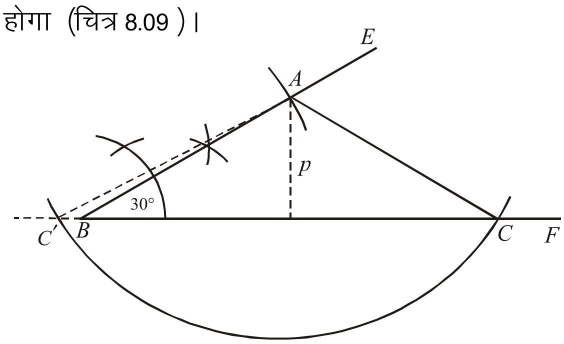
चित्र 8.07

स्थिति 3 : यदि भुजा b, लम्ब p से बडी तथा c के बराबर हो। ऐसी स्थिति में केवल एक समद्विबाहु त्रिभुज बनेगा, जिसमें भुजा AB, भुजा AC के बराबर होगी (चित्र 8.08)।



चित्र 8.08

स्थिति 4 : यदि भुजा b लम्ब p और भुजा c, दोनों से बड़ी हो तो चाप रेखा BF को बिन्दु B की दाँयी तरफ बिन्दु C पर काटेगा और केवल एक अभीष्ट ΔABC बनेगा। इस स्थिति में चाप CB को बढ़ाने पर C' पर अवश्य काटेगा, लेकिन $\Delta ABC'$ अभीष्ट त्रिभुज नहीं होगा, क्योंकि इसमें $\angle ABC = 30°$, नहीं होगा (चित्र 8.09)।



चित्र 8.09

स्थिति 5 : यदि भुजा b, लम्ब p से बड़ी हो और भुजा c से छोटी हो, तो चाप BF को दो विभिन्न बिन्दुओं पर काटेगा और इस प्रकार दो ΔABC तथा $\Delta ABC'$ अभीष्ट त्रिभुज होंगे (चित्र 8.05)।

टिप्पणी : उपर्युक्त स्थितियों से स्पष्ट है कि यदि $\angle B$ न्यूनकोण नहीं है तो केवल एक ही त्रिभुज सम्भव है। क्योंकि उस स्थिति में भुजा b, भुजा c से बड़ी होगी। यदि $\angle B$ न्यून कोण है तो उपर्युक्तानुसार कोई भी स्थिति सम्भव हो सकती है।

प्रश्नमाला 8.5

1. त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए, जिसमें $\angle XYZ = 60°$, भुजा $XY = 5$ सेमी तथा $XZ = 4\cdot5$ सेमी। इस प्रकार से कितने त्रिभुज खींचे जा सकते हैं
2. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें $\angle PQR = 45°$, भुजा $PQ = 6$ सेमी तथा $PR = 5$ सेमी।
3. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $a = 5\cdot4$ सेमी, $b = 6\cdot8$ सेमी और $\angle A = 45°$, भुजा AB का माप ज्ञात कीजिए।

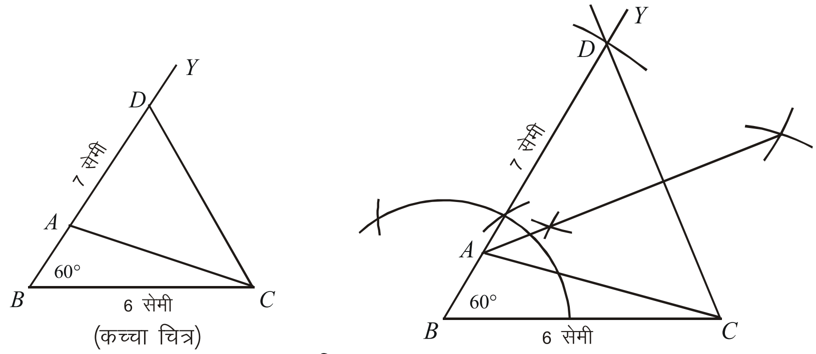
8.02 त्रिभुज की कठिन रचनाएँ:

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जबकि आधार $BC = 6$ सेमी, $\angle ABC = 60°$ एवं $AB + AC = 7$ सेमी है।

हल : दी गई मापों से त्रिभुज का कच्चा चित्र खींचकर उसमें दी गई मापें अंकित कीजिए। BA को बिन्दु D तक इस प्रकार बढ़ाइए कि $AC = AD$ हो। इस प्रकार $BD = BA + AC$, D को C बिन्दु से मिलाइए। DC का लम्ब समद्विभाजक खींचकर ΔABC प्राप्त किया जा सकता है।

रचना : $BC = 6$ सेमी खींचिए। बिन्दु B पर $60°$ का कोण YBC पटरी व परकार से बनाइए, BY में से, $(BA + AC)$ के बराबर दूरी $BD = 7$ सेमी काटिए। D को C से मिलाइए। DC का लम्ब समद्विभाजक खींचिए, जो BD को A बिन्दु पर काटे। A को C से मिलाइए।



चित्र 8.10

इस प्रकार ABC अभीष्ट त्रिभुज है। जिसमें $BA + AC = 7$ सेमी है।

उदाहरण 2: त्रिभुज की रचना कीजिए, जबकि $AB + BC + CA = 8$ सेमी, $\angle B = 60°$ एवं $\angle C = 80°$.

हल : दी गई मापों से ΔABC का कच्चा चित्र बनाकर, इसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए। BC को दोनों ओर इस प्रकार बढ़ाइए कि $BP = AB$, और $CQ = AC$, AP एवं AQ को मिलाइए। इस प्रकार ΔABP और ΔACQ समद्विबाहु त्रिभुज हुए।

कच्चे चित्रानुसार त्रिभुज APQ की रचना की सकती है।

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 60°$

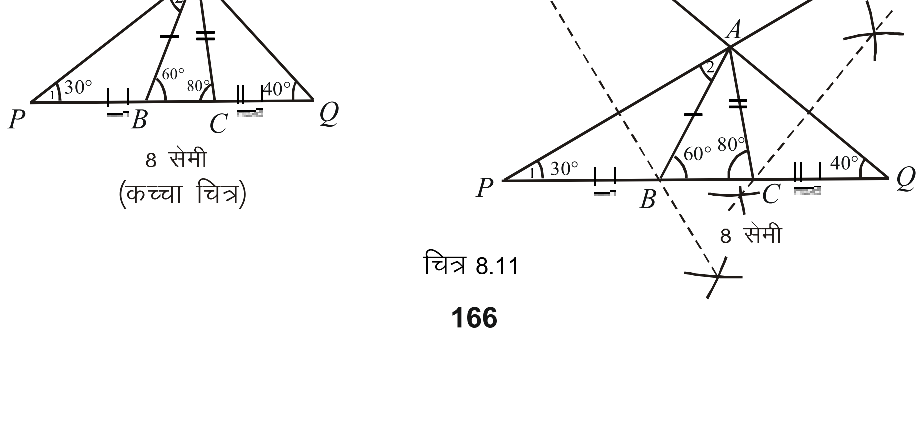
($\because$ B का बहिष्कोण = अन्तरा त्रिभुज कोणों का योग)

लेकिन $\angle 1 = \angle 2$ ($\because PB = AB$)

अतः $\angle 1 = \angle 2 = \dfrac{60°}{2} = 30° = \angle APB$

इसी प्रकार $\angle AQC = \dfrac{80°}{2} = 40°$

रचना : रेखा $PQ = 8$ सेमी की खींचिए। बिन्दु P तथा Q पर क्रमशः $30°$ व $40°$ का कोण $\angle YPQ$ तथा $\angle ZQP$ बनाइए। PY तथा QZ जहाँ काटे, A बिन्दु अंकित कीजिये। अब AP तथा AQ का लम्ब समद्विभाजक खींचिए, जो PQ को क्रमशः B तथा C बिन्दुओं पर काटे। A को, B तथा C से मिलाइए।



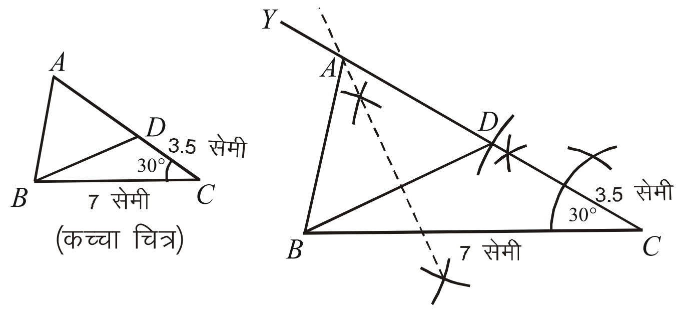
चित्र 8.11

ABC ही अभीष्ट त्रिभुज है, जिसमें $AB + BC + +CA = 8$ सेमी है।

उदाहरण 3: त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 7$ सेमी, $b - c = 3.5$ सेमी और $\angle C = 30°$ हो।

हल : दी गई मापों से ΔABC का कच्चा चित्र बनाइए। इसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए। चित्र में AC, BA से बड़ी है। AC में से AB के बराबर AD काटकर BD को मिलाइए। इस प्रकार ΔABD एक समद्विबाहु त्रिभुज है। कच्चे चित्र को ध्यान में रखकर निम्न प्रकार अभीष्ट त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

रचना : BC रेखा 7 सेमी की खींचिए। C बिन्दु पर $30°$ का कोण $\angle YCB$ बनाइए, CY में से 3.5 सेमी की दूरी CD काटिए। D को B से मिलाइए तथा DB का लम्ब समद्विभाजक खींचिए, यह CY को जहाँ काटे, A बिन्दु अंकित कीजिए, A को B से मिलाइए।



चित्र 8.12

ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।

उदाहरण 4: एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 6$ सेमी, माध्यिकाएँ AD और CF क्रमशः 9 सेमी और 7·5 सेमी है।

हल : दी गई मापों से ΔABC का कच्चा चित्र बनाकर उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए। कच्चे चित्र में

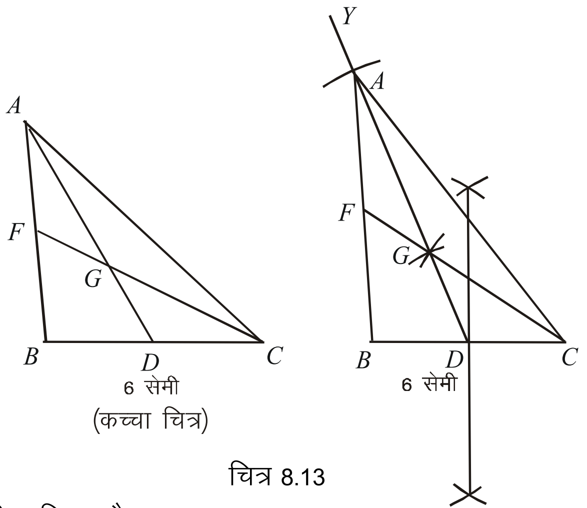
$$DC = \tfrac{1}{2}BC = \tfrac{1}{2} \times 6 = 3 \text{ सेमी}$$

$$GC = \tfrac{2}{3}CF = \tfrac{2}{3} \times 7 \cdot 5 = 5 \text{ सेमी}$$

$$GD = \tfrac{1}{3} \times 9 = 3 \text{ सेमी।}$$

रचना : $BC = 6$ सेमी खींचिए। BC को D पर समद्विभाजित कीजिए। D को केन्द्र मानकर त्रिज्या $\left[GD = \tfrac{1}{3}AD\right]$3 सेमी लेकर चाप खींचिए। इसी प्रकार C को केन्द्र मानकर त्रिज्या $\left[GC = \tfrac{2}{3}CF\right]$ 5 सेमी लेकर एक चाप खींचिए, जो पहले चाप को G पर काटे।

DG को मिलाते हुए आगे इतना बढ़ाइए ताकि $DA = 9$ सेमी बने। AB तथा AC को मिलाइए।



चित्र 8.13

अतः ABC अभीष्ट त्रिभुज है।

उदाहरण 5: त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसकी तीनों माध्यिकाएँ क्रमशः $3\cdot6$ सेमी, $2\cdot7$ सेमी और $4\cdot2$ सेमी हैं।

हल : त्रिभुज ABC का कच्चा चित्र बनाकर, उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए।

चित्रानुसार, $OB = \frac{2}{3}\times BE = \frac{2}{3}\times 2\cdot7 = 1\cdot8$ सेमी

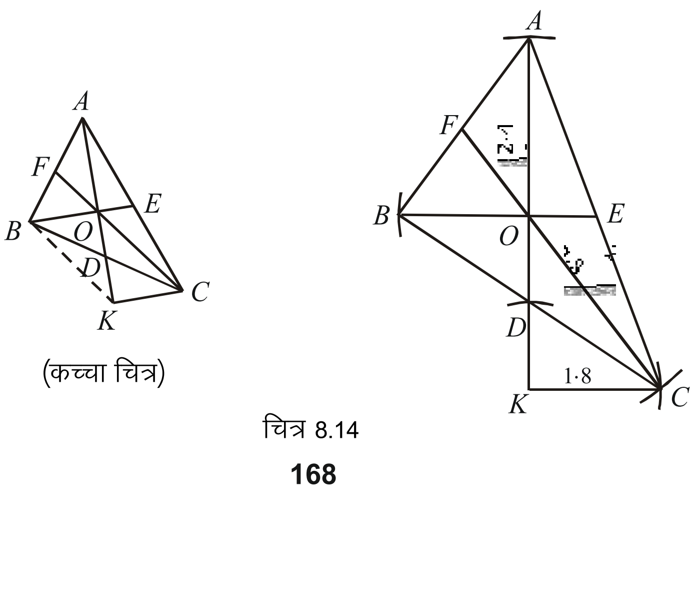
$OC = \frac{2}{3}\times CF = \frac{2}{3}\times 4\cdot2 = 2\cdot8$ सेमी

तथा $OA = \frac{2}{3}\times AD = \frac{2}{3}\times 3\cdot6 = 2\cdot4$ सेमी

चित्र के अनुसार AD को इस प्रकार आगे बढ़ाते हुए चित्र को पूर्ण कीजिए कि $KC = OB$, OK का मध्य बिन्दु D ज्ञात करके त्रिभुज ABC की रचना पूर्ण की जा सकती है।

रचना : त्रिभुज OKC की रचना इस प्रकार कीजिए कि $OK = AO = 2\cdot4$ सेमी $OC = 2\cdot8$ सेमी तथा $KC = OB = 1\cdot8$ सेमी। OK का मध्य बिन्दु D प्राप्त कीजिए। KD को आगे इतना बढ़ाइए कि $AD = 3\cdot6$ सेमी हो। इसी प्रकार CD को पीछे इतना बढ़ाइए, कि $CD = BD$, AB तथा AC को मिलाइए।

अतः ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है, जिसमें माध्यिकाएँ $AD = 3\cdot6$ सेमी, $BE = 2\cdot7$ सेमी तथा $CF = 4\cdot2$ सेमी हैं।



चित्र 8.14

प्रश्नमाला 8.6

1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $BC = 7$ सेमी, $\angle C = 50^\circ$ तथा $AC + AB = 8$ सेमी है।
2. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 6$ सेमी, $\angle Q = 60^\circ$ और $PQ + PR = 8$ सेमी है।
3. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें $QR = 5$ सेमी, $\angle R = 40^\circ$ तथा $PR - PQ = 1$ सेमी।
4. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसकी परिमिति 12 सेमी एवं आधार के कोण 50° और 70° हो।
5. त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसमें $BC = 6$ सेमी, माध्यिकाएँ AD तथा CF क्रमशः 9 सेमी और $7\cdot5$ सेमी है।
6. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसकी तीनों माध्यिकाएँ क्रमशः 3 सेमी, $2\cdot7$ सेमी और $3\cdot6$ सेमी है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. किसी त्रिभुज की रचना करने के लिए, निम्नलिखित अवयव ज्ञात होना आवश्यक है :
   (i) तीनों भुजाएँ (भुजा – भुजा – भुजा)

   या

   (ii) दो कोण और एक भुजा (कोण – भुजा – कोण)

   या

   (iii) दो भुजाएँ ओर उनके मध्य बना कोण (भुजा – कोण – भुजा)

   या

   (iv) समकोण त्रिभुज में कर्ण तथा एक भुजा (कर्ण – भुजा)
2. निम्न स्थितियों में त्रिभुज की रचना नहीं की जा सकती है :
   (i) तीन कोण दिये हों

   (ii) दो भुजाएँ और एक के सामने का न्यून कोण (इस स्थिति में दो त्रिभुज बन सकते हैं और अभीष्ट त्रिभुज निश्चित नहीं किया जा सकता। अतः एक संदिग्ध स्थिति उत्पन्न हो जाती है।)

विविध प्रश्नमाला 8

1. एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका परिमाप 12 सेमी है तथा भुजाओं का अनुपात 1 : 2 : 3 है।
2. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $\angle B = 90^\circ$ तथा $\angle C = 60^\circ$ तथा $c = 5$ सेमी।
3. एक समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें कर्ण $BC = 8\cdot2$ सेमी तथा एक भुजा $= 4\cdot2$ सेमी।
4. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle B = 45^\circ, \angle C = 60^\circ$, और A से BC पर लम्ब $AD = 4$ सेमी।
5. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जिसमें $a = 5\cdot6$ सेमी, $b + c = 10\cdot2$ सेमी और $\angle B - \angle C = 30^\circ$ है। (संकेत – शीर्ष B पर $90 + \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$ अर्थात् 105° का कोण बनाएँ)
6. एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी तीनों माध्यिकाएँ क्रमशः $4\cdot2$ सेमी, $4\cdot8$ सेमी और $5\cdot4$ सेमी हैं।
7. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी उँचाई 6 सेमी और समान भुजाएँ 7 सेमी हैं। आधार का माप ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 8.5 3. 2.4 सेमी, 7.5 सेमी

विविध प्रश्नमाला 8 7. 7 सेमी

अध्याय

9

चतुर्भुज
(Quadrilateral)

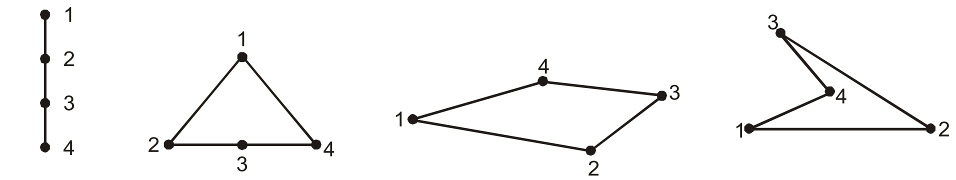
AE7PEU

9.01 प्रस्तावना (Introduction)

AEGKGH

अध्याय 5 व 6 में आपने त्रिभुजों के अनेक गुणधर्मों के बारे में अध्ययन किया है। आप यह भी जान चुके है कि तीन असंरेख बिन्दुओं को मिलाने पर एक एक त्रिभुज बनता है।

आइये अब हम कागज पर चार–चार बिन्दुओं के समूह अंकित करते है और उन्हें क्रमानुसार मिलाते है और देखते है कि कितने प्रकार की सम्भावित आकृतियाँ प्राप्त हो सकती है?



(i) रेखाखण्ड (ii) त्रिभुज (iii) चतुर्भुज (iv) चतुर्भुज

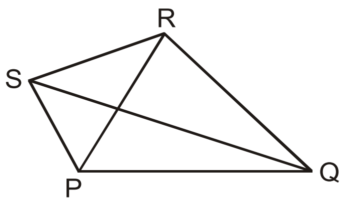
चित्र 9.01

चित्र 9.01 (i), (ii), (iii) तथा (iv) जैसी सम्भावित आकृतियाँ निर्मित हो सकती है। इस अध्याय में हम चित्र 9.01 (iii) जैसी आकृति, जिसे चतुर्भज कहते हैं, का अध्ययन करेंगे।

9.02 चतुर्भुज:

चार भुजाओं से घिरी आकृति को चतुर्भुज कहते है।

एक चतुर्भुज में चार भुजाएँ, चार कोण एवं चार शीर्ष होते है। जैसा कि चित्र 9.02 में चतुर्भुज PQRS में PQ, QR, RS तथा SP चार भुजाएँ, P, Q, R तथा S चार शीर्ष तथा $\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ तथा $\angle S$ शीर्षों पर बने कोण हैं।



चित्र 9.02

सम्मुख भुजाएँ एवं सम्मुख कोण–चित्र 9.2 में भुजाPQ की सम्मुख भुजा RS तथा PS की सम्मुख भुजा QR है। $\angle P$ का सम्मुख $\angle R$ तथा $\angle Q$ का सम्मुख $\angle S$ है।

चित्र 9.02 में, आसन्न भुजाओं के युग्म PQ, QR तथा PS, SR है। इसी प्रकार SP, PQ तथा SR, RQ भुजा युग्म आसन्न भुजा युग्म है।

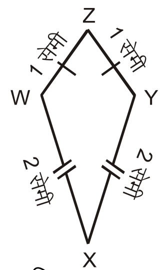
विकर्ण– सम्मुख शीर्षों को मिलाने वाले रेखाखण्ड विकर्ण कहलाते हैं। चित्र 9.02 में, PR एवं QS चतुर्भुज के विकर्ण है।

9.03 चतुर्भुज के कोणों का योग

चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 4 समकोण (360^o) होता हैं। चतुर्भुज के इस गुण धर्म को हमने अध्याय (5) के उपप्रमेय 4 के माध्यम से समझ लिया है।

9.04 चतुर्भुज के प्रकार

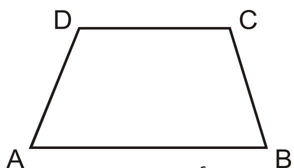
चित्र 9.03 में, WXYZ यह एक ऐसा चतुर्भुज है, जिसकी आसन्न भुजाओं के दो युग्म अर्थात् WX, XY तथा WZ, YZ बराबर है, पतंग है। अर्थात्, ऐसा चतुर्भुज जिसकी आसन्न भुजाओं के कोई दो युग्म बराबर हो, पतंग के नाम से जानते हैं।



चित्र 9.03

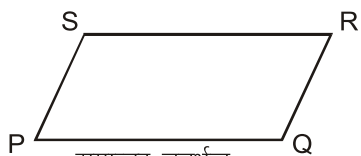
चित्र 9.04 में, चतुर्भुज की ABCD सम्मुख भुजाओं का एक युग्म AB और DC समान्तर है। इस चतुर्भुज को समलम्ब के नाम से जानते हैं।

अर्थात् ऐसा चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समान्तर हो, समलम्ब कहलाता है।



चित्र 9.04

चित्र 9.05 में PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म PQ, RS तथा PS, QR समान्तर है। इस चतुर्भुज को समान्तर चतुर्भुज के नाम से जानते हैं।

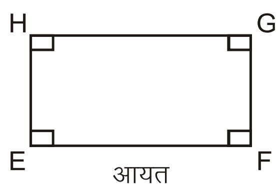


चित्र 9.05

अर्थात् ऐसा चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समान्तर होते हैं।

एक समान्तर चतुर्भुज एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब समान्तर चतुर्भुज नहीं है।

चित्र 9.06 में EFGH एक विशेष समान्तर चतुर्भुज ''आयत'' है जिसका प्रत्येक कोण 90^o होता है। अर्थात् ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसका प्रत्येक कोण समकोण हो, आयत के नाम से जानते हैं।



चित्र 9.06

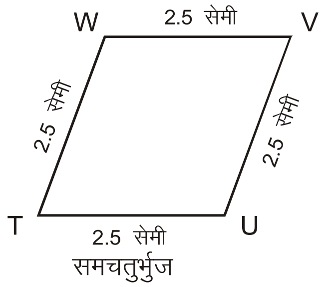
एक आयत एक समान्तर चतुर्भुज है परन्तु एक समान्तर चतुर्भुज एक आयत है, यह आवश्यक नहीं।

एक आयत एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब एक आयत नहीं है।

चित्र 9.07 में TUVW एक विशेष समान्तर चतुर्भुज ''समचतुर्भुज'' है जिसकी प्रत्येक भुजा का माप बराबर है। अर्थात् ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा समान नाप की हो को समचतुर्भज के नाम से जानते हैं।

एक समचतुर्भुज एक समान्तर चतुर्भुज है परन्तु एक समान्तर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है यह आवश्यक नहीं।

एक समचतुर्भुज एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब समचतुर्भुज नहीं है।



चित्र 9.07

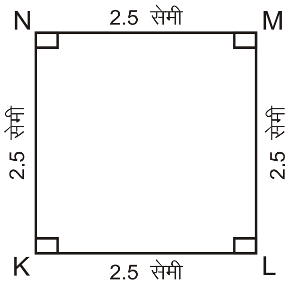
चित्र 9.08 में KLMN एक विशेष आयत ''वर्ग है'' जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर है। अथवा एक विशेष समान्तर चतुर्भुज जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर एवं प्रत्येक कोण 90° है। अर्थात् ऐसा आयत जिसकी प्रत्येक भुजा बराबर है, वर्ग के नाम से जानते हैं।

एक वर्ग एक समलम्ब है परन्तु एक समलम्ब वर्ग नहीं है।

एक वर्ग एक समान्तर चतुर्भुज है परन्तु एक समान्तर चतुर्भुज वर्ग है यह आवश्यक नहीं।

एक वर्ग एक आयत है परन्तु एक आयत एक वर्ग है यह आवश्यक नहीं।

एक वर्ग एक समचतुर्भुज है परन्तु एक समचतुर्भुज एक वर्ग है यह आवश्यक नहीं।



चित्र 9.08

AEQGI5

9.05 समान्तर चतुर्भुज के गुणधर्म

प्रमेय 9.1 किसी समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसे दो सर्वांसम त्रिभुज में विभाजित करता है।

सिद्ध करना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है और BD उसका विकर्ण है

सिद्ध करना $\Delta ABD \cong ABCD$

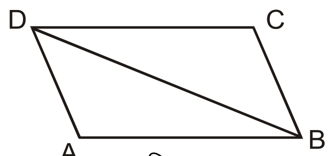
उपपत्ति चित्र 9.09 में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

AB || CD एवं BD एक तिर्यक रेखा है, तो

$\angle ABD = \angle BDC$ एकान्तर कोण . . . (i)

AD || BC, BD तिर्यक रेखा है, तो

$\angle ADB = \angle DBC$ एकान्तर कोण . . . (ii)



चित्र 9.09

ΔABD व ΔCDB में

$\angle ABD = \angle BDC$ (i) से

BD = BD (एक उभयनिष्ठभुजा) (i) से

$\angle ADB = \angle DBC$ एक उभयनिष्ठ भुजा (ii) से

$\Rightarrow$ $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ (ASA नियम से). . . (iii)

प्रमेय 9.2 समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती है।

दिया हुआ चित्र 9.09 में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना AB = CD एवं AD = BC

रचना BD एक विकर्ण खींचिये।

उपपत्ति प्रमेय 9.1 के अनुसार $\Delta ABD \cong \Delta CDB$ करें

अतः ΔABD व ΔCDB की संगत भुजाएँ

AB = CD एवं AD = BC ''इतिसिद्धम''

प्रमेय 9.3 : (प्रमेय 9.2 का विलोम) किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का युग्म समान हो तो वह एक समान्तर चतुर्भुज होता है।

दिया हुआ ABCD एक चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाएँ

AB = CD एवं BC = AD है।

सिद्ध करना ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

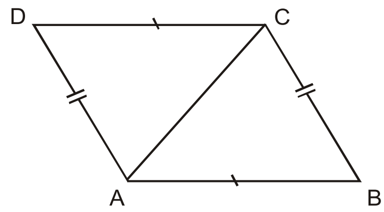
रचना A व C को मिलाया

उपपत्ति ΔABC व ΔCDA में

AB = CD (दिया हुआ)

BC = AD (दिया हुआ)

AC (उभयनिष्ठ)



चित्र 9.10

अतः $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

अर्थात् $\angle CAB = \angle ACD$ एकान्तर कोण

$\Rightarrow$ AB || CD . . . (i)

एवं $\angle ACB = \angle CAD$ एकान्तर कोण

$\Rightarrow$ BC || AD . . . (ii)

(i), (ii) से चतुर्भुज ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम्''

प्रमेय 9.4 समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है: $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$

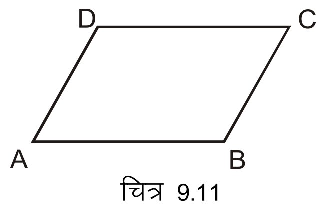
उपपत्तिः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। अतः AB || DC एवं AD || BC है।

$\therefore \quad \angle A + \angle D = 180^\circ$ (क्रमागत अन्तः कोण)... (1)

$\therefore \quad \angle C + \angle D = 180^\circ$ (क्रमागत अन्तः कोण)... (2)

(1) और (2) से

$\angle A + \angle D = \angle C + \angle D \quad \Rightarrow \quad \angle A = \angle C$



चित्र 9.11

इसी प्रकार $\angle B = \angle D$ ''इति सिद्धम''।

अब क्या इस प्रमेय का विलोम भी सत्य है? हाँ सत्य है। चलिये इसे भी सिद्ध करते हैं।

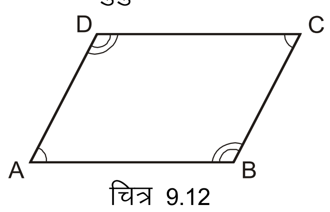
प्रमेय 9.5 एक चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर हों, तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।

दिया है: एक चतुर्भुज ABCD है,

जिसमें $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।

सिद्ध करना है: ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है

उपपत्तिः चतुर्भुज ABCD में दिया है



चित्र 9.12

Δ $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$ है।

जोड़ने पर $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ . . . (1)

परन्तु $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^o$ . . . (2)

(1) और (2) से

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^o$$

अर्थात् रेखा AB, रेखाओं AD और BC को क्रमशः A और B पर प्रतिच्छेद करती है जिससे

$\angle A + \angle B = 180^o$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अन्तः कोण)

अतः $AD \parallel BC$ . . . (3)

इसी प्रकार $\angle C + \angle D = 180^o$

अतः $AB \parallel DC$ . . . (4)

(3) और (4) से

$\Rightarrow$ ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम''।

प्रमेय 9.6 समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

दिया है : एक समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

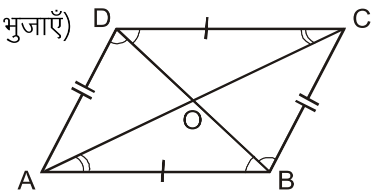
सिद्ध करना है : OA = OC और OB = OD

उपपत्ति : Δ AOD एवं Δ COB में

$\angle ADO = \angle OBC$ (एकान्तर कोण)

$AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$\angle DAO = \angle OCB$ (एकान्तर कोण)



चित्र 9.13

अतः कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम से

$\Delta AOD \cong \Delta COB$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ बराबर होंगी।

अर्थात् OD = OB और OA = OC ''इतिसिद्धम्''।

प्रमेय 9.7 (प्रमेय 9.6 का विलोम)

यदि चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हों, तो वह समान्तर चतुर्भुज होता है।

दिया है : एक चतुर्भुज ABCD जिसके विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर समद्विभाजित करते हैं, अर्थात्

OA = OC और OB = OD

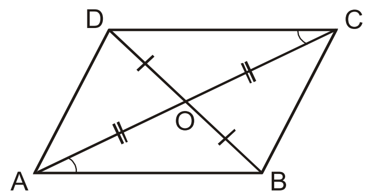
सिद्ध करना है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : Δ AOB और Δ COD में

OA = OC (दिया है)

$\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)

और OB = OD (दिया है)



चित्र 9.14

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$\Delta AOB \cong \Delta COD$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle OAB = \angle OCD$

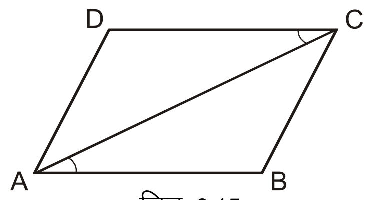
परन्तु यह तिर्यक रेखा AC द्वारा रेखाओं AB और CD पर बने एकान्तर कोण है। अतः

$AB \parallel CD$

इसी प्रकार $AD \parallel BC$

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम''।

प्रमेय 9.8 एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है, यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर बराबर एवं समान्तर हों।



चित्र 9.15

दिया है : एक चतुर्भुज ABCD

जिसमें $AB \parallel DC$ और $AB = DC$ हैं।

सिद्ध करना है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

रचना : A को C से मिलाया।

उपपत्ति : $AB \parallel DC$ और तिर्यक रेखा AC इनको प्रतिच्छेद करती हैं।

अतः $\angle BAC = \angle DCA$ (एकान्तर कोण) $\ldots(1)$

अब ΔABC और ΔCDA में

$AB = DC$ (दिया है)

$\angle BAC = \angle DCA$ [(1) से]

$AC = AC$ (उभयनिष्ठ भुजा)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABC \cong \Delta CDA$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों त्रिर्भुजों के संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle ACB = \angle CAD$

अब AD, BC दो रेखाएँ है और तिर्यक रेखा AC जिनको इस प्रकार प्रतिच्छेद करती हैं कि एकान्तर कोण $\angle ACB$ एवं $\angle CAD$ समान हैं।

अतः $AD \parallel BC$ $\ldots(2)$

अर्थात् $AD \parallel BC$ [(2) से]

$AB \parallel DC$ (दिया है)

अतः ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ''इतिसिद्धम''।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: दो रेखाखण्डों AC और BD एक दूसरे को P पर समद्विभाजित करते हों, तो सिद्ध कीजिये कि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

हलः दिया है: रेखाखण्ड AC और BD,

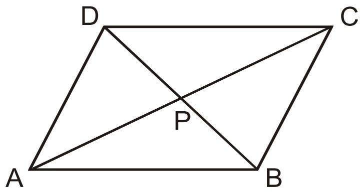
एक दूसरे को P पर समद्विभाजित करते हैं।

सिद्ध करना है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है।

रचना : A, B, C तथा D को क्रमशः मिलाया।

उपपत्ति : ΔAPB और ΔCPD में

चित्रानुसार ABCD एक चतुर्भुज है



चित्र 9.16

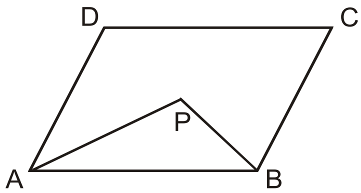
AC एवं BD इसके विकर्ण है

चूंकि AP = PC एवं BP = PD (दिया है) AC व BD को समद्विभाजित करता है।

अतः प्रमेय 9.7 से

ABCD एक समान्तर चुतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम'' ।

उदाहरण 2: एक समान्तर चतुर्भुज ABCD में परिभाषति नहीं है A और B के समद्विभाजक बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। सिद्ध कीजिए कि $\angle APB = 90^o$



चित्र 9.17

हल : दिया है : चित्र 9.17 में, समान्तर चतुर्भुज ABCD के आसन्न कोणों A और B के समद्विभाजक P पर मिलते हैं।

सिद्ध करना है : $\angle APB = 90^o$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का योग 180^o होता है

अतः $$\angle A + \angle B = 180^o \qquad \ldots(1)$$

दिया है कि $\angle PAB = \frac{1}{2}\angle A$

और $\angle PBA = \frac{1}{2}\angle B$

अतः $$\angle PAB + \angle PBA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) \qquad \ldots(2)$$

(1) और (2) से

$$\angle PAB + \angle PBA = 90^o \qquad \ldots(3)$$

ΔAPB में

$$\angle PAB + \angle PBA + \angle APB = 180^o \qquad \ldots(4)$$

(3) और (4) से

$\Rightarrow \quad \angle APB = 90^o$ ''इतिसिद्धम्'' ।

उदाहरण 3: समान्तर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण BD पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित हैं कि DQ = BP. सिद्ध कीजिए कि APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

हलः दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण BD पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार स्थित

हैं कि BP = QD.

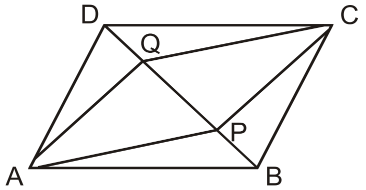
सिद्ध करना है : APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : ΔAQD और ΔCPB में

$AD = BC$ (समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$\angle ADQ = \angle CBP$ (एकान्तर कोण)

$QD = BP$ (दिया है)



चित्र 9.18

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$\Delta AQD \cong \Delta CPB$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $AQ = CP \ldots (1)$

इसी प्रकार ΔCQD और ΔAPB में, हम सिद्ध कर सकते है कि $CQ = AP \ldots (2)$

(1) और (2) से

APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 4: चतुर्भुज **ABCD** के विकर्ण परस्पर बिन्दु **O** पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि **OA : OC = 3 : 2** है। क्या **ABCD** एक समांतर चतुर्भुज है? कारण सहित स्पष्ट कीजिए।

हल : ABCD एक समांतर चतुर्भुज नहीं है, क्योंकि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। यहाँ $OA \neq OC$ है।

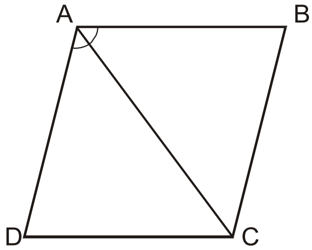
उदाहरण 5: किसी चतुर्भुज के कोण 3 : 4 : 4 : 7 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि चतुर्भुज के कोण $3x$, $4x$, $4x$ और $7x$ हैं।

इसलिए, $3x + 4x + 4x + 7x = 360^\circ$

या $18x = 360^\circ$, अर्थात् $x = 20^\circ$

इस प्रकार, वांछित कोण 60°, 80°, 80° और 140° हैं।



चित्र 9.19

उदाहरण 6: एक समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसके एक कोण को समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि वह विकर्ण उस कोण के सम्मुख कोण को भी समद्विभाजित करेगा।

हलः आइए दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार आकृति खींचें (चित्र 7.19)। इसमें विकर्ण AC समांतर चतुर्भुज ABCD के $\angle BAD$ को समद्विभाजित करता है। अर्थात् यह दिया है कि $\angle BAC = \angle DAC$ है। हमें सिद्ध करना है कि $\angle BCA = \angle DCA$ है।

$AB \parallel DC$ है तथा AC एक तिर्यक रेखा है।

अतः $\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर कोण) $\ldots (1)$

इसी प्रकार, $\angle DAC = \angle BCA$ $(AD \parallel BC$ से) $\ldots (2)$

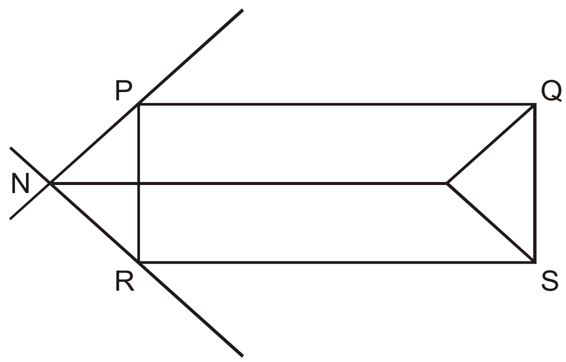
परंतु यह दिया है कि $\angle BAC = \angle DCA$

अतः (1), (2) और (3) से हमें प्राप्त होता है

$\angle BCA = \angle DCA$ ''इतिसिद्धम्''

उदाहरण 7: PQ और RS दो बराबर और समांतर रेखाखंड हैं। बिन्दु M, जो PQ या RS पर स्थित नहीं है, को Q और S से मिलाया जाता है। P से होकर जाती हुई QM के समांतर रेखा और R से होकर जाती हुए SM के समांतर रेखा परस्पर N पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि रेखाखंड MN और PQ परस्पर बराबर और समांतर हैं।

हल: हम दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार आकृति खींचते हैं। (चित्र 9.20)



चित्र 9.20

यह दिया है कि $PQ = RS$ और $PQ \parallel RS$ है। अतः PQSR एक समांतर चतुर्भुज है।

अतः, $PR = QS$ और $PR \parallel QS$ है। ...(1)

अब, $PR \parallel QS$

इसलिए, $\angle RPQ + \angle PQS = 180^\circ$ (तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण)

अर्थात् $\angle RPQ + \angle PQM + \angle MQS = 180^\circ$ ...(2)

साथ ही, $PN \parallel QM$ (रचना से)

$\angle NPR + \angle RPQ + \angle PQM = 180^\circ$ ...(3)

अतः, $\angle NPR = \angle MQS$ [(2) और (3) से] ...(4)

इसी प्रकार, $\angle NRP = \angle MSQ$ ...(5)

इसलिए, $\Delta PNR \cong \Delta QMS$ [ASA, (1), (4) और (5) के प्रयोग से]

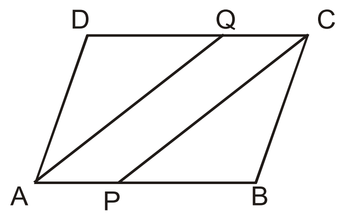
अतः $PN = QM$ और $NR = MS$

क्योंकि $PN \parallel QM$ है, अतः PQMN एक समांतर चतुर्भुज है

अतः $MN = PQ$ और $NM \parallel PQ$ है। ''इतिसिद्धम्''

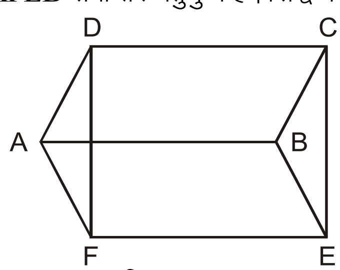
प्रश्नमाला 9.1

1. एक चतुर्भुज के कोण 3 : 5 : 9 : 13 के अनुपात में हैं। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।
2. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं जो OA = 3 cm और OD = 2 cm है, तो AC और BD की लंबाई ज्ञात कीजिए।
3. एक समांतर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लंब होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
4. क्या कोण 110°, 80°, 70° और 95° किसी चतुर्भुज के कोण हो सकते हैं? क्यों और क्यों नहीं
5. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण अधिक कोण हो सकते हैं? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।
6. एक चतुर्भुज का एक कोण 108° है तथा अन्य तीनों कोण बराबर हैं। तीनों बराबर कोणों में से प्रत्येक को ज्ञात कीजिए।
7. ABCD एक समलंब है जिसमें $AB \parallel DC$ और $\angle A = \angle B = 45^\circ$ है। इस समलंब के कोण C और D ज्ञात कीजिए।
8. एक समांतर चतुर्भुज के एक अधिक कोण के शीर्ष से खींचे गए उस समांतर चतुर्भुज के दो शीर्षलंबों के बीच का कोण 60° है। इस समांतर चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।
9. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण, AC पर बिन्दु E और F इस प्रकार स्थित हैं कि AE = CF है। दर्शाइए कि BFDE एक समांतर चतुर्भुज है।
10. चित्र 9.21 में, ABCD एक समान्तर चतर्भुज है। AQ और CP क्रमशः $\angle A$ और $\angle C$ के समद्विभाजक हैं। सिद्ध कीजिए कि APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है।



चित्र 9.21

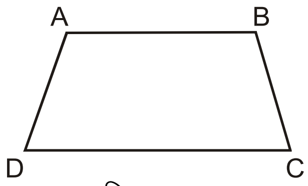
11. चित्र 9.22 में, ABCD और AFEB समान्तर चतुर्भुज है। सिद्ध कीजिए कि CDFE समान्तर चतुर्भुज है।



चित्र 9.22

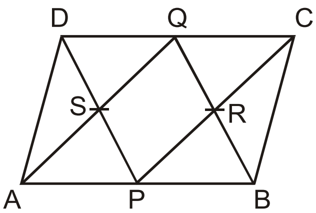
12. ABCD एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण BD पर A और C से डाले गये लम्ब क्रमशः AP और CQ हैं। सिद्ध कीजिए कि AP = CQ.

13. चित्र 9.23 में, ABCD एक चतुर्भुज है। जिसमें $AB \parallel DC$ और $AD = BC$ तो सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$



चित्र 9.23

14. चित्र 9.24 में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। P और Q क्रमशः सम्मुख भुजाओं AB और CD के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि PRQS एक समान्तर चतुर्भुज है।



चित्र 9.24

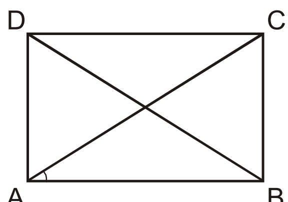
9.06 विशेष समान्तर चतुर्भुज एवं उनके गुणधर्मः

AEZCJS

अनुच्छेद 9.4 में हमने समान्तर चतुर्भुज की कुछ विशेष आकृतियों के बारे में संक्षिप्त में जानकारी ली है।

आइए अब हम उन विशेष समान्तर चतुर्भुजों में विद्यमान गुणों को कुछ प्रमेयों के माध्यम से समझने का प्रयत्न करते हैं।

प्रमेय 9.9 यदि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समान हों, तो वह एक आयत होता है।



चित्र 9.25

दिया है : ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, जिससे $AC = BD$

सिद्ध करना : ABCD एक आयत है।

उपपत्ति : ΔABC और ΔBAD में

$BC = AD$ (स.च. की सम्मुख भुजाएँ)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AC = BD$ (दिया है)

अतः भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$\Delta ABC \cong \Delta BAD$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण समान होंगे।

अर्थात् $\angle CBA = \angle DAB$

परन्तु यह तिर्यक के एक ही ओर के अन्त कोण हैं।

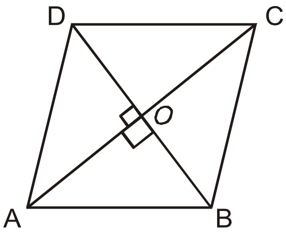
$\therefore \quad \angle DAB + \angle CBA = 180^\circ$

$\therefore \quad \angle DAB = \angle CBA = 90^\circ$

अतः ABCD एक आयत है। "इतिसिद्धम्"।

विलोम : एक आयत के विकर्ण परस्पर बराबर होते हैं।

प्रमेय 9.10 यदि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत् हों, तो वह एक समचतुर्भुज होता है।



चित्र 9.26

दिया है : समान्तर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर लम्बवत् है।

सिद्ध करना है : ABCD एक समचतुर्भुज है।

उपपत्ति : ΔAOB और ΔCOB में

$OB = OB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$\angle AOB = \angle BPC = 90^o$ (दिया है)

$AO = CO$ (समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।)

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$\Delta AOB \cong \Delta COB$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $AB = BC$

अतः ABCD एक समचतुर्भुज है। "इतिसिद्धम्"

विलोम : एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्वबत् होते हैं।

प्रमेय 9.11 यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बराबर एवं लम्बवत् हो, तो यह एक वर्ग होता है।

दिया है : ABCD एक समानतर चतुर्भुज है, जिसमें $AC = BD$ एवं $AC \perp BD$ है।

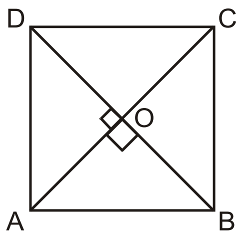
सिद्ध करना है : ABCD एक वर्ग है।

उपपत्ति : ΔABO और ΔADO में

$BO = OD$ (ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है)

$\angle AOB = \angle AOD = 90^o$ (दिया है)

$AO = AO$ (उभयनिष्ठ)



चित्र 9.27

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ABO \cong \Delta ADO$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी।

अर्थात् $AB = AD$ ...(1)

अब ΔABD और ΔBAC में,

$BD = AC$ (दिया है)

$AB = AB$ (उभयनिष्ठ भुजा)

$AD = BC$ (सम्मुख भुजाएँ)

अतः भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$$\Delta ABD \cong \Delta BAC$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत कोण समान होंगे।

$$\angle DAB = \angle CBA \qquad \ldots(2)$$

हम जानते हैं कि, समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोणों का योग 180^o होता है।

$$\angle DAB + \angle CBA = 180^o \qquad \ldots(3)$$

(2) और (3) से

$$\angle DAB = \angle CBA = 90^o \qquad \ldots(4)$$

एवं (1) और (4) से

अतः ABCD एक वर्ग है। ''इतिसिद्धम''।

विलोम : एक वर्ग के विकर्ण बराबर और परस्पर लम्बवत् होते हैं।

AF98LF

9.07 मध्य बिन्दु प्रमेय

आपने अब तक त्रिभुज और चतुर्भुज के अनेक गुणों के बारे में अध्ययन किया है। चलिए अब हम एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य बिन्दु सम्बन्धी एक अन्य गुण पर निम्न क्रिया कलाप के माध्यम से विचार करते हैं।

प्रमेय 9.12 त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखा खण्ड तीसरी भुजा के समान्तर एवं उसका आधा होता है।

दिया है : त्रिभुज ABC में, बिन्दु D और E क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु है।

सिद्ध करना है : (i) $DE \parallel BC$ (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$

रचना : DE को F तक बढ़ाया,

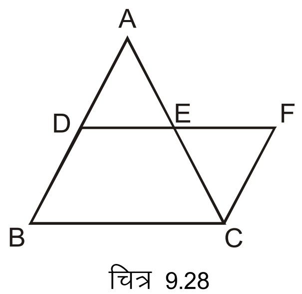
जहाँ $EF = DE$, C को F से मिलाया।

उपपत्ति : ΔADE और ΔCFE में,

$AE = CE$ (दिया है)

$\angle AED = \angle CEF$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$DE = EF$ (रचना से)



चित्र 9.28

अतः भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

$$\Delta ADE \cong \Delta CFE$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएँ और कोण समान होंगे।

$\therefore \quad AD = CF$

$\angle EAD = \angle ECF$

तिर्यक रेखा AC रेखाओं AB और CF को प्रतिच्छेद करती है और एकान्तर कोण EAD तथा ECF बराबर है।

$AD \parallel CF$ और $BD \parallel CF$

परन्तु दिया है कि $AD = BD \ldots (3)$

(1) और (3) से

$BD = CF$

अर्थात् $BD = CF$ और $BD \parallel CF$

अतः BCFD एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ DF एवं BC भी समान और समान्तर है।

या $DE \parallel BC$

$\therefore \quad DE = \frac{1}{2}DF$ (रचना से)

अतः $DE = \frac{1}{2}BC$ ''इतिसिद्धम्''।

प्रमेय 9.13 : (प्रमेय 9.12 का विलोम)

त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से, एक अन्य भुजा के समान्तर खींची गई रेखा, तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

दिया है : चित्र 9.29 में, त्रिभुज ABC की भुजा AB का मध्य बिन्दु D है $DE \parallel BC$ और AC को E पर काटती है।

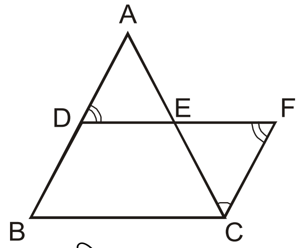
सिद्ध करना है : $AE = EC$

रचना : BD के समान्तर रेखा CF खींची, जो DE (बढ़ी हुई) को F पर प्रतिच्छेद करती है।

$\because \quad BC \parallel CF$ (दिया है)

$BD \parallel CF$ (रचना से)

अतः BCFD एक समान्तर चतुर्भुज है



चित्र 9.29

उपपत्ति : $\because \quad BD = CF \quad \ldots (1)$

परन्तु $BD = AD$ (दिया है)

$\therefore \quad AD = CF$

अब ΔADE और ΔCFE में

$\angle ADE = \angle CFE$ (एकान्तर कोण)

$AD = CF$ [(1) से]

$\angle DAE = \angle ECF$ (एकान्तर कोण)

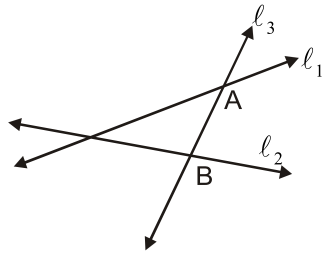
अतः कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम से

$\Delta ADE \cong \Delta CFE$

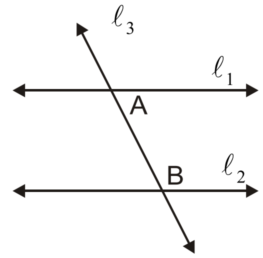
अतः $AE = CE$ ''इतिसिद्धम्''।

9.08 अन्तः खण्ड (Intercept):

यदि एक समतल में दो रेखाएँ ℓ_1 और ℓ_2 हों और यदि एक तीसरी रेखा ℓ_3 उन्हें भिन्न–भिन्न बिन्दुओं A और B पर प्रतिच्छेद करती हो, तो रेखाखण्ड AB दी गई रेखाओं ℓ_1 और ℓ_2 द्वारा तीसरी रेखा ℓ_3 पर बनाया गया अन्तः खण्ड कहलाता है।



चित्र 9.30



चित्र 9.31

यहाँ हम तीन समान्तर रेखाओं के लिए निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे। इस प्रमेय का विस्तार तीन से अधिक रेखाओं के लिए भी किया जा सकता है।

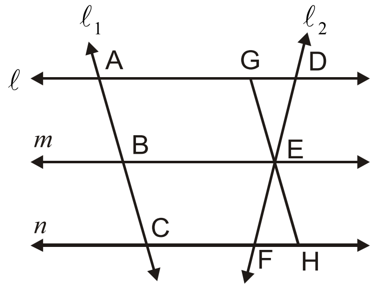
AFI4N3

प्रमेय 9.14 यदि तीन या अधिक समान्तर रेखाएँ हो, और उनके द्वारा एक तिर्यक रेखा पर बनाये गये अन्तःखण्ड बराबर हो, तो किसी अन्य तिर्यक रेखा पर संगत अन्तःखण्ड भी बराबर होंगे।

दिया है : चित्र 9.32 में, ℓ, m, n तीन समान्तर रेखाएँ हैं और दो तिर्यक रेखाएँ ℓ_1 तथा ℓ_2 उनको क्रमशः A, B, C और D, E, F बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं तथा $AB = BC$ है।

सिद्ध करना : $DE = EF$

रचना : तिर्यक रेखा ℓ_1 के समान्तर रेखा GH खींची, जो E से गुजरती है।



चित्र 9.32

उपपत्ति : ℓ एवं m समान्तर रेखाएँ हैं। अतः

$AG \parallel BE$

एवं $AB \parallel GE$ (रचना से)

$\therefore$ ABEG एक समान्तर चतुर्भुज है।

अतः $AB = GE$ ... (1)

इसी प्रकार BCHE भी एक समान्तर चतुर्भुज है।

अतः $BC = EH$ ... (2)

दिया हुआ है कि $AB = BC$

अतः $GE = EH$ ... (3)

पुनः ℓ और m समान्तर रेखाएँ है और तिर्यक रेखा ℓ_2 उनको प्रतिच्छेद करती हैं। अतः

$\angle GDE = \angle EFH$ (एकान्तर कोण) ... (4)

अब $\Delta\, GDE$ और $\Delta\, HFE$ में

$\angle GDE = \angle EFH$ [(4) से]

$GE = EH$ [(3) से]

$\angle GED = \angle FEH$ (शीर्षाभिमुख कोण)

कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम से

$\Delta\, GDE \cong \Delta\, HFE$

अतः सर्वांगसमत त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान होंगी

अर्थात् $DE = EF$ ''इतिसिद्धम्''।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 8. एक समबाहु त्रिभुज की भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिन्दु क्रमशः D, E और F है। सिद्ध कीजिए। कि Δ DEF एक समबाहु त्रिभुज है।

हलः दिया है : एक ΔABC जिसकी भुजाओं BC, CA और AB के मध्यबिन्दु क्रमशः D, E और F है।

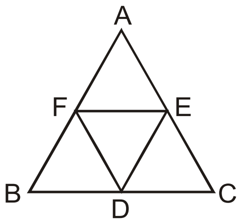
सिद्ध करना है : ΔDEF एक समबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति : ΔABC में D, E और F क्रमशः BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं,

अतः $DE = \frac{1}{2}AB$ ...(1)

$EF = \frac{1}{2}BC$ ...(2)

$FD = \frac{1}{2}AC$ ...(3)



चित्र 9.33

परन्तु ΔABC एक समबाहु है

अतः $AB = BC = AC$

(1),(2) और (3) से

$DE = EF = FD$

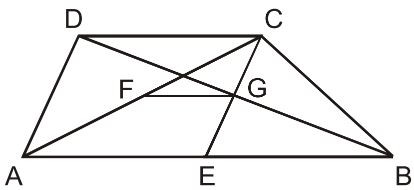
अर्थात् ΔDEF एक समबाहु त्रिभुज है। '''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिए कि एक समलम्ब चतुर्भुज के विकर्ण मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उसकी समान्तर भुजाओं के समान्तर तथा उनके अन्तर की आधी होगी।

हल : दिया है : एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD है। $AB \parallel DC$ है एवं विकर्ण AC और BD के मध्य बिन्दु क्रमशः F और G हैं।

सिद्ध करना है : (i) $FG \parallel AB$

(ii) $FG = \frac{1}{2}(AB - CD)$



चित्र 9.34

रचना : CG को मिलाते हुए आगे इस प्रकार बढ़ाया कि यह AB पर मिल E बिन्दु पर मिले।

उपपत्तिः ΔCDG और ΔEBG में

$\angle CDG = \angle EBG$ (एकान्तर कोण)

$DG = GB$ (दिया है)

$\angle DCG = \angle BEG$ (एकान्तर कोण)

$\Delta CDG \cong \Delta EBG$ (कोण–भुजा–कोण सर्वांगसमता नियम)

अतः $CG = EG$ ...(1)

$CD = EB$ ...(2)

अब ΔACE में, F और G क्रमशः भुजाओं AC और CE के मध्यबिन्दु हैं।

अतः $FG \parallel AE$ और $FG = \frac{1}{2} AE$ ...(3)

परन्तु $AE = AB - EB$

$AE = AB - CD$ [(2) से] ...(4)

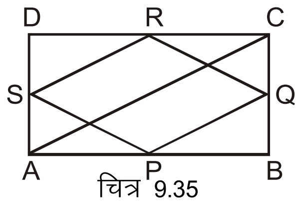
(3) और (4) से

$$FG = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2}(AB - CD)$$

और $FG \parallel AE$

$\Rightarrow$ $FG \parallel AB$ ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 10. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है।



चित्र 9.35

हल : दिया है : चित्र 9.35 में, ABCD एक चतुर्भुज है, जिसकी भुजाओं के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q, R और S हैं।

सिद्ध करना है : PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है।

रचना : AC को मिलाया।

उपपत्ति : ΔABC में, P और Q क्रमशः भुजाओं AB और BC के मध्य बिन्दु हैं। अतः प्रमेय 9.12 से

$PQ \parallel AC$ और $PQ = \frac{1}{2} AC$ ...(1)

इसी प्रकार में, S और R क्रमशः भुजाओं AD और DC के मध्य बिन्दु है।

अतः $SR \parallel AC$

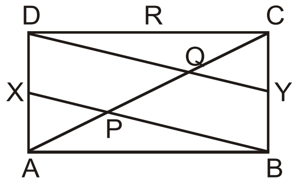
और $SR = \frac{1}{2} AC$ ...(2)

(1) और (2) से

$PQ \parallel SR$ और $PQ = SR = \frac{1}{2} AC$

अर्थात् PQRS एक समान्तर चतुर्भुज है। ''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 11. चित्र 9.36 में, X और Y क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AD और BC के मध्य–बिन्दु हैं। साथ ही, BX और DY क्रमशः AC को P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं। दर्शाइए कि AP = PQ = QC है।



चित्र 9.36

हल : आकृति 9.36 में X और Y क्रमशः समान्तर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AD और BC के मध्य बिन्दु है। साथ BX और DY क्रमशः AC को P और Q पर प्रतिच्छेद करते है।

दर्शाना है $AP = PQ = QC$

$AD = BC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

अतः $DX = BY\left(\frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC\right)$

साथ ही, $DX \mid BY$ (क्योंकि $AD \parallel BC$)

अतः, XBYD एक समांतर चतुर्भुज है। (सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर और समांतर है)

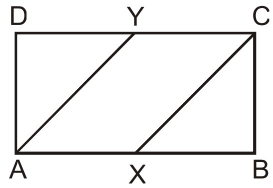
अर्थात् $PX \parallel QD$

अतः $AP = PQ$ (ΔAQD से, जहाँ X रेखाखंड AD का मध्य–बिन्दु है) (I)

इसी प्रकार, ΔCPB से, $CQ = PQ \ldots (2)$

इस प्रकार, $AP = PQ = CQ$ [(1) और (2) से]

उदाहरण 12. चित्र 9.37 में, AX और CY क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण A और C के समद्विभाजक हैं। दर्शाइए कि AX || YC है।



चित्र 9.37

हलः $\angle A = \angle C$ (समांतर चतुर्भुजABCD के सम्मुख कोण)

अतः $\frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle C$

अर्थात् $\angle YAX = \angle YCX$ ...(1)

साथ ही, $\angle AYC + \angle YCX = 180^\circ$ (क्योंकि $YA \parallel CX$) ...(2)

अतः $\angle AYC + \angle YAX = 180^\circ$ [(1) और (2) से]

इसलिए, $AX \parallel YC$ (क्योंकि तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंतः कोण संपूरक हैं)

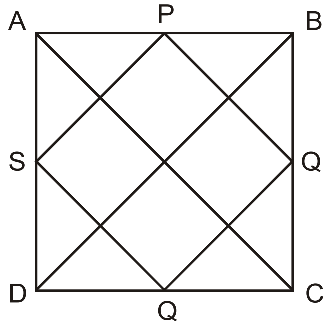
उदाहरण 13. दर्शाइए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में मिलाने पर बना चतुर्भुज एक आयत होता है।

हल : मान लीजिए कि ABCD एक समचतुर्भुज है तथा P, Q, R और S क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य–बिन्दु हैं (चित्र 9.38) AC और BD को मिलाइए।

ΔABD से, हमें प्राप्त हैः

$SP = \frac{1}{2}BD$ और

$SP \parallel DB$ (क्योंकि S और P मध्य–बिन्दु है)



चित्र 9.38

इसी प्रकार, $RQ = \frac{1}{2}BD$ और $RQ \parallel DB$

अतः $SP = RQ$ और $SP \parallel RQ$

इसलिए, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

साथ ही, $AC \perp BD$ (समचतुर्भुज के विकर्ण लंब होते हैं)

इसके अतिरिक्त, $PQ \parallel AC$ (Δ BAC से)

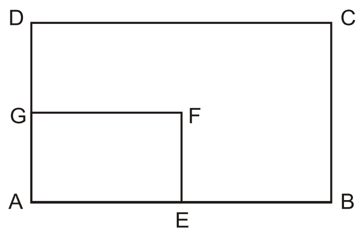
क्योंकि $SP \mid BD$, $PQ \parallel AC$ और $AC \perp BD$ है

इसलिए हमें प्राप्त होता है : $SP \perp PQ$ अर्थात् $\angle SPQ = 90^\circ$ ...(2)

अतः PQRS एक आयत है [(1) और (2) से] ''इतिसिद्धम्''

प्रश्नमाला 9.2

1. चित्र 9.39 में, ABCD और AEFG दो समांतर चतुर्भुज हैं यदि $\angle C = 55^\circ$ है, तो $\angle F$ निर्धारित कीजिए।



चित्र 9.39

2. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण न्यून कोण हो सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

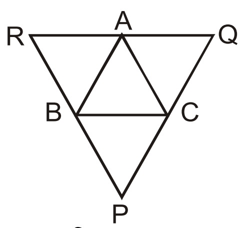
3. क्या किसी चतुर्भुज के सभी कोण समकोण हो सकते हैं? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

4. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं। यदि $\angle A = 35^\circ$ है, तो $\angle B$ निर्धारित कीजिए।

5. एक चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण बराबर हैं। यदि AB = 4 cm है, तो CD निर्धारित कीजिए।

6. ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसमें D से AB पर शीर्षलंब AB को समद्विभाजित करता है। समचतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।

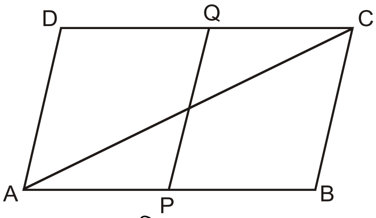
7. एक त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B और C से होकर, क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के समांतर रेखाएँ RQ, PR और QP चित्र 9.40 में दर्शाए अनुसार खींची गई हैं। दर्शाइए कि $BC = \frac{1}{2} = QR$ है।



चित्र 9.40

8. D, E और F क्रमशः एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य–बिन्दु हैं। दर्शाइए कि Δ DEF भी एक समबाहु त्रिभुज है।

9. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाओं AB और CD पर क्रमशः बिन्दु P और Q इस प्रकार लिए गए हैं कि AP = CQ है (चित्र 9.41) दर्शाइए कि AC और PQ परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

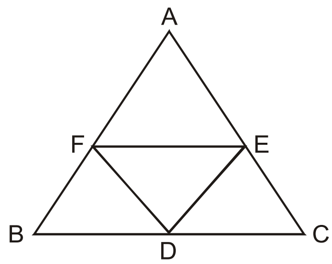


चित्र 9.41

10. E एक समलंब ABCD की भुजा AD का मध्य–बिन्दु है, जिसमें AB || DC है। E से होकर AB के समांतर खींची गई रेखा BC को F पर प्रतिच्छेद करती है। दर्शाइए कि F भुजा BC का मध्य–बिन्दु है। [संकेत : AC को मिलाइए]

11. Δ ABC में, AB = 5 cm, BC = 8 cm और CA = 7 cm हैं। यदि D और E क्रमशः AB और BC के मध्य–बिन्दु है, तो DE की लंबाई निर्धारित कीजिए।

12. चित्र 9.42 में, यह दिया है कि BDEF और FDCE समांतर चतुर्भुज हैं। क्या आप कह सकते हैं कि BD = CD है? क्यों और क्यों नहीं?

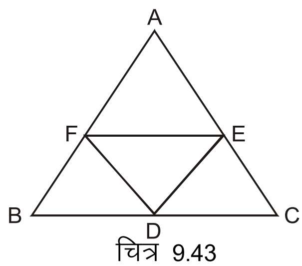


चित्र 9.42

13. चित्र 9.43 में, D, E और F क्रमशः भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु हैं। यदि AB = 4.3 सेमी, BC = 5.6 सेमी और AC = 3.9 सेमी हों, तो निम्नलिखित का परिमाप ज्ञात कीजिए।

(i) Δ DEF

(ii) चतुर्भुज BDEF



चित्र 9.43

14. सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की क्रमागत भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाकर बनाया गया चतुर्भुज भी एक वर्ग होता है।

15. एक चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्वबत् हैं। सिद्ध कीजिए कि उसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से निर्मित चतुर्भुज एक आयत होता है।

16. सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण को समद्विभाजित करने वाली माध्यिका कर्ण की आधी होती है

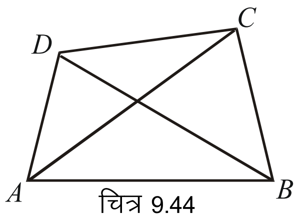
17. सिद्ध कीजिए कि एक आयत की भुजाओं के युग्मों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से एक समचतुर्भुज बनता है।

चतुर्भुजों की रचनाएँ (Construction of Quadrilaterals)

9.09 चतुर्भुज

चार भुजाओं से घिरी समतलीय आकृति को चतुर्भुज कहतें हैं। इसके आमने–सामने के बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को विकर्ण (Diagonal) कहते हैं।

चित्र 9.44 में चतुर्भुज की AB, BC, CD और DA चार भुजाएँ हैं। A, B, C, D शीर्ष बिन्दु हैं तथा AC व BD चतुर्भुज के विकर्ण हैं।



चित्र 9.44

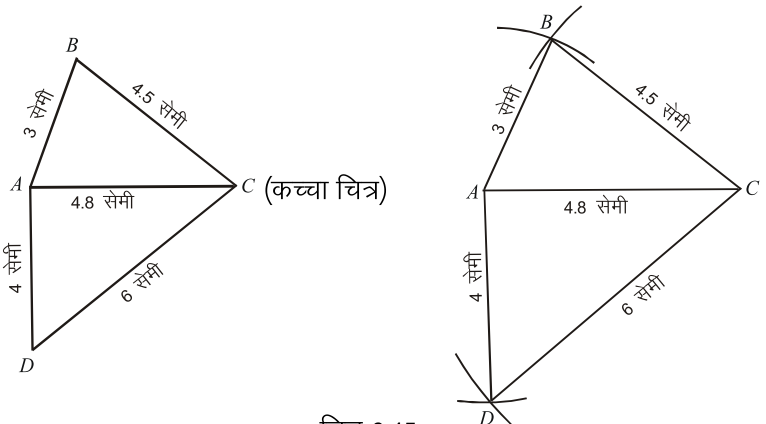
9.10 चतुर्भुज की रचना :

जब किसी चतुर्भुज की रचना करनी हो तो इससे पूर्व रचना करने संबंधी दिये गए तथ्यों को कच्चा चित्र खींचकर अंकित कर लेना चाहिए। प्रायः चतुर्भुज की रचना में विकर्ण का अपना विशेष महत्व होता है। इसलिए कच्चे चित्र में विकर्ण खींचकर विचार अवश्य कर लेना चाहिये। क्या इससे किसी त्रिभुज की रचना की जा सकती है ? त्रिभुज बन जाने पर चतुर्भुज खींचकर यही बात देखनी चाहिये। त्रिभुज बन जाने पर, चतुर्भुज की रचना पूर्ण की जा सकती है। यह आवश्यक नहीं कि प्रत्येक स्थिति में विकर्ण खींचा ही जाये। कभी–कभी बिना विकर्ण खींचे भी चतुर्भुज की रचना की जा सकती है।
इस अध्याय में दी गई निर्मेयों से इसको स्पष्टतया समझा जा सकता है।

निर्मेय 9.1 चतुर्भुज की रचना करना जब चार भुजाएँ और एक विकर्ण दिये गए हों।

एक चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 3$ सेमी, $BC = 4\cdot5$ सेमी, $CD = 6$ सेमी, $DA = 4$ सेमी और $AC = 4\cdot8$ सेमी है।

रचना : सर्वप्रथम दी गई मापों के आधार पर कच्चा चित्र खींचकर उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए।



चित्र 9.45

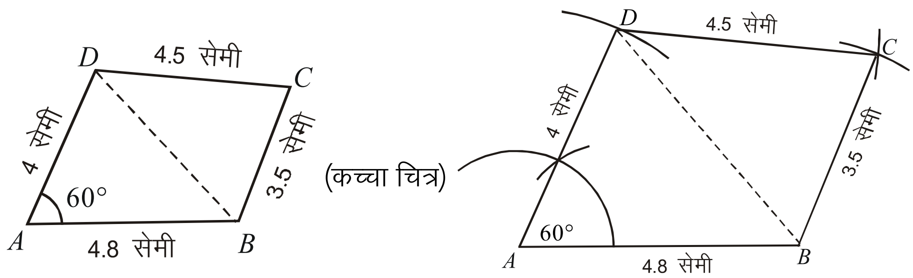
कच्चे चित्र के अनुसार, $AC = 4\cdot8$ सेमी खींचिए। बिन्दु A तथा C से क्रमशः 3 सेमी तथा $4\cdot5$ सेमी की त्रिज्या से चाप लगाकर त्रिभुज ABC पूर्ण कीजिए। इसी प्रकार AD व CD की दूरी की त्रिज्या से चाप लगाकर त्रिभुज ACD पूर्ण कीजिए।
$ABCD$ अभीष्ट चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.2 चतुर्भुज की रचना करना जिसमें चार भुजाएँ और एक कोण दिये गए हो।

एक चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4 \cdot 8$ सेमी, $BC = 3 \cdot 5$ सेमी, $CD = 4 \cdot 5$ सेमी, $DA = 4$ सेमी और $\angle A = 60°$ है।

रचना : दी गई मापों के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर संगत मापों को अंकित कीजिए।

कच्चे चित्र के अनुसार, $AB = 4 \cdot 8$ सेमी खींचिए, बिन्दु A पर $60°$ का कोण बनाकर, उसमें से 4 सेमी की दूरी AD काटिए। D व B बिन्दुओं को केन्द्र मानकर क्रमशः $4 \cdot 5$ सेमी, और $3 \cdot 5$ की दूरी की त्रिज्या से चाप लगाइए। ये चाप जहाँ पर परस्पर काटे, उस बिन्दु C को D व B से मिलाइये।



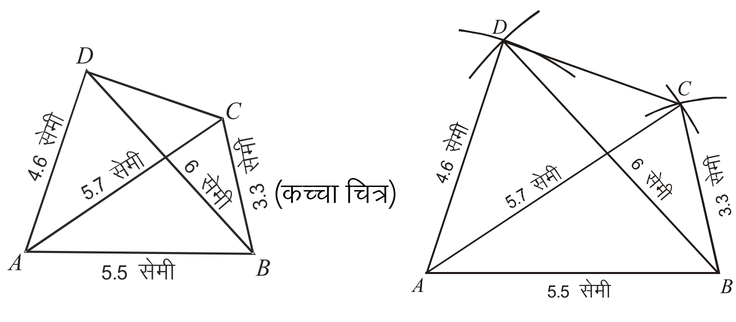
चित्र 9.46

$ABCD$ अभीष्ट चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.3 चतुर्भुज की रचना करना जब तीन भुजाएँ एवं दो विकर्ण दिये गए हों।

एक चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 5 \cdot 5$ सेमी, $BC = 3 \cdot 3$ सेमी, $AD = 4 \cdot 6$ सेमी तथा विकर्ण $AC = 5 \cdot 7$ सेमी और विकर्ण $BD = 6$ सेमी।

रचना : दी गई मापों के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए।



चित्र 9.47

कच्चे चित्र के अनुसार $AB = 5 \cdot 5$ सेमी खींचिए। A और B को केन्द्र मानकर क्रमशः $4 \cdot 6$ सेमी तथा 6 सेमी की त्रिज्या से त्रिभुज ABD बनाइए। इसी प्रकार A और B को केन्द्र मानकर क्रमशः $5 \cdot 7$ सेमी तथा $3 \cdot 3$ सेमी की त्रिज्या से चाप लगाकर त्रिभुज ABC बनाइए। C और D को मिलाइए।

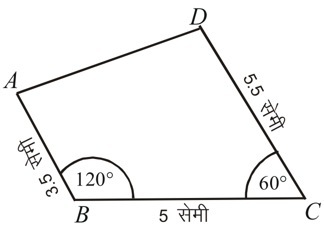
$ABCD$ अभीष्ट चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.4 चतुर्भुज की रचना करना, जब तीन भुजाएँ और इनके बीच के दो कोण दिए गए हों।

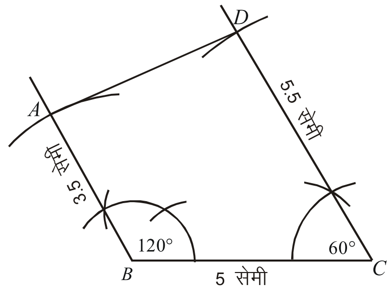
एक चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 3\cdot5$ सेमी, $BC = 5$ सेमी, $CD = 5\cdot5$ सेमी, $\angle B = 120°$ और $\angle C = 60°$ हो।

रचना : दी गई मापों के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए।

कच्चे चित्रानुसार $BC = 5$ सेमी खींचिए। B व C पर क्रमशः $120°$ तथा $60°$ का कोण बनाकर, उनमें से दी गई मापों के अनुसार क्रमशः$3\cdot5$ सेमी और $5\cdot5$ सेमी की दूरी काटिए। A और D को मिलाकर चतुर्भुज पूर्ण कीजिए।



(कच्चा चित्र)



चित्र 9.48

$ABCD$ अभीष्ट चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.5 चतुर्भुज की रचना करनाए जब दो क्रमागत भुजाएँए उनके बीच का कोण एवं दो अन्य कोण दिए गए हों।

एक चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 5$ सेमी, $AD = 5\cdot3$ सेमी, $\angle A = 60°$, $\angle C = 105°$ और $\angle D = 90°$.

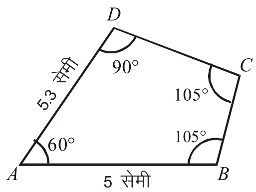
रचना : $\because \quad \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

और $\quad \angle A + \angle C + \angle D = 60° + 105° + 90° = 255°$

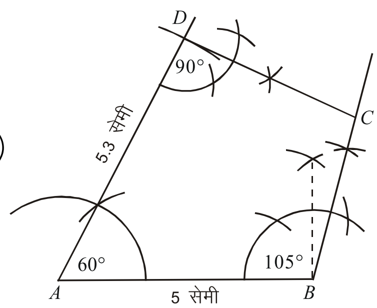
$\therefore \quad \angle B = 360° - 255° = 105°$

दिये गए तथ्यों के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर उसमें दी गई मापों को अंकित कीजिए।

$AB = 5$ सेमी खींचिए, A व B पर क्रमशः $60°$ और $105°$ कोण बनाइए। $AD = 5\cdot3$ सेमी काटिए, D पर $90°$ का कोण बनाकर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए।



(कच्चा चित्र)



चित्र 9.49

$ABCD$ अभीष्ट चतुर्भुज है।

प्रश्नमाला 9.3

दिये गए निम्न तथ्यों से चतुर्भुज की वर्णन सहित रचना कीजिए।

1. चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = 3 \cdot 5$ सेमी, $BC = 4 \cdot 8$ सेमी, $CD = 5 \cdot 1$ सेमी, $AD = 4 \cdot 4$ सेमी और एक विकर्ण $AC = 5 \cdot 9$ सेमी।
2. चतुर्भुज $PQRS$ में, $PQ = 4$ सेमी, $QR = 3$ सेमी, $QS = 4 \cdot 8$ सेमी, $PS = 3 \cdot 5$ सेमी और $PR = 5$ सेमी।
3. चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = 4$ सेमी, $BC = 4 \cdot 5$ सेमी, $CD = 3 \cdot 5$ सेमी, $AD = 3$ सेमी और $\angle A = 60°$ ।
4. चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = 3 \cdot 5$ सेमी, $BC = 3$ सेमी, $AD = 2 \cdot 5$ सेमी, $AC = 4 \cdot 5$ सेमी और $BD = 4$ सेमी।
5. चतुर्भुज $PQRS$ में, $PQ = 3$ सेमी, $QR = 4$ सेमी, $PS = 4 \cdot 5$ सेमी, $PR = 6$ सेमी और $QS = 5 \cdot 5$ सेमी।
6. चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = BC = 3 \cdot 0$ सेमी, $AD = 5$ सेमी, $\angle A = 90°$ और $\angle B = 120°$ ।
7. चतुर्भुज $ABCD$ में, $AB = 3 \cdot 8$ सेमी, $BC = 2 \cdot 5$ सेमी, $CD = 4 \cdot 5$ सेमी, और $\angle B = 30°$ तथा $\angle C = 150°$.
8. चतुर्भुज $PQRS$ में, $PQ = 3$ सेमी, $QR = 3 \cdot 5$ सेमी, $\angle Q = 90°$ और $\angle P = 105°$, $\angle R = 120°$ ।
9. चतुर्भुज $PQRS$ में, $PQ = 2 \cdot 5$ सेमी, $QR = 3 \cdot 7$ सेमी, $\angle Q = 120°$, $\angle S = 60°$ और $\angle R = 90°$ ।

9.11 समान्तर चतुर्भुज और आयत आदि की रचनाएँ

समान्तर चतुर्भुज, आयत, वर्ग, समचतुर्भुज की रचनाओं को करने से पूर्व निम्नलिखित जानकारी प्राप्त कर लेना आवश्यक है।

1. समान्तर चतुर्भुज में :

(i) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

(ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

(iii) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(iv) प्रत्येक विकर्ण समान्तर चतुर्भुज को समद्विभाजित करता है।

2. आयत में :

(i) प्रत्येक कोण समकोण होता है।

(ii) सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

(iii) विकर्ण परस्पर बराबर होते हैं।

(iv) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

3. वर्ग में :

(i) चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(ii) प्रत्येक कोण समकोण होता है।

(iii) विकर्ण बराबर होते हैं।

(iv) विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

(v) प्रत्येक विकर्ण भुजा के साथ 45° का कोण बनाता है।

4. समचतुर्भुज में :

(i) चारों भुजाएँ बराबर होती हैं।

(ii) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

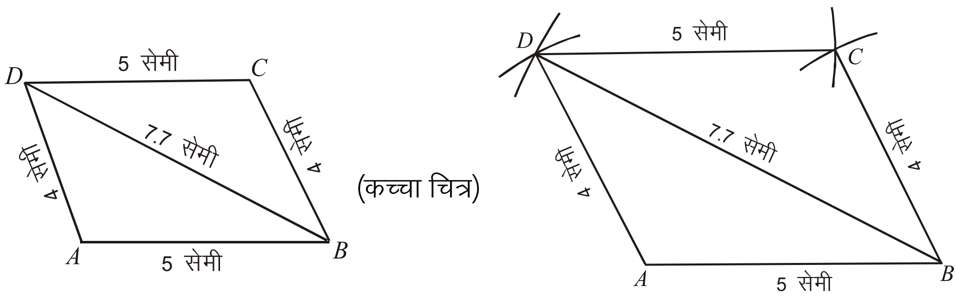
(iii) विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

(iv) विकर्ण शीर्ष कोणों के अर्द्धक होते हैं।

निर्मेय 9.6 समान्तर चतुर्भुज की रचना करना जब दो भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हो।

एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना करना, जिसमें $AB = 5$ सेमी, $BC = 4$ सेमी तथा $BD = 7\cdot 7$ सेमी हैं।

रचना : दिये गए तथ्यों के आधार पर कच्चा चित्र बनाकर निम्न प्रकार समान्तर चतुर्भुज की रचना कीजिए।



चित्र 9.50

$AB = 5$ सेमी की रेखा खींचिए। A तथा B से क्रमशः 4 सेमी व $7\cdot 7$ सेमी की त्रिज्या से चाप लगाकर त्रिभुज ABD की रचना कीजिए। इसी प्रकार B तथा D से क्रमशः 4 सेमी व 5 सेमी की त्रिज्या से चाप लगाकर त्रिभुज BCD की रचना कीजिए।

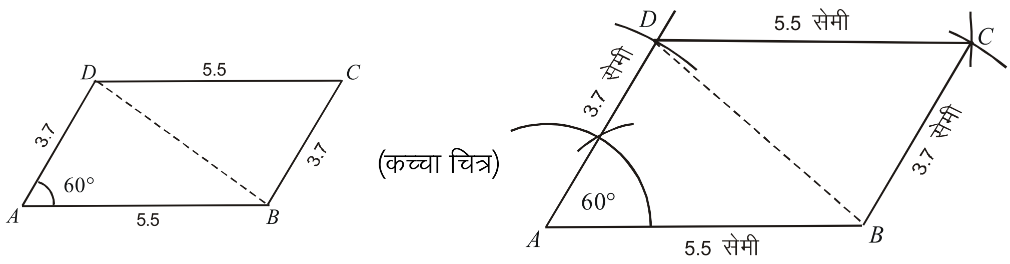
$ABCD$ अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.7 समान्तर चतुर्भुज की रचना करना, जब एक भुजा और दो विकर्ण दिए हों।

एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें भुजा $AB = 5$ सेमी, विकर्ण $AC = 7\cdot 6$ सेमी और विकर्ण $BD = 5\cdot 6$ सेमी।

संकेत : समान्तर चतुर्भुज के गुण के अनुसार, $AO = \frac{1}{2}AC = 3\cdot 8$ सेमी तथा $BO = \frac{1}{2}BD = 2\cdot 8$ सेमी

$AB = 5$ सेमी खींचिए। A तथा B से विकर्ण AC तथा विकर्ण BD के आधे अर्थात् $3 \cdot 8$ सेमी व $2 \cdot 8$ सेमी की त्रिज्या का चाप लगाकर त्रिभुज AOB बनाइए। AO और BO को आगे इस प्रकार बढ़ाइए कि $AC = 7 \cdot 6$ सेमी और $BD = 5 \cdot 6$ सेमी। इस प्रकार चतुर्भुज $ABCD$ प्राप्त कीजिए।



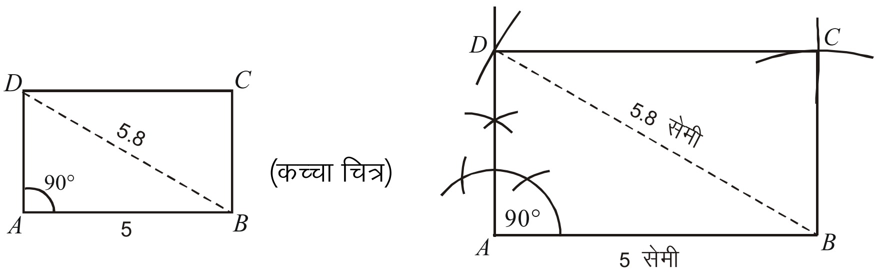
चित्र 9.51

$ABCD$ अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.8 समान्तर चतुर्भुज की रचना करना, जिसमें दो संलग्न भुजाएँ और बीच का कोण दिया हो।

एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 5 \cdot 5$ सेमी, $BC = 3 \cdot 7$ सेमी और $\angle A = 60°$।

रचना : $AB = 5 \cdot 5$ सेमी खींचिए। A पर $60°$ का कोण बनाइए तथा $AD = 3 \cdot 7$ सेमी लेकर त्रिभुज ABD बनाइए। इसी प्रकार $BC = 3 \cdot 7$ सेमी और $DC = 5 \cdot 5$ सेमी लेकर त्रिभुज BDC बनाइये।



चित्र 9.52

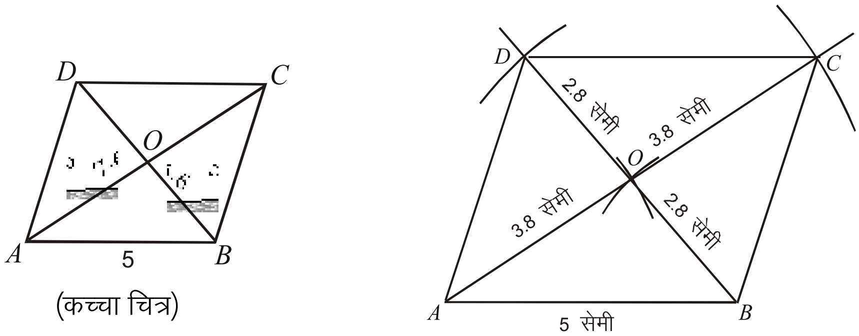
$ABCD$ अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज है।

निर्मेय 9.9 आयत की रचना करना, जिसका विकर्ण और एक भुजा दी है।

एक आयत $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें विकर्ण $BD = 5 \cdot 8$ सेमी और एक भुजा $AB = 5$ सेमी।

रचना : $AB = 5$ सेमी खींचिए। A बिन्दु पर एक समकोण बनाइए। B को केन्द्र मानकर विकर्ण $BD = 5 \cdot 8$ सेमी त्रिज्या से एक चाप लगाइए, जो समकोण की खड़ी भुजा को D पर काटे।

अब D व B को केन्द्र मानकर क्रमशः AB व AD भुजा के बराबर त्रिज्या लेकर दो चाप घुमाइए, जो एक दूसरे को C पर काटे।



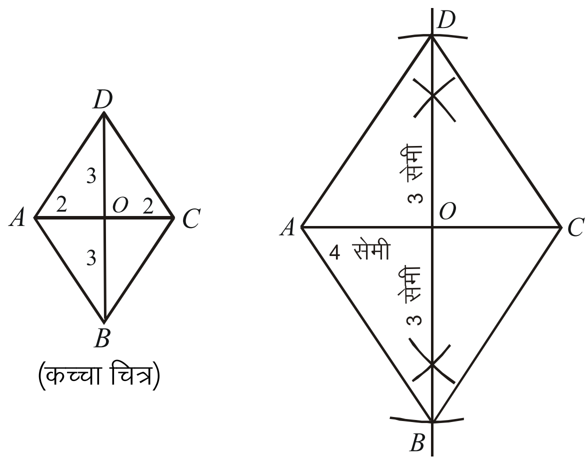
चित्र 9.53

$ABCD$ अभीष्ट आयत है।

निर्मेय 9.10 समचतुर्भुज की रचना करना, जब उसके दोनों विकर्ण दिए हों।

एक समचतुर्भुज की रचना कीजिए, जिसके विकर्ण क्रमशः 4 सेमी और 6 सेमी हों।

रचना : विकर्ण $AC = 4$ सेमी खींचिए। AC का लम्ब अर्द्धक खींचिए जो AC को O पर मिलता है। O को केन्द्र मानकर दूसरे विकर्ण $BD = 6$ सेमी के आधे (3 सेमी) की त्रिज्या से दो चाप घुमाइए जो लम्ब अर्द्धक को क्रमशः B व D बिन्दु पर काटे। AB, BC, CD, AD को मिलाइए।



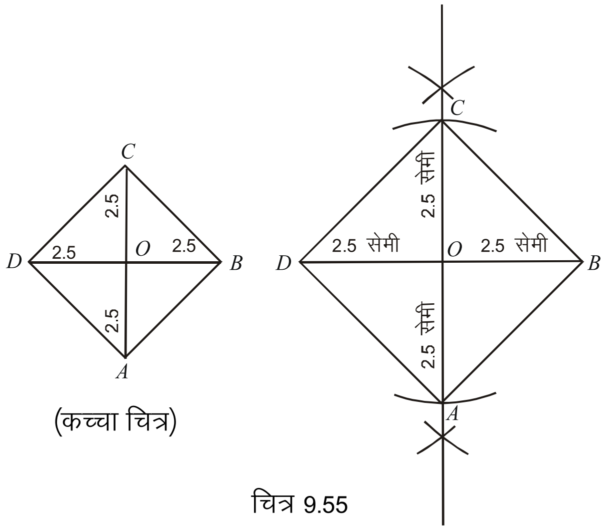
चित्र 9.54

$ABCD$ अभीष्ट समचतुर्भुज है।

निर्मेय 9.11 वर्ग की रचना करना जिसके विकर्ण दिये गये हों।

एक वर्ग की रचना कीजिए जिसका विकर्ण 5 सेमी हो।

रचना : विकर्ण $BD = 5$ सेमी खींचकर, इसका लम्ब अर्द्धक खींचिए जो BD को 0 पर मिले। 0 को केन्द्र मानकर, लम्ब अर्द्धक में से $OC = OA = 2 \cdot 5$ सेमी काटिए, बिन्दुओं A, B, C, D को मिलाइये।



चित्र 9.55

$ABCD$ अभीष्ट वर्ग है।

प्रश्नमाला 9.4

1. एक समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4 \cdot 7$ सेमी, $BC = 3 \cdot 5$ सेमी तथा $AC = 7$ सेमी ।
2. समान्तर चतुर्भुज $PQRS$ की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 5$ सेमी तथा विकर्ण $PR = 7 \cdot 6$ सेमी तथा विकर्ण $QS = 5 \cdot 6$ सेमी है।
3. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसकी दो भुजाएँ क्रमशः $4 \cdot 6$ सेमी और 3 सेमी हो तथा उनके बीच का कोण $60°$ हो।
4. एक आयत $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB = 6$ सेमी और विकर्ण $AC = 10$ सेमी हो।
5. एक समचतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसके विकर्ण $AC = 7$ सेमी और $BD = 5$ सेमी हों।
6. एक वर्ग $ABCD$ की रचना कीजिए जिसका विकर्ण 6 सेमी हो।

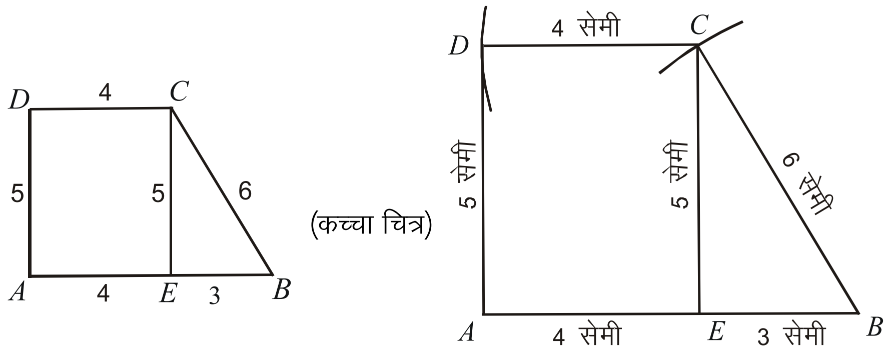
निर्मेय 9.12 समलम्ब चतुर्भुज की रचना करना

(क) जब समलम्ब चतुर्भुज की चार भुजाएँ दी गई हों और यह दिया हो कि कौन–कौन सी भुजाएँ समान्तर हैं।

एक समलम्ब चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें $AB = 7$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, $CD = 4$ सेमी, $DA = 5$ सेमी और $AB \quad CD$ है।

रचना : दिये गए तथ्यों के आधार पर कच्चा चित्र बनाइये तथा उस पर दी गई मापों को अंकित कीजिए।

रेखा AB में से $AE = DC = 4$ सेमी पर E बिन्दु अंकित कीजिए। पक्का चित्र बनाने के लिए, $AB = 7$ सेमी खींचिए, इसमें से $AE = 4$ सेमी काटकर E बिन्दु पर अंकित कीजिए। E व B को केन्द्र मानकर क्रमशः AD (5 सेमी) व BC (6 सेमी) की त्रिज्या से चाप घुमाकर बिन्दु C प्राप्त कीजिए। पुनः A व C को केन्द्र मानकर क्रमशः AD (5 सेमी) व CD (4 सेमी) की त्रिज्या से चाप घुमाकर D बिन्दु प्राप्त कीजिए। बिन्दु B को C से तथा D को A व C से मिलाकर चतुर्भुज पूर्ण कीजिए।



चित्र 9.56

$ABCD$ अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज है।

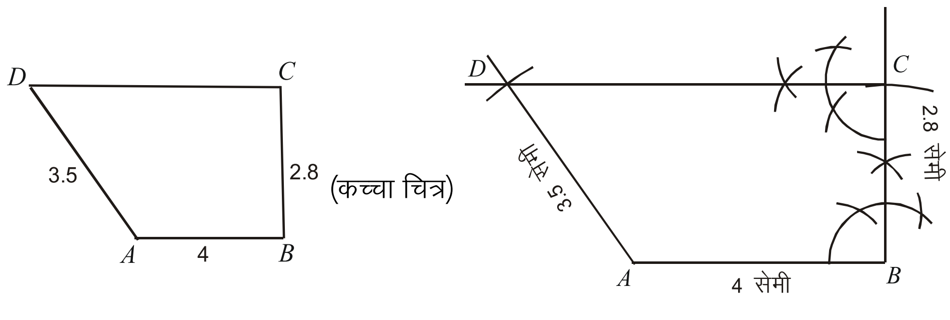
(ख) समलम्ब चतुर्भुज की रचना करना, जबकि तीन भुजाएँ एवं एक कोण दिया हो, तथा यह दिया हो कि कौन–कौनसी भुजाएँ समान्तर है।

एक समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB \quad CD$, $\angle B = 90°$, $AB = 4$ सेमी, $BC = 2 \cdot 8$ सेमी, $AD = 3 \cdot 5$ सेमी ।

रचना : समलम्ब चतुर्भुज का कच्चा चित्र बनाइये और इसमें दिए गए मापों को अंकित कीजिए।

पक्के चित्र के लिए $AB = 4$ सेमी खींचिए। बिन्दु B पर समकोण बनाकर, खड़ी रेखा में से $2 \cdot 8$ सेमी की दूरी काटकर C बिन्दु अंकित कीजिए। बिन्दु C पर भी समकोण बनाइए। ($\because AB \quad CD$ है और $\angle B = 90°$ तो $\angle C = 90°$)

बिन्दु A को केन्द्र मानकर $3 \cdot 5$ सेमी की त्रिज्या से, C बिन्दु पर बने समकोण की भुजा में से चित्रानुसार काटकर D बिन्दु अंकित कीजिए। A को D से मिलाकर चतुर्भुज $ABCD$ पूर्ण कीजिए।



चित्र 9.57

$ABCD$ अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज है।

प्रश्नमाला 9.5

1. समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB \parallel CD$, $AB = 4$ सेमी, $BC = 2\cdot 3$ सेमी, $CD = 2\cdot 8$ सेमी, और $DA = 1\cdot 9$ सेमी।
2. समलम्ब चतुर्भुज $PQRS$ की रचना कीजिए, जिसमें $PQ \parallel SR$, $PQ = 6$ सेमी, $RS = 3$ सेमी, $PS = 3$ सेमी, $QR = 5$ सेमी।
3. समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB \parallel CD$, $AB = 8$ सेमी, $BC = 6$ सेमी, $CD = 4$ सेमी और $\angle B = 75°$.
4. समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए, जिसमें $AB \parallel CD$, $AB = 4$ सेमी, $BC = 4$ सेमी, $AD = 5$ सेमी और $\angle B = 90°$.

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक चतुर्भुज के कोणों का योग 360° होता है।

2. एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

3. एक समांतर चतुर्भुज में,

- **(i)** सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
- **(ii)** सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
- **(iii)** विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं।

4. कोई चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है, यदि

- **(i)** उसके सम्मुख कोण बराबर हों।
- **(ii)** उसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर हों।
- **(iii)** उसके विकर्णपरस्पर समद्विभाजित करें।
- **(iv)** सम्मुख भुजाओं का एक युग्म बराबर हो और समांतर हो।

5. एक आयत के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं और इसका विलोम भी।

6. एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और इसका विलोम भी।

7. एक वर्ग के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं और बराबर होते हैं और इसका विलोम भी।

8. एक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर होता है तथा उसका आधा होता है।

9. एक त्रिभुज की एक भुजा के मध्य–बिन्दु से होकर, दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

10. एक चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दु को, एक ही क्रम में, मिलाने पर प्राप्त चतुर्भुज एक समांतर चतुर्भुज होता है।

11. चतुर्भुज की रचना के लिए आवश्यक है –

- (i) चार भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हो।
- (ii) चार भुजाएँ और एक कोण दिया हो।
- (iii) तीन भुजाएँ और दो विकर्ण दिये हों।

(iv) तीन भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हो।

(v) दो क्रमागत भुजाएँ उनके मध्य का कोण और दो अन्य कोण दिये हो ।

12. समान्तर चतुर्भुज की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) दो संलग्न भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हो।

(ii) एक भुजा और दो विकर्ण दिए हों।

(iii) दो संलग्न भुजाएँ और बीच का कोण दिया हो।

13. आयत की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) दो संलग्न भुजाएँ दी गई हों।

(ii) एक भुजा और विकर्ण दिया हो।

14. वर्ग की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) एक भुजा दी गई हो।

(ii) विकर्ण दिया गया हो।

15. समचतुर्भुज की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) भुजा की माप और दो संलग्न भुजाओं के मध्य का कोण।

(ii) विकर्ण दिए हों।

16. समलम्ब चतुर्भुज की रचना के लिए आवश्यक है –

(i) चार भुजाएँ दी गई हों और समान्तर भुजाओं को बताया गया हो।

(ii) तीन भुजाएँ व एक कोण दिया हो तथा समान्तर भुजाओं को बताया गया हो।

17. समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान्तर एवं समान होती है तथा सम्मुख कोण समान होते है।

18. वर्ग की चारों भुजाएँ समान एवं प्रत्येक कोण समकोण होता है वर्ग के विकर्ण समान व एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

19. आयत की सम्मुख भुजाएँ समान व प्रत्येक कोण समकोण हेाता है

20. समचतुर्भुज में चारों भुजाएँ समान व सम्मुख कोण बराबर होते हैं। विकर्ण एक–दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

21. समलम्ब चतुर्भुज में भुजाओं का केवल एक युग्म समान्तर होता है।

विविध प्रश्नमाला 9

निम्नलिखित में से (प्रश्न 1 से 15 तक) प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए'–

1. एक चतुर्भुज के तीन कोण 75°, 90° और 75° है। इसका चौथा कोण है

(A) 90° (B) 95°

(C) 105° (D) 120° ( )

2. एक आयत का एक विकर्ण उसकी एक भुजा से 25° पर नत है। इसके विकर्णों के बीच का न्यून कोण है

(A) 55° (B) 50°

(C) 40° (D) 25° ( )

3. ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसमें $\angle ACB = 40^\circ$ है। तब $\angle ADB$ है

(A) 40° (B) 45°

(C) 50° (D) 60° ( )

4. चतुर्भुज PQRS की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर बना चतुर्भुज एक आयत होता है, यदि

(A) PQRS एक आयत है (B) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है

(C) PQRS के विकर्ण परस्पर लंब हों (D) PQRS के विकर्ण बराबर हों ( )

5. चतुर्भुज PQRS की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में मिलाने पर बना चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है, यदि

(A) PQRS एक समचतुर्भुज है (B) PQRS एक समांतर चतुर्भुज है

(C) PQRS के विकर्ण परस्पर लंब हों (D) PQRS के विकर्ण बराबर हों ( )

6. यदि चतुर्भुज ABCD के कोणों A, B, C और D का, इसी क्रम में लेने पर, अनुपात 3 : 7 : 6 : 4 है हो तो ABCD है एक

(A) समचतुर्भुज (B) समांतर चतुर्भुज

(C) समलंब (D) पंतग ( )

7. यदि चतुर्भुज ABCD के $\angle A$ और $\angle B$ के समद्विभाजक परस्पर P पर प्रतिच्छेद करते हैं, $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक Q पर, $\angle C$ और $\angle D$ के R तथा $\angle D$ और $\angle A$ के S पर प्रतिच्छेद करते हैं, तो PQRS है एक

(A) आयत (B) समचतुर्भुज

(C) समांतर चतुर्भुज (D) चतुर्भुज जिसके सम्मुख कोण संपूरक है( )

8. यदि APB और CQD दो समांतर रेखाएँ हैं, तो कोणों APQ, BPQ, CQP और PQD के समद्विभाजक बनाते हैं।

(A) एक वर्ग (B) एक समचतुर्भुज

(C) एक आयत (D) कोई अन्य समांतर चतुर्भुज ( )

9. एक समचतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर बनने वाली आकृति होती है

(A) एक समचतुर्भुज (B) एक आयत

(C) एक वर्ग (D) कोई भी समांतर चतुर्भुज ( )

10. D और E क्रमशः ΔABC की भुजा AB और AC के मध्य–बिन्दु है तथा O भुजा BC पर कोई बिन्दु है। O को A से मिलाया जाता है। यदि P और Q क्रमशः OB और OC के मध्य–बिन्दु है, तो DEQP एक

(A) वर्ग (B) आयत

(C) समचतुर्भुज (D) समांतर चतुर्भुज ( )

11. एक चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को, एक ही क्रम में, मिलाने पर प्राप्त आकृति केवल एक वर्ग है, यदि

(A) ABCD एक समचतुर्भुज है

(B) ABCD के विकर्ण बराबर हैं

(C) ABCD के विकर्ण बराबर हैं और परस्पर लंब है

(D) ABCD के विकर्ण परस्पर लंब हैं ( )

12. समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD परस्पर बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle DAC = 32^o$ और $\angle AOB = 70^o$ है तो $\angle DBC$ है

(A) 24^o (B) 86^o

(C) 38^o (D) 32^o ( )

13. एक समांतर चतुर्भुज के लिए, निम्नलिखित में से कौन–सा कथन सत्य नहीं है?

(A) सम्मुख भुजाएँ

(B) सम्मुख कोण बराबर होते हैं

(C) सम्मुख कोण विकर्णों से समद्विभाजित होते है

(D) विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं ( )

14. D और E क्रमशः ΔABC की भुजा AB और AC के मध्य–बिन्दु हैं। DE को F तक बढ़ाया जाता है। यह सिद्ध करने के लिए कि CF रेखाखंड DA के बराबर और समांतर हैं, हमें एक अतिरिक्त सूचना की आवश्यकता है, जो है

(A) $\angle DAE = \angle EFC$ (B) $AE = EF$

(C) $DE = EF$ (D) $\angle ADE = \angle ECF$ ( )

15. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $\angle BOC = 90^o$ और $\angle BDC = 50^o$ है, तो $\angle OAB$ है

(A) 90^o (B) 50^o

(C) 40^o (D) 10^o ( )

16. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। यदि इसके विकर्ण बराबर हैं, तो $\angle ABC$ का मान ज्ञात कीजिए।

17. एक समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बराबर और लंब होते हैं। क्या यह कथन सत्य है। अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

18. एक चतुर्भुज ABCD के तीन कोण बराबर हैं। क्या यह एक समांतर चतुर्भुज है?

19. चतुर्भुज ABCD में, $\angle A + \angle D = 180^{\circ}$ है। इस चतुर्भुज को कौन–सा विशेष नाम दिया जा सकता है?

20. एक चतुर्भुज के सभी कोण बराबर हैं। इस चतुर्भुज को कौन–सा विशेष नाम दिया गया है?

21. एक आयत के विकर्ण परस्पर बराबर और लंब हैं। क्या यह कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

ATGNEI

22. कोई वर्ग एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के अंतर्गत इस प्रकार है कि वर्ग और त्रिभुज में एक कोण उभयनिष्ठ है। दर्शाइए कि वर्ग का शीर्ष जो उभयनिष्ठ कोण के शीर्ष के सम्मुख है कर्ण को समद्विभाजित करता है।

23. एक समांतर चतुर्भुज ABCD में, AB = 10 cm और AD = 6 cm है। $\angle A$ का समद्विभाजक DC से E पर मिलता है तथा AE और BC बढ़ाने पर F पर मिलते हैं। CF की लंबाई ज्ञात कीजिए।

24. P, Q, R और S एक चतुर्भुज ABCD की क्रमशः AB, BC, CD और DA भुजाओं के मध्य–बिन्दु हैं, जिसमें AC = BD और $AC \perp BD$ है। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक वर्ग है।

25. एक समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण उसके एक कोण की समद्विभाजित करता है। सिद्ध कीजिए कि यह समांतर चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है।

26. ABCD एक चतुर्भुज है, जिसमें $AB \parallel DC$ और AD = BC है। सिद्ध कीजिए कि $\angle A = \angle B$ और $\angle C = \angle D$ है।

27. E एक ΔABC की माध्यिका AD का मध्य–बिन्दु है तथा BE को AC को F पर मिलने के लिए बढ़ाया गया है। दर्शाइए कि $AF = \frac{1}{3}AC$ है।

28. दर्शाइए कि किसी वर्ग की क्रमागत भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने पर बना चतुर्भुज भी एक वर्ग होता है।

29. सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के कोणों के समद्विभाजकों द्वारा बना चतुर्भुज एक आयत होता है।

30. P और Q क्रमशः एक समांतर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख AD और BC भुजाओं पर स्थित बिन्दु इस प्रकार हैं कि PQ विकर्ण AC और BD के प्रतिच्छेद बिन्दु O से होकर जाता है। सिद्ध कीजिए कि PQ बिन्दु O पर समद्विभाजित हो जाता है।

31. ABCD एक आयत है, जिसका विकर्ण BD कोण $\angle B$ को समद्विभाजित करता है। दर्शाइए कि ABCD एक वर्ग है।

32. D, E और F क्रमशः एक त्रिभुज ABC की AB, BC और CA भुजाओं के मध्य–बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए D, E और F बिन्दुओं को मिलाने से त्रिभुज ABC चार सर्वांगसम त्रिभुजों में बँट जाता है।

33. सिद्ध कीजिए कि किसी समलंब के विकर्णों के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उस समलंब की समांतर भुजाओं के समांतर होती है।

34. P एक समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा CD का मध्य–बिन्दु है। C से होकर PA के समांतर खींची गई रेखा AB को Q पर तथा बढ़ाई हुई DA को R पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि DA = AR और CQ = QR है।

35. चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 3 \cdot 7$ सेमी, $BC = 3$ सेमी, $CD = 5$ सेमी, $AD = 4$ सेमी और $\angle A = 90°$ ।

36. चतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = AD = 3 \cdot 2$ सेमी, $BC = 2 \cdot 5$ सेमी, $AC = 4$ सेमी और $BD = 5$ सेमी।

37. चतुर्भुज $PQRS$ की रचना कीजिए जिसमें $PQ = 3 \cdot 5$ सेमी, $QR = 3 \cdot 5$ सेमी, $\angle P - 60°$, $\angle Q = 105°$, $\angle S = 75°$.

38. समचतुर्भुज की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा $3 \cdot 6$ सेमी और एक कोण $60°$ है।

39. वर्ग की रचना कीजिए जिसमें $AB + BC + CD + DA = 12 \cdot 8$ सेमी।

40. एक समलम्ब चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें $AB \quad CD$, $AB = 5$ सेमी, $BC = 3$ सेमी, $AD = 3 \cdot 3$ सेमी और समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी $2 \cdot 5$ सेमी हो।

41. एक समचतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 6$ सेमी और $\angle A = 120°$.

42. एक समलम्ब चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें $AB = 2 \cdot 3$ सेमी, $BC = 3 \cdot 4$ सेमी, $CD = 5 \cdot 4$ सेमी, $DA = 3 \cdot 7$ सेमी और $AB \quad CD$.

43. समचतुर्भुज $ABCD$ की रचना कीजिए जिसके विकर्ण $5 \cdot 6$ सेमी और $7 \cdot 2$ सेमी हों।

44. आयत $ABCD$ की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4 \cdot 5$ सेमी और $BD = 6$ सेमी हो।

❑

उतरमाला

प्रश्नमाला 9.1

1. 36°, 60°, 108°, 156°
2. AC = 6 सेमी, BD = 4 सेमी
3. नहीं, समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समद्विभाजन होते है।
4. नहीं, कोणों का योग 360° होना चाहिए
5. नहीं, सभी कोणों का योग 360° से अधिक हो जाएगा जो चतुर्भुज के लिए सम्भव थी
6. 84°
7. प्रत्येक 135°
8. 120°, 60°, 120°, 60°

प्रश्नमाला 9.2

1. 55°
2. नहीं, सभी कोणों का योग 360° से कम हो जाएगा।
3. हाँ, तो वह आयत या वर्ग होगा
4. 145°
5. 4 सेमी
6. 60, 120, 60, 120

13. (i) 6.9 सेमी (ii) 9.9 सेमी

विविध प्रश्नमाला 9

1. D	**2.** B	**3.** C	**4.** D
5. C	**6.**	**7.** D	**8.** C
9. B	**10.** D	**11.** C	**12.** C
13. C	**14.** C	**15.** C	

16. 90°; यह चतुर्भुज एक आयत है
17. यह कथन असत्य है, क्योंकि समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्ब होते है, परन्तु बराबर नहीं होते हैं।
18. इसका समान्तर होना आवश्यक नहीं
19. समान्तर चतुर्भुज
20. आयत या वर्ग
21. नहीं, आयत के विकर्ण बराबर तो है परन्तु परस्पर लम्ब नहीं है

23. 4 सेमी

अध्याय

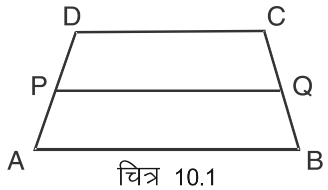
10

त्रिभुजों तथा चतुर्भुजों के क्षेत्रफल
(Area of Triangles and Quadrilaterls)

ATQJG6

10.01 प्रस्तावना (Introduction)

हम जानते हैं कि ज्यामिति के अध्ययन की आवश्यकता खेतों के परिसीमन और उनके बँटवारे के कारण हुई है। उदाहरण के लिए कार्तिक अपने एक समलम्ब आकृति के खेत का बँटवारा अपनी दो पुत्रियों को असमान्तर सीमाओं के मध्य बिन्दुओं से लकीर खींच कर करता है (देखिए चित्र 10.1) क्या यह बँटवारा क्षेत्रफल में समान हुआ है? इस प्रकार की समस्याओं के समाधान के लिए यह आवश्यक है कि, समतलीय आकृतियों के क्षेत्रफल पर चिन्तन किया जाए।



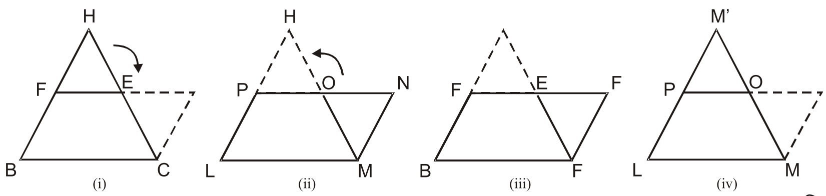
चित्र 10.1

ATZFHT

10.02 क्षेत्रफल

एक सरल बन्द आकृति द्वारा किसी तल पर घेरा हुआ भाग उस आकृति का तलीय क्षेत्र कहलाता है और इस तलीय क्षेत्र का परिमाण या माप उस आकृति का क्षेत्रफल (area) कहलाता है। इस परिमाण या माप को सदैव किसी मात्रक की सहायता से व्यक्त किया जाता है, जैसे 6 वर्ग सेमी (सेमी^{2}), 9 वर्ग मीटर (मीटर^2), 12 हेक्टेयर इत्यादि।

अध्याय 7 में हमने सर्वांगसम आकृतियों का अध्ययन किया है। यदि दो आकृतियाँ आकार एवं माप में समान हो तो वे सर्वांगसम आकृतियाँ हैं। यदि उन्हें काट कर किसी तल पर रखें तो उस तल पर दोनों ही आकृतियों का तलीय क्षेत्र समान आता है। अर्थात् दो सर्वांगसम आकृतियाँ क्षेत्रफल में समान होती है। क्या इसका विलोम भी सत्य है? तो आइए निम्न क्रिया कलाप पर ध्यान देते हैं।



चित्र 10.2

पुस्तक के इस पृष्ठ के नीचे कार्बन लगाकार एक सफेद कागज पर पेन्सिल व स्केल की सहायता लेकर चरण–1 बिन्दुकित भाग को छोड कर चित्र 10.2 (i), (iii) की कार्बन प्रति तैयार कीजिए। तैयार कार्बन प्रतियों से चित्र 10.2 (i) के ΔAEF को काट कर चित्र 10.2 (ii) में दर्शाए अनुसार E को उसी बिन्दु पर रखकर ΔAEF को इतना घुमाये कि A, C पर आ जाए और चिपका दीजिए, हमें BCF'F एक चतुर्भुज प्राप्त होगा इसी प्रकार चित्र 10.2 (iii) में से ΔMNO को काटकर O को उसी बिन्दु पर रख कर इतना घुमाइए कि N, P पर आ जाए और चिपका दीजिए जैसा कि चित्र 10.2 (iv) है। इस प्रकार हमें LMN एक Δ त्रिभुज प्राप्त होगा।

चरण–2 प्राप्त चतुर्भुज BCFF को चित्र 10.2 (iii) पर एवं $\Delta LMM'$ को चित्र 10.2 (i) पर रखिए क्या ये परस्पर एक दूसरे को पूरा–पूरा ढक रहे हैं? हाँ ढक रहे हैं। अर्थात् चतुर्भुज $BCF'F \cong$ चतुर्भुज LMNP तथा $\Delta LMM' \cong \Delta BCA$ क्या ये सर्वांगसम आकृतियाँ क्षेत्रफल में भी समान हैं? निश्चित रूप से समान हैं। परन्तु इसका विलोम ΔABC तथा एवं चतुर्भुज BCF'F तथा चतुर्भुज LMNP एवं त्रिभुज LMM' जो क्षेत्रफल में समान है। क्या ΔABC व चतुर्भुज BCF'F तथा चतुर्भुज LMNP व $\Delta LMM'$ सर्वांगसम हैं? निःसन्देह नहीं है।

अर्थात् हम कह सकते है कि **सर्वांगसम आकृतियाँ क्षेत्रफल में समान होती हैं परन्तु क्षेत्रफल में समान आकृतियाँ सर्वांगसम भी हो। यह आवश्यक नहीं।**

यदि चतुर्भुज $BCF'F \cong$ चतुर्भुज LMNP और $\Delta LMM' \cong \Delta BCA$ है तो इन्हें $ar(BCF'F) = ar(LMNP)$ और $ar(LMM') = ar(BCA)$ लिखेंगे।

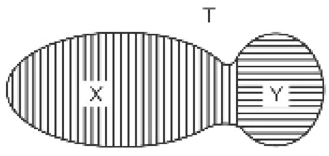
आइए अब हम नीचे चित्र 10.3 को देखते हैं।

आप देख रहे हैं कि आकृति T, आकृतियाँ X व Y द्वारा दो तलीय क्षेत्र से मिलकर बना है।

जिसे हम आकृति T का क्षेत्रफल = आकृति X का क्षेत्रफल + आकृति Y का क्षेत्रफल

अथवा

$ar(T) = ar(X) + ar(Y)$ लिखेंगे।

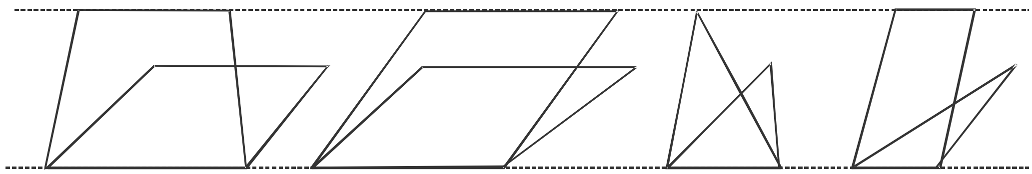


चित्र 10.3

पिछली कक्षाओं में आपने अनेक आकृतियाँ जैसे त्रिभुज, आयत, वर्ग आदि का क्षेत्रफल ज्ञात किया होगा। इन आकृतियों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमने सूत्रों का भी उपयोग किया है। इस अध्याय में हम इन ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफलों के मध्य संबंध का उस प्रतिबंध के अंतर्गत अध्ययन करेंगे जब ये एक ही आधार पर तथा एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य स्थित हो। इस अध्ययन के माध्यम से उक्त सूत्रों के ज्ञान को और अधिक गूढता से समझने का प्रयत्न करेंगे।

10.03 एक ही आधार एवं एक ही समान्तर युग्म के मध्य बनी आकृतियाँ:

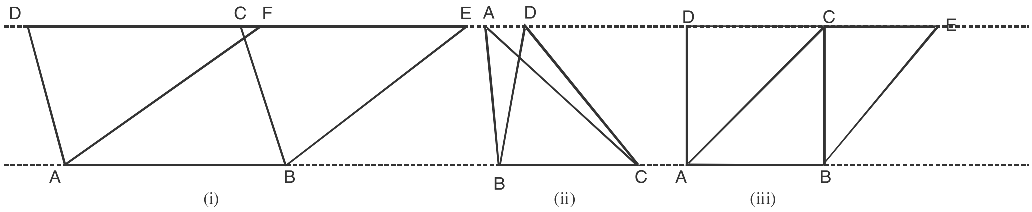
नीचे चित्र 10.4 में बनी आकृतियों को देखिए।



चित्र 10.4

चित्र 10.4 (i), (ii), (iii), (iv) में बनी सभी दो–दो आकृतियाँ क्रमशः अपने–अपने एक ही आधार पर बने हैं। परन्तु बिन्दु भित रेखा युग्म समान्तर रेखा युग्म के मध्य में नहीं बने हैं।

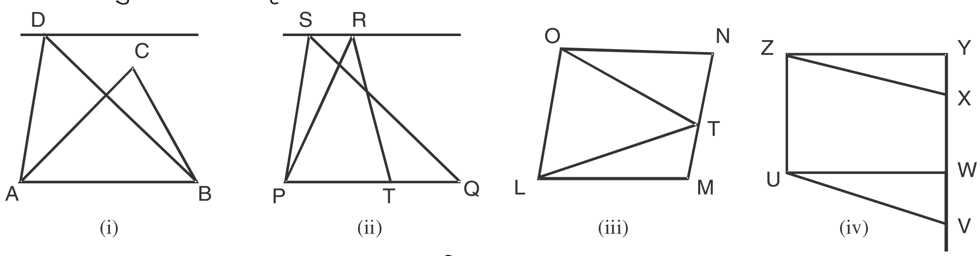
अब नीचे के चित्र 10.5 में बनी आकृतियों को देखिए:



चित्र 10.5

चित्र 10.5 के अन्तर्गत बनी सभी दो–दो आकृतियाँ के मध्य बने हैं। यहाँ चित्र 10.5 (i) में एक ही आधार AB और एक ही समान्तर रेखा युग्म AB, DE के मध्य समान्तर चतुर्भुज ABCD तथा समान्तर चतुर्भुज ABEF बने हैं। चित्र 10.5 (ii) में ΔABC व ΔBCD एक ही आधार BC एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म BC, AD के मध्य बने हैं। इसी प्रकार 10.5 (ii) में ΔBCD o ΔBCD एक ही आधार BC एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म BC, AD के मध्य बने है। इसी प्रकार 10.5 (iii) में वर्ग ABCD एवं समान्तर चतुर्भुज ABEL एक ही आधार AB एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म AB, DE के मध्य बने हैं।

चित्र 10.5 (i), (ii), (iii) जैसी आकृतियाँ ही एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य बनी आकृतियाँ कहलाती हैं। इन सभी दो–दो आकृतियों के आधार उभयनिष्ठ हैं, तथा उभयनिष्ठ आधार के सम्मुख प्रत्येक आकृति के शीर्ष उस आधार के समान्तर किसी रेखा पर स्थित होते हैं।



चित्र 10.6

अनुच्छेद 10.6 के अन्तर्गत अब तक प्राप्त जानकारी को ध्यान में रखकर चित्र 10.6 (i), (ii), (iii) व (iv) में कौन से समूह की आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य बनी है? आओ चर्चा करें।

चित्र 10.6 (i) में बने ΔABC व त्रिभुज ABD का आधार AB उभयनिष्ठ है परन्तु ΔABC का शीर्ष C, AB के समान्तर रेखा ℓ पर नहीं है।

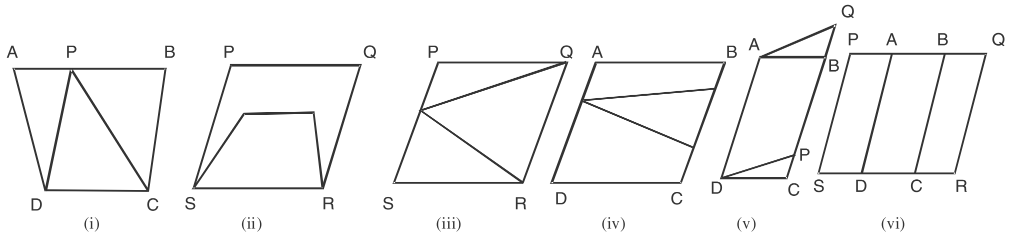
चित्र 10.6 (ii) में बने ΔPTR का आधार PT व ΔPQS का आधार PQ है अर्थात् दोनों त्रिभुजों का आधार उभयनिष्ठ नहीं है किन्तु दोनों त्रिभुज PQ व SR एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य बने हैं।

चित्र 10.6 (iii) में बने समान्तर चतुर्भुज LMNO व ΔLTO एक ही आधार LO व LO $\parallel$ MN के मध्य बने है। इसी प्रकार चित्र 10.6 (iv) में भी समान्तर चतुर्भुज UVXZ व आयत UWYZ एक ही आधार UZ एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म UZ, VY के मध्य बने हैं।

इस प्रकार चित्र 10.6 (i), (ii) एक ही आधार एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य बनी आकृतियों की श्रेणी में नहीं आते जबकि 6.5 (iii), (iv) इस श्रेणी में कहे जा सकते है।

प्रश्नमाला 10.1

1. निम्नलिखित आकृतियों में कौन सी आकृतियाँ एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य स्थित है? ऐसी स्थिति में उभयनिष्ठ आधार और समान्तर रेखायुग्म लिखिए।

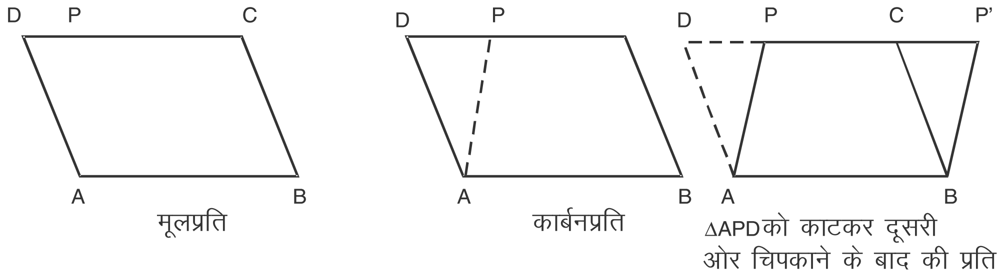


चित्र 10.7

2. एक ही आधार एवं एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य निम्न आकृतियाँ अपनी अभ्यास पुस्तिका में बनाइए
   (i) एक अधिक कोण त्रिभुज और एक समलम्ब चतुर्भुज
   (ii) एक समान्तर चतुर्भुज और एक समद्विबाहु त्रिभुज
   (iii) एक वर्ग और एक समान्तर चतुर्भुज
   (iv) एक आयत और एक समचतुर्भुज
   (v) एक समचतुर्भुज और एक समान्तर चतुर्भुज

क्रियाकलाप 10.2

चरण–1 तीन सफेद कागजों के मध्य कार्बन रखकर कार्बन प्रती सहित एक ही समान्तर चतुर्भुज की दो प्रतियाँ बनाइए और ABCD द्वारा चारों शीर्षों को नामांकित भी कीजिए, जिसकी भुजा CD पर एक बिन्दु P इतने दबाव के साथ लगाइए कि वह कार्बन प्रति पर भी आ जाए।



चित्र 10.8

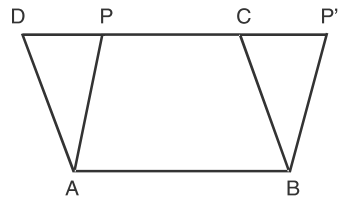
चरण–2 (i) मूल प्रति को काट कर अपनी अभ्यास पुस्तिका के एक पृष्ठ पर चिपकाइए।

(ii) कार्बन प्रति पर अंकित P को A से मिलाने के बाद बने APD को काटिए। ΔAPD को कार्बन प्रतियों के दूसरी ओर इस प्रकार चिपकाए कि कटे हुए त्रिभुज की भुजा AD कटने के बाद प्राप्त समलम्ब ABCP की भुजा BC को सम्पाती करे। ध्यान रहे बिन्दु A, B पर व D, C पर रहना चाहिए।

इस प्रकार हमें दो नये समान्तर चतुर्भुज ABCD एवं ABP'P प्राप्त हो रहे हैं। दोनों प्राप्त नये चतुर्भुजों में से एक दो अभ्यास पुस्तिका के उसी पृष्ठ पर चित्र 6.7 (iii) जैसे चिपका दीजिए।

चरण–3 दूसरे नये समान्तर चतुर्भुज ABP'P को मूल प्रति पर इस प्रकार चिपकाए कि दोनों समान्तर चतुर्भुजों की भुजा AB सम्पाती हो जाए (देखिए चित्र 10.9) एक नई आकृति में दो समान्तर

चतुर्भुज ABCD एवं ABP'P एक ही आधार व एक ही समान्तर रेखाओं के मध्य बने है।



चित्र 10.9

क्या आप कह सकते हैं कि समान्तर चतुर्भुज ABCD एवं ABP'P क्षेत्रफल में बराबर हैं? चलिए देखते हैं।

चूंकि $\Delta APD \cong \Delta BP'C$ (ΔAPD को ही काटकर चिपकाया है)

अतः $ar(APD) = ar(BP'C)$

दोनों ओर ar(ABCP) जोड़ने पर

$$ar(APD) + ar(ABCP) = ar(ABCP) + ar(BP'C)$$

या $ar(ABCD) = ar(ABP'P)$

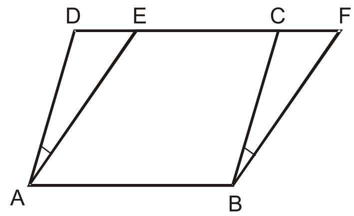
अर्थात् दोनों समान्तर चतुर्भुज, जो एक ही उभयनिष्ठ भुजा AB तथा AB $\parallel$ DP' (समान्तर युग्म) के मध्य बने हैं। क्षेत्रफल में बराबर हैं।

आइए प्राप्त इस परिणाम को दूसरे तरीके से सिद्ध करने का प्रयत्न करते हैं।

प्रमेय 10.1 एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच के समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

दिया है : दो समान्तर चतुर्भुज ABCD और ABFE जिनका आधार AB है, जो समान्तर रेखाओं AB और DF के मध्य स्थित हैं।

सिद्ध करना है : समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = समान्तर चतुर्भुज ABFE का क्षेत्रफल



चित्र 10.10

उपपत्ति : Δ ADE और Δ BCF में,

AE = BF (समान्तर चतुर्भुज ABFE की सम्मुख भुजाएँ)

$\angle$DAE = $\angle$CBF (संगत कोण)

AD = BC (समान्तर चतुर्भुज ABCD की सम्मुख भुजाएँ)

अर्थात् भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता नियम से

Δ ADE $\cong$ Δ BCF

अतः क्षेत्रफल (Δ ADE) = क्षेत्रफल (Δ BCF)

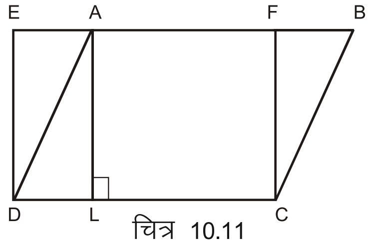
दोनों पक्षों में क्षेत्रफल (ABCE) जोड़ने पर

क्षेत्रफल (Δ ADE) + क्षेत्रफल (ABCE) = क्षेत्रफल (Δ ADE) + क्षेत्रफल (ABCE)

क्षेत्रफल (ABCD) = क्षेत्रफल (ABFE) ''इतिसिद्धम''।

उपप्रमेय–1

एक समान्तर चतुर्भुज और एक आयत जो एक ही आधार तथा दो समान्तर रेखाओं के बीच स्थित हो, तो उनके क्षेत्रफल समान होते हैं तथा समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल आधार × दोनों समान्तर रेखाओं के मध्य दूरी के गुणन के बराबर होता है।



चित्र 10.11

दिया हुआः चित्र 10.11 में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज और EFCD एक आयत है। साथ ही AL ⊥ DC है

सिद्ध करना : (i) $ar(ABCD) = ar(EFCD)$

उपपति : (ii) $ar(ABCD) = DC \times AL$

(i) चूंकि आयत एक समान्तर चतुर्भुज भी होता है।

अतः $ar(ABCD) = ar(EFCD)$ (प्रमेय 10.1 से) . . . (i)

(ii) चूंकि आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

अतः $ar(EFCD) = DC \times FC$

इसलिए $ar(ABCD) = DC \times FC$ [(i) से] . . . (ii)

$\because$ $AL \perp DC$ दिया हुआ है

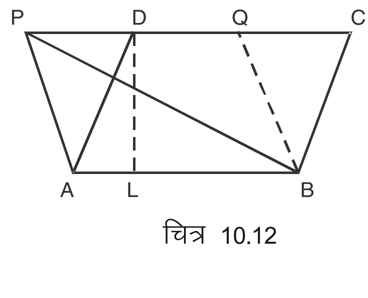
इस प्रकार AFCL भी एक आयत है

$\therefore$ AL = FC . . . (iii)

$\Rightarrow$ $ar(ABCD) = DC \times AL$ [(ii) एवं (iii) से] ''इतिसिद्धम''

उपप्रमेय–2 एक त्रिभुज और एक समान्तर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखा युग्म के साथ स्थित हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

दिया हुआः ΔABP और समान्तर चतुर्भुज ABCD एक ही आधार AB पर एवं AB ∥ PC के मध्य बने है।



चित्र 10.12

सिद्ध करना : $ar(PAB) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

रचना BQ रेखा AP के समान्तर खींची

उपपतिः AB ∥ CD (दिया हुआ है)

अतः AB ∥ PQ

तथा AP ∥ BQ (रचना से)

अतः ABPQ एक समान्तर चतुर्भुज है।

$\therefore$ $ar(ABCD) = ar(ABQP)$ (प्रमेय 10.1 से) . . . (i)

तथा $\Delta ABP \cong \Delta QPB$ (समान्तर चतुर्भुज का एक विकर्ण त्रिभुज को दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।)

अतः $ar(ABP) = ar(QPB) = \frac{1}{2} ar(ABQP) \Rightarrow ar(ABP) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$

इति सिद्धम

उपप्रमेय–3 त्रिभुज का क्षेत्र $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई होता है।

चित्र 6.10 में यदि $DL \perp AB$ है तो उप प्रमेय–1 से

$$ar(ABCD) = AB \times DL$$

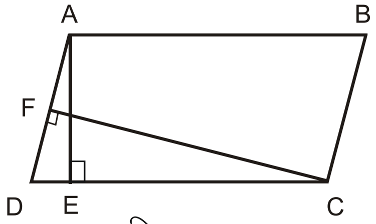
परन्तु $ar(PAB) = \frac{1}{2} ar(ABCD)$ (उपप्रमेय–2 से)

अतः $ar(PAB) = \frac{1}{2} AB \times DL$

अर्थात् त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

प्रश्नमाला 10.2

1. चित्र 10.13 में, ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, $AE \perp DC$ और $CF \perp AD$ है। यदि AB = 16 cm, AE = 8 cm और CF = 10 cm है, तो AD ज्ञात कीजिए।



चित्र 10.13

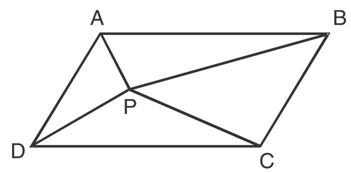
2. यदि E, F, G और H क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं के मध्य–बिन्दु हैं, तो दर्शाइए कि $\text{ar}(\text{EPGH}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABCD})$ है।

3. P और Q क्रमशः समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं DC और AD पर स्थित बिन्दु हैं। दर्शाइए कि ar (APB) = ar (BQC) है।

4. चित्र 10.14 में, P समांतर चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर में स्थित कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि

(i) $\text{ar}(\text{APB}) + \text{ar}(\text{PCD}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABCD})$

(ii) $\text{ar}(\text{APD}) + \text{ar}(\text{PBC}) = \text{ar}(\text{APB}) + \text{ar}(\text{PCD})$

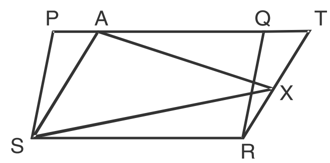


चित्र 10.14

5. चित्र 10.15 में, PQRS और ABRS समांतर चतुर्भुज हैं तथा X भुजा BR पर स्थित कोई बिन्दु है। दर्शाइए कि

(i) $\text{ar}(\text{PARS}) = \text{ar}(\text{ABRS})$

(ii) $\text{ar}(\text{AXS}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{PQRS})$



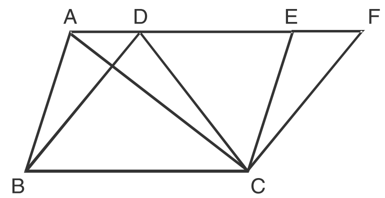
चित्र 10.15

6. एक किसान के पास समानान्तर चतुर्भुज PQRS के रूप का एक खेत था। उसने RS पर स्थित कोई बिन्दु A लिया और उसे P और Q से मिला दिया। खेत कितने भागों में विभाजित हो गया है? इन भागों के आकार क्या है? किसान खेत में गेहूँ और दालें बराबर–बराबर भागों में अलग–अलग चाहता है। वह ऐसा कैसे करे ?

AU9BJG

10.04 एक ही आधार ओर एक ही समान्तर रेखा युग्म के मध्य स्थित त्रिभुज

प्रमेय 10.2 एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।



चित्र 10.16

दिया है : Δ ABC और Δ DBC एक ही आधार BC पर तथा समान्तर रेखाओं BC एवं AF के मध्य में स्थित है।

सिद्ध करना है :

क्षेत्रफल (Δ ABC) = क्षेत्रफल (Δ DBC)

रचना : C से क्रमशः AB एवं BD के समांतर रेखाएँ CE एवं CF खींची।

उपपत्ति :ABCE और DBCF समान्तर रेखाओं BC और AF के मध्य स्थित है, अतः (प्रमेय 10.1)

क्षेत्रफल (स. च. ABCE) = क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज DBCF) . . . (1)

$\because$ AC समान्तर चतुर्भुज ABCE का विकर्ण है, अतः

क्षेत्रफल $\Delta ABC = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज ABCE) . . . (2)

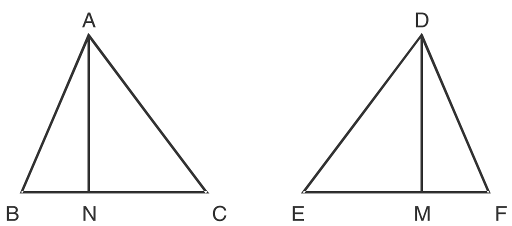
इसी प्रकार DC समान्तर चतुर्भुज DBCF का विकर्ण है, अतः

क्षेत्रफल $\Delta DBC = \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज DBCE) . . . (3)

समीकरण (1), (2) और (3) से

क्षेत्रफल (Δ ABC) = क्षेत्रफल (Δ DBC) **''इतिसिद्धम्''।**

प्रमेय 10.3 यदि दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों और एक त्रिभुज की एक भुजा, दूसरे त्रिभुज की एक भुजा के बराबर हो, तो उनके संगत शीर्षलम्ब बराबर होते हैं।



चित्र 10.17

दिया है : Δ ABC और Δ DEF में

(i)क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔDEF)

(ii) BC = EF

सिद्ध करना है : शीर्ष लम्ब AN = शीर्ष लम्ब DM

उपपत्ति : Δ ABC में, भुजा BC के संगत शीर्ष लम्ब AN है, अतः

क्षेत्रफल $(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AN$ (उपप्रमेय–3 से) . . . (1)

इसी प्रकार

$$\text{क्षेत्रफल } (\Delta DEF) = \frac{1}{2} \times EF \times DM \text{ (उपप्रमेय–3 से)} \qquad \ldots (2)$$

दिया हुआ है कि

क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔDEC)

अतः $\frac{1}{2} \times BC \times AN = \frac{1}{2} \times EF \times DM$

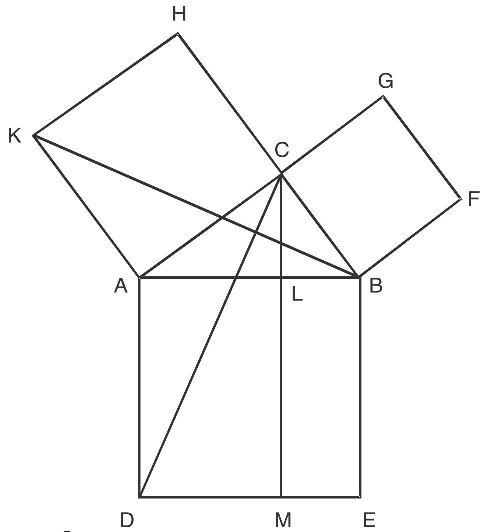
यहाँ $BC = EF$

अतः $AN = DM$ ''इतिसिद्धम्''

10.05 बौधायन प्रमेय (Baudhayan theorem):

बौधायन ने हमें, समकोण त्रिभुज पर एक बहुत महत्वपूर्ण परिणाम दिया है, जिसे हम बौधायन प्रमेय के नाम से जानते हैं। (यह प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय के नाम से भी विख्यात है)। अब हम इस प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

AUI7L4



चित्र 10.18

प्रमेय 10.4 किसी समकोण त्रिभुज में, कर्ण पर बना वर्ग अन्य दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के योग के बराबर होता है।

दिया है : ΔABC में, $\angle C$ समकोण है और भुजाओं AB, BC और CA पर बने वर्ग क्रमशः ADEB, CBFG और ACHK हैं।

सिद्ध करना है : वर्ग ADEB = वर्ग ACHK + वर्ग CBFG

रचना : C से BE के समान्तर रेखा CM खींची जो AB को L पर प्रतिच्छेद करती है। BK एवं CD को मिलाया।

उपपत्ति : $\angle BAD = \angle CAK = 90^{\circ}$

दोनों पक्षों में $\angle CAB$ जोड़ने पर

$$\angle BAD + \angle CAB = \angle CAK + \angle CAB \qquad \ldots (1)$$

$\Rightarrow \qquad \angle CAD = \angle BAK$

अब $\Delta\, BAK$ और $\Delta\, CAD$ में

$AB = AD$ [वर्ग ABED की भुजाएँ]

$\angle BAK = \angle CAD$ [(1) से]

$AK = AC$ [वर्ग ACHK की भुजाएँ]

भुजा–कोण–भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से,

$$\Delta BAK \cong \Delta CAD \qquad \ldots (2)$$

पुनः $\angle BCA = \angle ACH = 90^o$

$\angle BCA + \angle ACH = 180^o$

अर्थात् BCH एक सरल रेखा है।

CH ॥ AK (वर्ग ACHK की सम्मुख भुजा)

$\Delta\, BAK$ और वर्ग ACHK एक ही आधार AK तथा समान्तर रेखाओं AK एवं BH के मध्य स्थित हैं।

अतः $\Delta BAK = \frac{1}{2}$ वर्ग ACHK ... (3)

इसी प्रकार ΔADC और आयत ADML एक ही आधार AD और समानान्तर रेखाओं AD एवं CM के मध्य स्थित है, अतः

$\Delta CAD = \frac{1}{2}$ आयत ADML ... (4)

(2), (3) और (4) से

$\Delta CAD = \Delta BAK = \frac{1}{2}$ वर्ग ACHK

$= \frac{1}{2}$ आयत ADML

वर्ग ACHK = आयत ADML ... (5)

इसी प्रकार

$\therefore$ वर्ग CBFG = आयत LMEB ... (6)

(5) और (6) से

आयत ADML + आयत LMEB = वर्ग ACHK + वर्ग CBFG

वर्ग ADEB = वर्ग ACHK + वर्ग CBFG **''इतिसिद्धम्''**

प्रमेय 10.5 : (बौधायन प्रमेय का विलोम)

किसी त्रिभुज में, यदि एक भुजा का वर्ग अन्य दोनों भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो, तो इस भुजा के सामने का कोण एक समकोण होता है।

दिया है : ΔABC में, $AB^2 + BC^2 = AC^2$

सिद्ध करना है : $\angle B = 90^o$

रचना : ΔPQR इस प्रकार बनाया कि $\angle Q = 90^o$ हो और $PQ = AB$ एवं $QR = BC$ हों।

उपपत्ति : ΔPQR में, बौधायन प्रमेय से

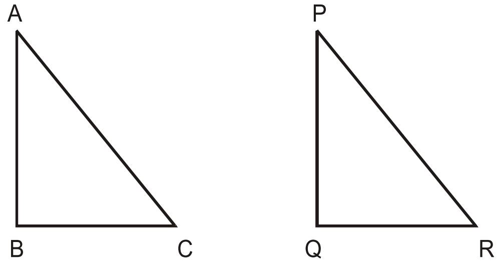
$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

परन्तु $PQ = AB$ एवं $QR = BC$

अतः $PR^2 = AB^2 + BC^2$

दिया हुआ है कि

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



चित्र 10.19

समीकरण (1) और (2) से

$$PR = AC$$

अब ΔABC एवं ΔPQR में,

$PQ = AB$ (रचना से)

$QR = BC$ (रचना से)

$PR = AC$ [(3) से]

भुजा–भुजा–भुजा सर्वांगसमता से

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$ अतः $\angle B = \angle Q = 90^o$

अर्थात् $\angle B = 90^o$ **''इतिसिद्धम्''**

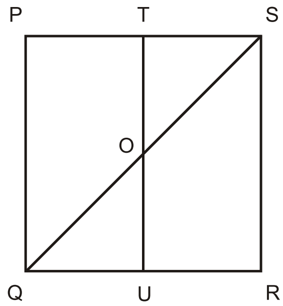
उदाहरण 1. PQRS एक वर्ग है। T और U क्रमशः PS और QR के मध्य–बिन्दु हैं (चित्र 10.20)। ΔOTS का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि $PQ = 8$ सेमी है तथा O रेखाखंड TU और QS का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

$PS = PQ = 8$ cm है तथा $TU \parallel PQ$ है।

$$ST = \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2}\times 8 = 4 \text{सेमी}$$

साथ ही $PQ = TU = 8$ सेमी

इसलिए, $OT = \frac{1}{2}TU = \frac{1}{2}\times 8 = 4$ सेमी



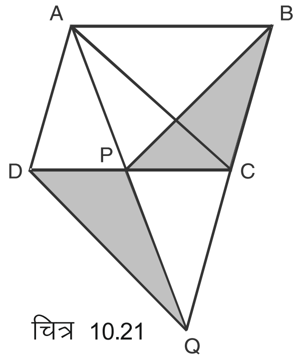
चित्र 10.20

अतः ΔOTS का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\times ST \times OT$ [क्योंकि OTS एक समकोण त्रिभुज है]

$= \frac{1}{2}\times 4 \times 4 \text{ सेमी}^2 = 8 \text{ सेमी}^2$

उदाहरण 2. ABCD एक समांतर चतुर्भुज तथा BC को Q तक इस प्रकार बढ़ाया जाता है कि AD = CQ है (चित्र 10.21)। यदि AQ भुजा DC को P पर प्रतिच्छेद करता है, तो दर्शाइए कि ar (BPC) = ar (DPQ)



चित्र 10.21

ar (ACP) = ar (BCP) . . . (1)

[एक आधार पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने दो त्रिभुज]

ar(AOQQ) = ar (ADC) . . .(2)

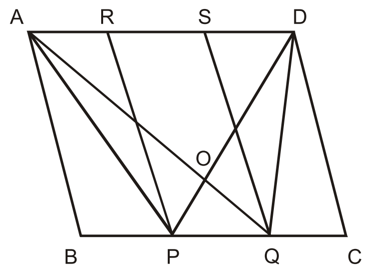
ar (ADC) – ar (ADP) = ar (AOQQ) – ar (ADP) . . . (3)

(1) और (3) से,

ar (BCP) = ar (DPQ)

उदाहरण 3. चित्र 10.22 में, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है। बिन्दु P और Q भुजा BC को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं।

सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(\text{APQ}) = \text{ar}(\text{DPQ}) = \frac{1}{6}\text{ar}(\text{ABCD})$ **है।**



चित्र 10.22

P और Q से होकर, AB के समांतर PR और QS खींचिए (चित्र 10.22)। अब, PQRS एक समांतर चतुर्भुज है तथा इसका आधार $\text{PQ} = \frac{1}{3}\text{BC}$ है।

$$\text{ar}(\text{APD}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABCD})$$

[एक ही आधार BC और BC ॥ AD] . . .(1)

$$\text{ar}(\text{AQD}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABCD}) \quad . . . (2)$$

(1) और (2) से,

$$\text{ar}(\text{APD}) = \text{ar}(\text{AQD}) \quad . . . (3)$$

दोनों पक्षों में से ar (AOD) घटाने पर,

ar (APD) – ar (AOD) = ar (AQD) – ar (AOD)

ar (APO) = ar (OQD) . . . (4)

(4) के दोनों पक्षों में ar (OPQ) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

ar (APO) + ar (OPQ) = ar (OQD) + ar (OPQ)

ar (APQ) = ar (DPQ)

क्योंकि, $\text{ar}(\text{APQ}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{PQRS})$,

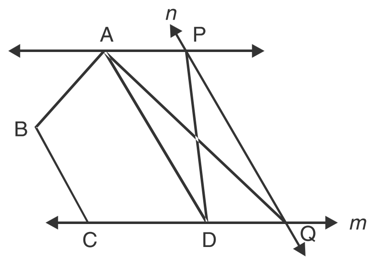
अब, $ar(PQRS)=\frac{1}{3}ar(ABCD)$

अतः, $ar(APQ)=ar(DPQ)$

$$=\frac{1}{2}ar(PQRS)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}ar(ABCD)$$

$$=\frac{1}{6}ar(ABCD)$$

उदाहरण 4. चित्र 10.23 में ℓ, m, और n सरल रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\ell \parallel m$ है तथा रेखा n, रेखा ℓ को P पर तथा रेखा m को Q पर प्रतिच्छेद करती है। ABCD एक चतुर्भुज इस प्रकार है कि शीर्ष A, रेखा ℓ पर स्थित है, शीर्ष C और D रेखा m पर स्थित हैं तथा AD $\parallel$ n है। दर्शाइए कि ar (ABCQ) = ar (ABCDP)



चित्र 10.23

हलः ar (ADP) = ar (ADQ) . . . (i)

[एक ही आधार AD पर है तथा एक ही समांतर रेखाओं AD और n के बीच में स्थित है]

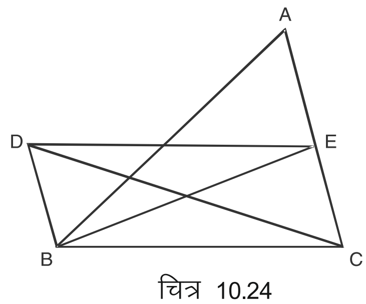
(1) के दोनों पक्षों में ar (ABCD) जोड़ने पर

ar (ADP) + ar (ABCD) = ar (ADQ) + ar (ABCD)

या ar (ABCDP) = ar (ABCQ) है।

उदाहरण 5. चित्र 10.24 में, BD $\parallel$ CA है, E रेखाखंड CA का मध्य–बिन्दु है तथा $BD=\frac{1}{2}CA$ **है। सिद्ध कीजिए कि**

ar (ABC) = 2ar (DBC) है।



चित्र 10.24

हलः DE को मिलाइए। यहाँ BCED एक समांतर चतुर्भुज है, क्योंकि

BD = CE और BD $\parallel$ CE है।

ar (DBC) = ar (EBC) . . . (1)

[एक ही आधार BC और एक ही समांतर रेखाओं की बीच में है]

ΔABC में, BE एक माध्यिका है

अतः $ar(EBC)=\frac{1}{2}ar(ABC)$

अब, $\text{ar}(ABC) = \text{ar}(EBC) + \text{ar}(ABE)$

इसलिए, $\text{ar}(ABC) = 2\text{ar}(EBC)$

अतः $\text{ar}(ABC) = 2\text{ar}(DBC)$ [(1) से]

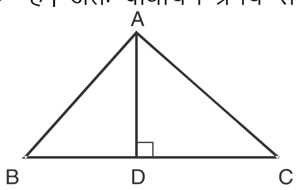
उदाहरण 6. एक न्यूनकोण ΔABC में ΔABC न्यून कोण त्रिभुज है। अतः सभी कोण 90^o से छोटे ही होंगे। AD भुजा BC पर लम्बवत् है। सिद्ध कीजिए कि

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times DC$$

हल : दिया है : ΔABC में, $AD \perp BC$

सिद्ध करना है :

उपपत्ति : ΔABD एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle D = 90^o$ है। अतः बौधायन प्रमेय से



चित्र 10.25

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = AD^2 + (BC - DC)^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = AD^2 + BC^2 + DC^2 - 2BC \times DC$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 = (AD^2 + DC^2) + BC^2 - 2BC \times DC \qquad \ldots (1)$$

ΔADC में, $\angle D = 90^o$ अतः

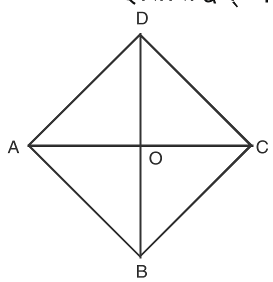
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 \qquad \ldots (2)$$

अतः (1) और (2) से

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times DC$$

''इतिसिद्धम्''।

उदाहरण 7. सिद्ध कीजिए कि समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग, उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।



चित्र 10.26

हल : दिया है : समचतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।

सिद्ध करना है :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि समचतुर्भुज के विकर्ण, समकोण पर समद्विभाजित करते हैं। अतः ΔAOB में

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \qquad \ldots (1)$$

इस प्रकार ΔBOC, ΔCOD और ΔAOD में क्रमशः

$$OB^2 + OC^2 = BC^2 \qquad \ldots (2)$$

$$OC^2 + OD^2 = CD^2 \qquad \ldots (3)$$

और $\quad OA^2 + OD^2 = AD^2$ . . . (4)

अतः (1), (2), (3) और (4) का योग करने पर

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2\left(OA^2 + OC^2 + OB^2 + OD^2\right)$$

यहाँ $\quad OA = OC = \dfrac{AC}{2}$ और $OB = OD = \dfrac{BD}{2}$

अतः $\quad AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2\left[\dfrac{AC^2}{4} + \dfrac{AC^2}{4} + \dfrac{BD^2}{4} + \dfrac{BD^2}{4}\right]$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$ ''इतिसिद्धम्''।

प्रश्नमाला 10.3

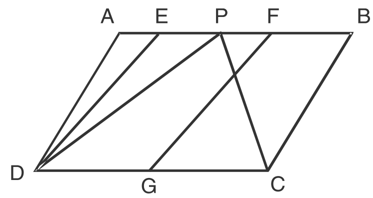
सत्य या असत्य लिखिए और अपने उत्तर का औचित्य दीजिए–

1. ABCD एक समांतर चतुर्भुज और X भुजा AB का मध्य–बिन्दु है। यदि ar (AXCD) = 24 सेमी^{2} है तो ar (ABC) = 24 सेमी^{2} है।
2. PQRS एक आयत है, जो त्रिज्या 13 सेमी वाले एक वृत्त के चतुर्थांश के अंतर्गत है। A भुजा PQ पर स्थित कोई बिन्दु है। यदि PS = 5 सेमी है, तो ar (RAS) = 30 सेमी^{2} है।

PQRS एक समांतर चतुर्भुज है जिसका क्षेत्रफल 180 सेमी^{2} है तथा A विकर्ण QS पर स्थित कोई बिन्दु है। तब Δ ASR का क्षेत्रफल 90 सेमी^{2} है।

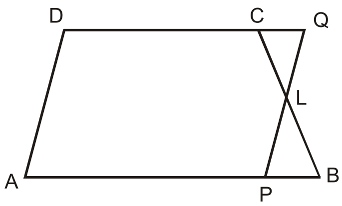
ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य–बिन्दु है। तब, $ar(BDE) = \dfrac{1}{4} ar(ABC)$ है।

5. चित्र 10.27 में, ABCD और EFGD दो समांतर चतुर्भुज हैं तथा G भुजा CD का मध्य–बिन्दु है। तब, $ar(DPC) = \dfrac{1}{2} ar(EFGD)$ है।



चित्र 10.27

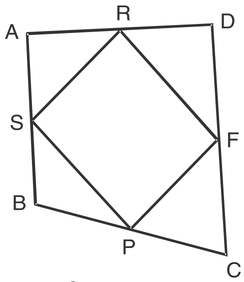
6. एक समलंब चतुर्भुज ABCD में, AB ॥ DC है तथा L भुजा BC का मध्य–बिन्दु है। L से होकर, एक रेखा PQ ॥ AD खींची गई है, जो AB को P पर और बढ़ाई गई DC को Q पर मिलती है (चित्र 10.28), सिद्ध कीजिए ar (ABCD) = ar (APQD)



चित्र 10.28

7. यदि किसी चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को क्रम से मिलाया जाता है, तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रकार बने समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल दिए हुए चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है (आकृति 10.29)।

[संकेत : BD को मिलाइए और A से BD पर लंब खींचिए।]



चित्र 10.29

8. एक व्यक्ति 10 मीटर पूर्व की ओर जाता है और तब 30 मीटर उत्तर की ओर जाता है। उसकी प्रारम्भिक स्थान से दूरी ज्ञात कीजिए।
9. एक सीढ़ी दीवार के साथ इस प्रकार रखी गई है कि इसका नीचे का सिरा दीवार से 7 मीटर दूर है। यदि इसका दूसरा सिरा 24 मीटर ऊँची एक खिड़की तक पहुँचे, तो सीढ़ी की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
10. एक समतल भूमि पर दो खंभे 7 मीटर और 12 मीटर लम्बे खड़े हैं। यदि उनके पादों के बीच में 12 मीटर की दूरी हो, तो उनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
11. एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षलम्ब की लम्बाई और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसकी भुजा की लम्बाई a है।
12. एक वर्ग के विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा 4 मीटर है।
13. एक समबाहु त्रिभुज ABC में, AD भुजा BC पर लम्बवत् हो, तो सिद्ध कीजिए कि
14. आयत ABCD के अन्दर कोई बिन्दु O है। सिद्ध कीजिए कि

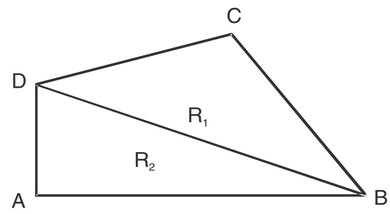
$$OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$$

15. एक अधिक कोण त्रिभुज ABC में कोण C अधिक कोण है। $AD \perp BC$ है और BC को आगे बढ़ाने पर D पर मिलता है। सिद्ध कीजिए कि

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\ BCCD$$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है, तो $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta PQR)$ होता है। समतल आकृति ABCD का कुल क्षेत्रफल R दोनों त्रिभुजाकार क्षेत्रों R_1 और R_2 के योग के बराबर है, अर्थात् $ar(R) = ar(R_1) + ar(R_2)$ है (चित्र 10.30)



चित्र 10.30

2. दो सर्वांगसम आकृतियों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं परंतु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं है।
3. एक समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभाजित करता है।
   (i) एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज, क्षेत्रफल में, बराबर होते हैं।
   (ii) एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बना एक समांतर चतुर्भुज और एक आयत क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
4. समान आधारों पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने समांतर चतुर्भुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
5. एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
6. समान आधारों और समान क्षेत्रफलों वाले त्रिभुजों के संगत शीर्षलंब समान होते हैं।
7. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने आयत / समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।
8. यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार और एक ही समांतर रेखाओं के बीच बने हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

विविध प्रश्नमाला 10

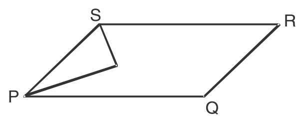
निम्नलिखित में से प्रत्येक में सही उत्तर लिखिए'–

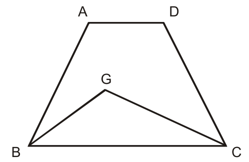
1. एक त्रिभुज की माध्यिका उसे विभाजित करती है, दो

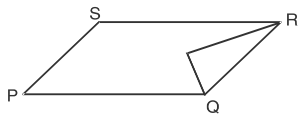
(A) बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में (B) सर्वांगसम त्रिभुजों में

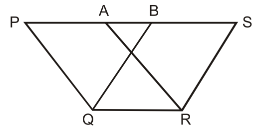
(C) समकोण त्रिभुजों में (D) समद्विबाहु त्रिभुजों में ( )

2. निम्नलिखित आकृतियों में से किसमें आप एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच, बने दो बहुभुज प्राप्त करते हैं

(A)


(B)


(C)


(D)


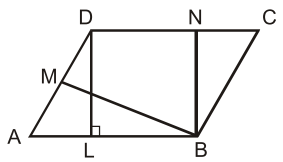
( )

3. 8 सेमी और 6 सेमी भुजाओं वाले एक आयत की आसन्न भुजाओं के मध्य–बिन्दुओं को मिलाने से बनी आकृति है

(A) 24 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक आयत (B) 25 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक वर्ग

(C) 24 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक समलंब (D) 24 सेमी^{2} क्षेत्रफल का एक समचतुर्भुज( )

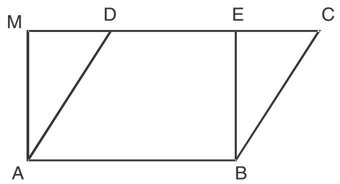
4. चित्र 10.31में, समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल है:



चित्र 10.31

(A) $AB \times BM$ (B) $BC \times BN$ (C) $DC \times DL$ (D) $AD \times DL$ ( )

5. चित्र 10.32 में, यदि समांतर चतुर्भुज ABCD और आयत ABEM समान क्षेत्रफल के हैं, तो



चित्र 10.32

(A) ABCD का परिमाप = ABEM का परिमाप

(B) ABCD का परिमाप < ABEM का परिमाप

(C) ABCD का परिमाप > ABEM का परिमाप

(D) ABCD का परिमाप $= \frac{1}{2}$ (ABEM का परिमाप) ( )

6. एक त्रिभुज की भुजाओं के मध्य–बिन्दु किसी भी एक शीर्ष को चौथा बिन्दु लेकर एक सरल चतुर्भुज बनाते हैं, जिसका क्षेत्रफल बराबर है

(A) $\frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABC})$ (B) $\frac{1}{3}\text{ar}(\text{ABC})$ (C) $\frac{1}{4}\text{ar}(\text{ABC})$ (D) ar (ABC) ( )

7. दो समांतर चतुर्भुज बराबर आधारों पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं। उनके क्षेत्रफलों का अनुपात है

(A) 1 : 2 (B) 1 : 1 (C) 2 : 1 (D) 3 : 1 ( )

8. ABCD एक चतुर्भुज है जिसका विकर्ण AC उसे बराबर क्षेत्रफल वाले दो भागों में विभाजित करता है तब ABCD

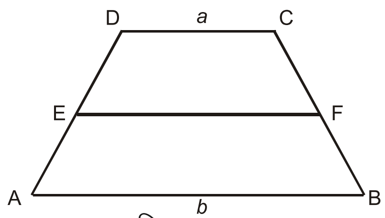
(A) एक आयत है (B) सदैव एक समचतुर्भुज है

(C) एक समांतर चतुर्भुज है (D) उपर्युक्त में से कोई नहीं ( )

9. एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं के बीच स्थित हैं, तो त्रिभुज के क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से अनुपात है

(A) 1 : 3 (B) 1 : 2 (C) 3 : 1 (D) 1 : 4 ( )

10. ABCD एक समलंब है जिसकी समांतर भुजाएँ $AB = a$ सेमी और $DC = b$ सेमी है (चित्र 10.33) E और F असमांतर भुजाओं के मध्य–बिन्दु है। ar (ABFE) और ar (EFCD) का अनुपात है



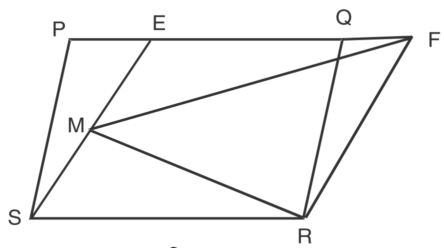
चित्र 10.33

(A) a : b (B) $(3a+b):(a+3b)$

(C) $(a+3b):(3a+b)$ (D) $(2a+b):(3a+b)$ ( )

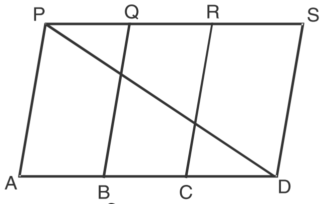
11. यदि P किसी त्रिभुज ABC की माध्यिका AD पर स्थित कोई बिन्दु है, तो है।

12. यदि चित्र 10.34 में, PQRS और EFRS दो समांतर चतुर्भुज हैं, तो $\text{ar}(\text{MFR}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{PQRS})$ है।



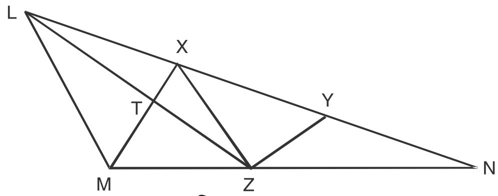
चित्र 10.34

13. चित्र 10.35 में, PSDA एक समांतर चतुर्भुज है। PS पर बिन्दु Q और R इस प्रकार लिए गए है कि PQ = QR = RS है तथा PA ॥ QB ॥ RC है। सिद्ध कीजिए कि ar (PQE) = ar (CFD) है।



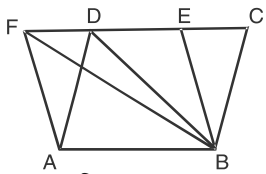
चित्र 10.35

14. X और Y त्रिभुज LMN की भुजा LN पर स्थित दो बिन्दु इस प्रकार हैं कि LX = XY = YN हैं। X से होकर जाती हुई एक रेखा LM के समांतर खींची गई जो MN को Z पर मिलती है (देखिए चित्र 10.36)। सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(\text{ZY}) = \text{ar}(\text{MZYX})$ है।



चित्र 10.36

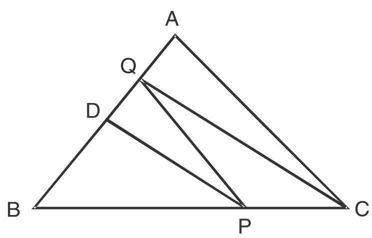
15. समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 90 सेमी^{2} है (चित्र 10.37) तो निम्नलिखित है। क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



चित्र 10.37

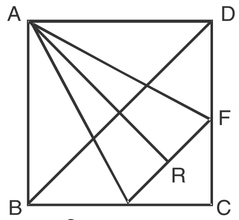
(i) ar (ABEF) (ii) ar (ABD) (iii) ar (BEF)

16. ΔABC, D भुजा AB का मध्य–बिन्दु है तथा P भुजा BC पर स्थित कोई बिन्दु है। यदि रेखाखंड CQ ॥ PD भुजा AB से Q पर मिलता है (चित्र 10.38), तो सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(\text{BPQ}) = \frac{1}{2}\text{ar}(\text{ABC})$ है।



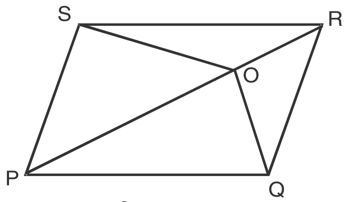
चित्र 10.38

17. ABCD एक वर्ग है। E और F क्रमशः BC और CD भुजाओं के मध्य–बिन्दु हैं। यदि R रेखाखंड EF का मध्य–बिन्दु है (चित्र 10.39), तो सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(\text{AER}) = \text{ar}(\text{AFR})$ है।



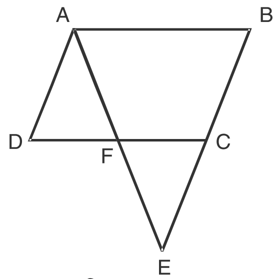
चित्र 10.39

18. O एक समांतर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR पर स्थित कोई बिन्दु है (चित्र 10.40)। सिद्ध कीजिए कि ar (PSO) = ar (PQO) है।



चित्र 10.40

19. ABCD एक समांतर चतुर्भुज है, जिसमें BC को E तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि CE = BC है (चित्र 10.41)। AE भुजा CD को F पर प्रतिच्छेद करती है। यदि ar (DFB) 3 सेमी^{2} है, तो समांतर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



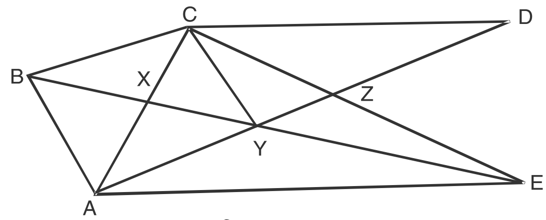
चित्र 10.41

20. किसी समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा BC पर कोई बिन्दु E लिया जाता है। AE और DC को बढ़ाया जाता है जिससे वे F पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(\text{ADF}) = \text{ar}(\text{ABFC})$ है।

21. एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। O से होकर एक रेखा खींची जाती है, जो AD को P और BC से Q पर मिलती है। दर्शाइए कि PQ इस समांतर चतुर्भुज ABCD को बराबर क्षेत्रफल वाले दो भागों में विभाजित करता है।

22. एक त्रिभुज ABCD की माध्यिकाएँ BE और CF परस्पर बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि Δ GBC का क्षेत्रफल चतुर्भुज AFGE के क्षेत्रफल के बराबर है।

23. चित्र 10.42 में, CD ∥ AE और CY ∥ BA है। सिद्ध कीजिए कि ar (CBX) = ar (AXY) है।

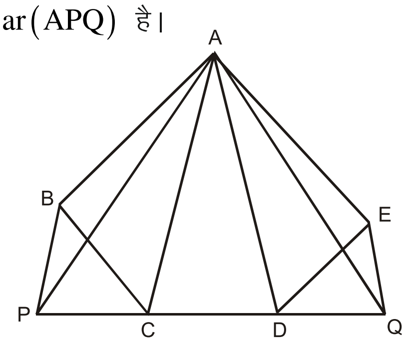


चित्र 10.42

24. ABCD एक समलंब है, जिसमें AB ∥ DC, DC = 30 सेमी और AB = 50 सेमी है। यदि X और Y क्रमशः AD और BC के मध्य–बिन्दु हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(\text{DCYX}) = \frac{7}{9}\text{ar}(\text{XYBA})$ है।

25. त्रिभुज ABC में यदि L और M क्रमशः AB और AC भुजाओं पर इस प्रकार स्थित बिन्दु हैं कि LM ∥ BC है। सिद्ध कीजिए कि ar (LOB) = ar (MOC) है।

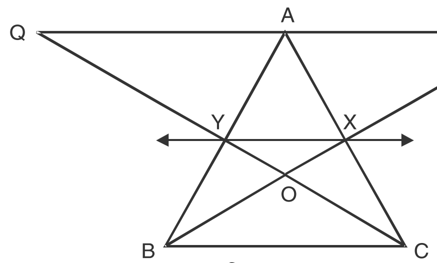
26. चित्र 10.43 में, ABCDE एक पंचभुज है। AC के समांतर खींची गई BP बढ़ाई गई DC को P पर तथा AD के समांतर खींची गई EQ बढ़ाई गई CD से Q पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(\text{ABCED}) = \text{ar}(\text{APQ})$ है।



चित्र 10.43

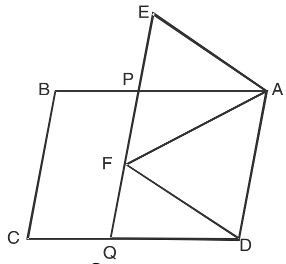
27. यदि एक त्रिभुज ABC की माध्यिकाएँ G पर मिलती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\text{ar}(\text{AGB}) = \text{ar}(\text{AGC}) = \text{ar}(\text{BGC}) = \frac{1}{3}\text{ar}(\text{ABC})$ है

28. चित्र 10.44 में, X और Y क्रमशः AC और AB के मध्य–बिन्दु हैं, QP ∥ BC और CYQ और BXP सरल रेखाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (ABP) = ar (ACQ) है।



चित्र 10.44

29. चित्र 10.44 में, ABCD और AEFD दो समांतर चतुर्भुज हैं। सिद्ध कीजिए कि ar (PEA) = ar (QFD) है। [संकेत : PD को मिलाइए।]



चित्र 10.45

उतरमाला

प्रश्नमाला 10.1

1. (i) DC एवं DC || AB ; (iii) QR, QR || PS ; (v) AD, AD || QC

प्रश्नमाला 10.2

1. 12.8 सेमी

प्रश्नमाला 10.3

1. असत्य $ar(A\times CD)=ar(ABCD)-ar(BC\times)=48-12=36\,\text{cm}^2$

2. सत्य $SR=\sqrt{13^2-5^2}=12ar(PAS)=\frac{1}{2}ar(PQRS)=30\,\text{cm}^2$

3. असत्य ΔQRS का क्षेत्रफल $=90\,\text{cm}^2$ तथा $ar(ASR)<ar(QRS)$

4. सत्य $\frac{ar(BDE)}{ar(ABC)}=\frac{\sqrt{3}(BD)^2}{\frac{\sqrt{3}(BC)^2}{4}}=\frac{1}{4}$

5. असत्य $ar(DPC)=\frac{1}{2}(ABCD)=ar(EFGD)$

6. $10\sqrt{10}$ मीटर

9. 25 मीटर

10. 13 मीटर

11. $\frac{\sqrt{3}}{a}a,\ \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

12. $4\sqrt{2}$

विविध प्रश्नमाला 10

1. A	**2.** D	**3.** D	**4.** C
5. C	**6.** A	**7.** D	**8.** D
9. B	**10.** B		

11. असत्यः $ar(ABD) = (ACD)$ और $ar(PBD) = ar(PCD)$ अतः $ar(ABP) = ar(ACP)$

12. सत्यः $ar(PQRS) = ar(EFRS) = 2ar(MFR)$

15. (i) 90 cm^2 ; (ii) 45 cm^2 ; (iii) 45 cm^2

19. 13 cm^3

अध्याय

11

समतलीय आकृतियों का क्षेत्रफल
(Area of Plane Figures)

B8ZIFU

11.01 प्रस्तावना (Introduction)

हम जानते हैं कि एक तल में तीन रेखाओं से घिरी आकृति त्रिभुज तथा चार भुजाओं से घिरी आकृति चतुर्भुज कहलाती है। इस सरल संवृत आकृति से घिरा हुआ भाग समतल क्षेत्र कहलाता है।

पिछले अध्याय में कक्षाओं में हम समतल आकृतियों (त्रिभुज तथा चतुर्भुज) के क्षेत्रफल ज्ञात कर चुके हैं।

इस अध्याय में हम हीरो के सूत्र से त्रिभुज, चतुर्भुज आयतीय मार्गों एवं चारदीवार इत्यादि के क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।

11.02 त्रिभुज का क्षेत्रफल

B99EHH

हम जानते है कि त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊंचाई होता है।

इस सूत्र से हम निम्नप्रकार त्रिभुज का आधार तथा ऊँचाई ज्ञात कर सकते है।

$$\text{त्रिभुज का आधार} = \frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊंचाई}}$$

$$\text{त्रिभुज का ऊँचाई} = \frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$$

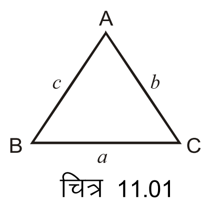
उपरोक्त सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए त्रिभुज की ऊँचाई आवश्यक है। यदि त्रिभुज की भुजाएँ दी गई हो लेकिन ऊँचाई नहीं दी गई हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल हीरो के सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है।

हीरो का सूत्र:

(1) यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः a, b, c हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\text{त्रिभुज का परिमाप}}{2}$ = त्रिभुज का अर्द्ध परिमाप



चित्र 11.01

(2) समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

यदि समद्विबाहु त्रिभुज की दो समान भुजाओं की लम्बाई a एवं तीसरी भुजा की लम्बाई b हो तो

समद्विबाहु त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप $s=\frac{a+a+b}{2}=\frac{2a+b}{2}$ होगा

हीरो का सूत्र $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$=\sqrt{\left(\frac{2a+b}{2}\right)\left(\frac{2a+b}{2}-a\right)\left[\frac{2a+b}{2}-b\right]\left[\frac{2a+b}{2}-a\right]}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2a+b}{2}\right)\times\left(\frac{b}{2}\right)\times\left(\frac{2a-b}{2}\right)\times\left(\frac{b}{2}\right)}$$

$$=\frac{b}{4}\sqrt{(2a+b)(2a-b)}=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$$

अतः समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$ वर्ग इकाई

(3) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

यदि समबाहु त्रिभुज की भुजा a हो तो इसका अर्द्धपरिमाप

$$s=\frac{a+a+a}{2}=\frac{3a}{2} \text{ होगा}$$

अतः हीरो के सूत्र से

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$=\sqrt{\frac{3a}{2}\left[\frac{3a}{2}-a\right]\left[\frac{3a}{2}-a\right]\left[\frac{3a}{2}-a\right]}$$

$$=\sqrt{\frac{3a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ वर्ग इकाई}$$

(4) समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल

यदि समकोण त्रिभुज का आधार की लम्बाई a एवं ऊँचाई b हो तो

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\times a\times b$ वर्ग इकाई

$= \frac{1}{2} \times$ (समकोण वाली भुजाओं का गुणनफल)

अतः समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times a \times b$ वर्ग इकाई

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ क्रमशः 8 सेमी, 15 सेमी एवं 17 सेमी हों।

हल: माना कि a = 8 सेमी, b = 15 सेमी, c = 17 सेमी

अतः अर्द्धपरिमाप $= s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8+15+17}{2} = \frac{40}{2} = 20$ सेमी

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{20(20-8)(20-15)(20-17)}$ वर्ग सेमी

$= \sqrt{20 \times 12 \times 5 \times 3}$ वर्ग सेमी

$= \sqrt{100 \times 36}$ वर्ग सेमी

=60 वर्गसेमी

अर्थात् त्रिभुज का क्षेत्रफल = 60 वर्ग सेमी

उदाहरण 2: एक समद्विबाहु त्रिभुज की दो समान भुजाएँ प्रत्येक 7 सेमी एवं तीसरी भुजा 6 सेमी तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना a = 7 सेमी, b = 6 सेमी

अतः समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$

$= \frac{6}{4}\sqrt{4 \times 49 - 36}$ वर्ग सेमी

$= \frac{6}{4}\sqrt{196 - 36}$ वर्ग सेमी

$= \frac{6}{4}\sqrt{160}$ वर्ग सेमी

$= \frac{6}{4} \times 4 \times \sqrt{10}$ वर्ग सेमी

$= 6\sqrt{10}$ वर्ग सेमी

उदाहरण 3: एक त्रिभुज का आधार 24 सेमी तथा ऊँचाई 12 सेमी हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ त्रिभुज का आधार = 24 सेमी एवं ऊँचाई = 12 सेमी

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 24 \times 12$ वर्ग सेमी

$= 144$ वर्ग सेमी

उदाहरण 4: एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जिसकी एक भुजा 8 सेमी हो।

हल: माना कि $a = 8$ सेमी

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (8)^2$ वर्ग सेमी

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 64 = 16\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

उदाहरण 5: एक त्रिभुजाकार मैदान की दो भुजाएँ क्रमशः 7 सेमी व 8 सेमी है। मैदान का परिमाप 24 सेमी है तो मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:

हल: माना $a = 7$ सेमी, $b = 8$ सेमी

परिमाप, $a + b + c = 24$ सेमी अतः तीसरी भुजा $c = 24 - 7 - 8 = 9$ सेमी

अर्द्धपरिमाप, $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{24}{2} = 12$ सेमी

त्रिभुजाकार मैदान का क्षेत्रफल

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$ वर्ग सेमी

$= \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3}$ वर्ग सेमी

$= \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3}$ वर्ग सेमी

$= 12\sqrt{5}$ वर्ग सेमी

प्रश्नमाला 11.1

1. एक त्रिभुज का आधार 20 सेमी तथा ऊँचाई 6 सेमी है तो त्रिभुज क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. त्रिभुज जिसकी भुजाऐं क्रमशः 15 सेमी, 25 सेमी एवं 30 सेमी है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

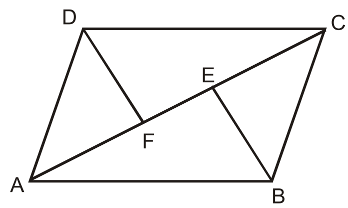
3. एक समद्विबाहु त्रिभुज जिसकी समान भुजा 8 सेमी है। तथा तीसरी भुजा 4 सेमी हो तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. एक समबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा 20 सेमी है तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. त्रिभुजाकार मैदान जिसकी दो भुजाएँ 8 सेमी तथा 15 सेमी है उसका परिमाप 40 सेमी हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. एक त्रिभुजाकार मेज जिसकी भुजाओं का अनुपात $3:4:5$ हो तथा परिमाप 36 मीटर है तो मेज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. एक खेत जिसकी आकृति त्रिभुजाकार है। इसकी भुजाएँ 20 मीटर 51 मीटर एवं 37 मीटर है तो उस खेत में 2×3 वर्ग मीटर माप की कितनी क्यारियाँ बनाई जा सकती है?

11.03 चतुर्भुज का क्षेत्रफल

चार भुजाओं से घिरी हुई समतलीय आकृति चतुर्भुज कहलाती है।

किसी चतुर्भज को उसके विकर्णो द्वारा दो त्रिभुजों में विभाजित किया जा सकता है। चित्रानुसार, चतुर्भज ABCD को विकर्ण AC दो त्रिभुजों ABC एवं ACD त्रिभुज में विभक्त करता है। अतः चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा।

चतुर्भुज के शीर्ष B एवं D से विकर्ण AC पर लम्ब क्रमशः BE एवं DF खींचिए।



चित्र 11.02

अतः त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AC \times BE$

तथा त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AC \times DF$

अर्थात चतुर्भज ABCD का क्षेत्रफल

$= \Delta ABC$ का क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल

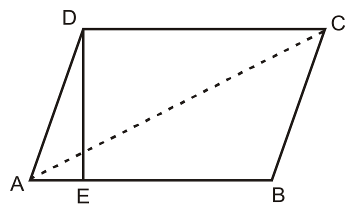
$$= \frac{1}{2} \times AC \times BE + \frac{1}{2} \times AC \times DF$$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times (BE + DF)$$

अतः चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्ण $\times$ (विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योग)

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

ऐसा चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाएँ परस्पर समान्तर एवं समान हो, समान्तर चतुर्भज कहलाता है।



चित्र 11.03

(क) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$=$ आधार $\times$ ऊँचाई $= AB \times DE$

(ख) समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण चतुर्भुज को दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभक्त करता है।

अतः समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= 2 \times (\Delta ABC$ का क्षेत्रफल$)$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 6: एक चतुर्भुज का विकर्ण 10 सेमी एवं विकर्ण पर सम्मुख शीर्षों से डाले गए लम्बों की लम्बाई क्रमशः 6 सेमी एवं 4 सेमी हो, तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

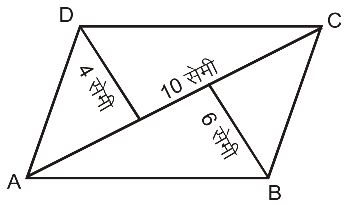
हल: चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$=\frac{1}{2}\times$ विकर्ण की लम्बाई × (विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योग)

$=\frac{1}{2}\times 10\times(6+4)$ वर्ग सेमी

$=\frac{1}{2}\times 10\times 10$ वर्ग सेमी

$= 50$ वर्ग सेमी



चित्र 11.04

उदाहरण 7: एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई 15 मीटर तथा आधार 10 मीटर हो।

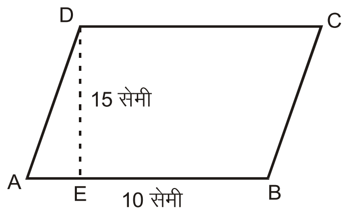
हल: समान्तर चतुर्भुज का आधार $= 10$ मीटर

ऊँचाई $= 15$ मीटर

समान्तर चतुर्भुज क्षेत्रफल–आधार × ऊँचाई

10×15 वर्ग मीटर

$= 150$ वर्ग मीटर



चित्र 11.05

उदाहरण 8: एक चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका विकर्ण AC = 15 सेमी तथा भुजाएँ AB = 7 सेमी, BC = 12 सेमी, CD = 12 सेमी एवं DA = 9 सेमी हो।

हल: चित्रानुसार, चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल

ΔABC में, AB = 7 सेमी, BC = 12 सेमी, AC = 15 सेमी

अतः अर्द्ध परिमाप $s=\dfrac{7+12+15}{2}=17$ सेमी

ΔABC का क्षेत्रफल

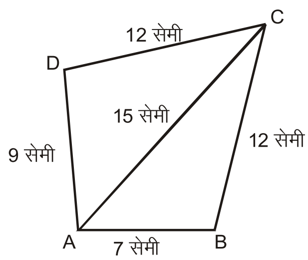
$=\sqrt{17\times(17-7)\times(17-12)\times(17-15)}$ वर्ग सेमी

$=\sqrt{17\times 10\times 5\times 2}$ वर्ग सेमी

$=\sqrt{1700}$ वर्ग सेमी

$=10\sqrt{17}$ वर्ग सेमी

$=10\times 4.12=41.2$ वर्ग सेमी



चित्र 11.06

इसी प्रकार ΔACD के लिए

AC = 15 सेमी, CD = 12 सेमी तथा DA = 9 सेमी

अतः $s = \frac{15+12+9}{2} = \frac{36}{2} = 18$ सेमी

ΔACD का क्षेत्रफल $= \sqrt{18(18-15)\times(18-12)(18-9)}$ वर्गसेमी

$= \sqrt{18\times3\times6\times9}$ वर्ग सेमी

$= 54$ वर्ग सेमी

अतः चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$= 41.2 + 54$

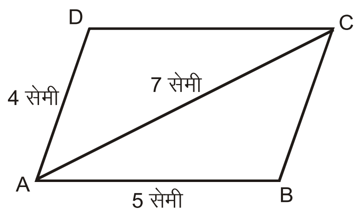
$= 95.2$ वर्ग सेमी

उदाहरण 9: किसी समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाएँ क्रमशः 5 सेमी एवं 4 सेमी है तथा विकर्ण 7 सेमी है। समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: चित्रानुसार, समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= 2 \times$ (ΔABC का क्षेत्रफल)

ΔABC के लिए

AB = 5 सेमी, BC = 4 सेमी, AC = 7 सेमी



चित्र 11.07

अतः $s = \frac{5+4+7}{2} = \frac{16}{2} = 8$ सेमी

ΔABC का क्षेत्रफल (हीरो के सूत्र से)

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{8(8-5)(8-4)(8-7)}$ वर्ग सेमी

$= \sqrt{8\times3\times4\times1}$ वर्ग सेमी

$= 4\sqrt{6}$ वर्ग सेमी

अतः समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$2 \times \Delta ABC$ का क्षेत्रफल

$= 2\times4\sqrt{6}$ वर्ग सेमी

$= 8\sqrt{6}$ वर्ग सेमी

प्रश्नमाला 11.2

1. चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण की लम्बाई 12 सेमी है तथा सम्मुख शीर्षों से डाले गए लम्बों की लम्बाई क्रमशः 7 सेमी एवं 8 सेमी है।
2. एक समान्तर चतुर्भुजाकार खेल के मैदान का क्षेत्रफल 2000 वर्ग मीटर है। यदि इसका आधार 50 मीटर हो तो मैदान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ क्रमशः AB = 3 सेमी, BC = 4 सेमी, CD = 6 सेमी एवं DA = 5 सेमी है तथा विकर्ण AC = 5 सेमी है।
4. चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ क्रमशः 9 सेमी, 40 सेमी, 28 सेमी एवं 15 सेमी है तथा इसकी प्रथम दो भुजाओं के मध्य समकोण है।

5. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो आसन्न भुजाएँ क्रमशः 50 सेमी एवं 40 सेमी हो तथा विकर्ण 30 सेमी हो।

6. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके एक विकर्ण की लम्बाई 5.2 सेमी है तथा विकर्ण के सम्मुख शीर्षों से लम्बों की दूरियाँ क्रमशः 3.5 सेमी है।

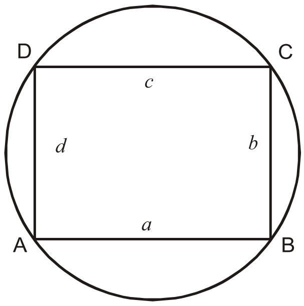
7. एक भूखण्ड समान्तर चतुर्भुजाकार आकृति का है। इस पर मिट्टी डलवानी है। मिट्टी डलवाने का व्यय 100 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से ज्ञात कीजिए जबकि भूखण्ड की आसन भुजाएँ 39 मीटर एवं 25 मीटर है। तथा विकर्ण 56 मीटर हो।

B9IAJ5

11.04 विभिन्न चतुर्भुजों का क्षेत्रफल

(1) **चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफलः** ऐसा चतुर्भुज जिसके चारों शीर्ष वृत की परिधि पर स्थित हों, चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है। चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते है।

चित्रानुसार एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD है, जिसकी भुजाएँ क्रमशः a, b, c एवं d है।



चित्र 11.08

अतः अर्द्ध परिमाप $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ है।

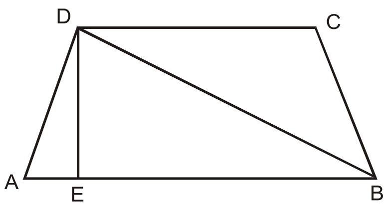
अतः चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

(2) **समचतुर्भुज का क्षेत्रफलः** ऐसा समान्तर चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ समान हो एवं जिसके विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित होते हो, समचतुर्भुज कहलाता है।

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $=\dfrac{1}{2}\times$ (विकर्णों का गुणनफल)

(3) **समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफलः** ऐसा चतुर्भुज जिसकी केवल दो भुजाएँ समान्तर हो समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है। चित्रानुसार ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है। जिसकी भुजाएँ AB एवं CD समान्तर है एवं दोनों समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी DE है। यहाँ DE भुजा AB पर लम्ब है तथा DB विकर्ण है।



चित्र 11.09

समलम्ब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

$=\Delta$ABD का क्षेत्रफल $+\Delta$BCD का क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}\times AB\times DE+\frac{1}{2}\times DC\times DE$$

$$=\frac{1}{2}\times DE\times(AB+DC)$$

अर्थात् समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$=\dfrac{1}{2}\times$ समान्तर भुजाओं का योग $\times$ समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 10: एक चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाएँ क्रमशः 36 सेमी, 77 सेमी, 75 सेमी एवं 40 सेमी है।

हलः माना $a = 36$ सेमी, $b = 77$ सेमी, $c = 75$ सेमी, $d = 40$ सेमी

अतः चक्रीय चतुर्भुज का अर्द्धपरिमाप

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{36+77+75+40}{2} = \frac{228}{2} = 114 \text{ सेमी}$$

चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$= \sqrt{(114-36)(114-77)(114-75)(114-40)} \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= \sqrt{78 \times 37 \times 39 \times 74} = 2886 \text{ वर्ग सेमी}$$

उदाहरण 11: किसी समचतुर्भुज के विकर्णों की लम्बाई क्रमशः 20 सेमी एवं 30 सेमी है, तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

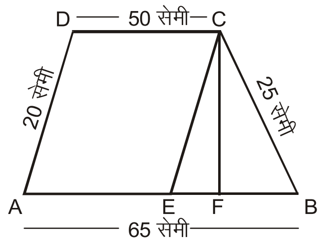
हलः समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times (\text{विकर्णों की लम्बाइयों का गुणनफल})$$

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times 30 = 300 \text{ वर्ग सेमी}$$

उदाहरण 12: समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समानान्तर भुजाएँ क्रमशः 65 सेमी एवं 50 सेमी है तथा असमान्तर भुजाएँ क्रमशः 20 सेमी एवं 25 सेमी है।

हलः चित्रानुसार ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है। जिसकी समान्तर भुजाएँ $AB = 65$ सेमी, $DC = 50$ सेमी एवं असामान्तर भुजाएं $AD = 20$ सेमी एवं $BC = 25$ सेमी है।



चित्र 11.10

यहाँ $AD \parallel EC$ एवं $CF \perp AB$ है

अतः $EB = AB - AE = 65 - 50 = 15$ सेमी

एवं $EC = 20$ सेमी

अतः ΔBEC का अर्द्धपरिमाप $s = \frac{15+20+25}{2} = 30$ सेमी

$$\Delta BEC \text{ का क्षेत्रफल } = \sqrt{30(30-15)(30-20)(30-25)} \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= \sqrt{30 \times 15 \times 10 \times 5} = \sqrt{22500} \text{ वर्ग सेमी}$$

$= 150$ वर्ग सेमी

$$\Delta BEC \text{ की ऊँचाई } = CF = \frac{2 \times \Delta BCE \text{ का क्षेत्रफल}}{\text{आधार } BE}$$

$$= \frac{2 \times 150}{15} = 20 \text{ सेमी}$$

समान्तर चतुर्भुज AECD का क्षेत्रफल = AE × CF = 50 × 20 = 1000 वर्ग सेमी

अतः समलम्ब चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल

= (समान्तर चतुर्भुज AECD का क्षेत्रफल) + (ΔEBC का क्षेत्रफल)

= 1000 वर्ग सेमी + 150 वर्ग सेमी

= 1150 वर्ग सेमी

उदाहरण 13: एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी समान्तर भुजाएँ क्रमशः 32 सेमी एवं 37 सेमी है तथा समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी 20 सेमी हो।

हल: समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times \text{ (समान्तर भुजाओं का योग) } \times \text{ (समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी)}$$

$$= \frac{1}{2} \times (32 + 37) \times 20 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= \frac{1}{2} \times 69 \times 20 \text{ वर्ग सेमी} = 690 \text{ वर्ग सेमी}$$

प्रश्नमाला 11.3

1. एक चक्रीय चतुर्भुजाकार मैदान की भुजाएँ क्रमशः 72 मीटर 154 मीटर, 80 मीटर एवं 150 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। इस मैदान में टाइल बिछवाने का व्यय 5 रुपये प्रति वर्ग मीटर हो तो कुल व्यय ज्ञात कीजिए।
2. एक समचतुर्भुज के विकर्ण 25 सेमी तथा 42 सेमी है। इसका क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात कीजिए।
3. एक समचतुर्भुज का परिमाप 40 मीटर हो तथा उसके विकर्ण की लम्बाई 12 मीटर हो तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. एक समलम्बाकार खेत जिसकी समान्तर भुजाएँ 42 मीटर एवं 30 मीटर है तथा अन्य भुजाएँ 18 मीटर एवं 18 मीटर है। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. यदि एक समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 350 वर्ग सेमी हो एवं उसकी समान्तर भुजाओं की लम्बाई 26 सेमी एवं 44 सेमी हो तो समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।
6. एक मेज समलम्ब चतुर्भुजाकार है। मेज की समान्तर भुजाएँ 8 मीटर तथा 16 मीटर है मेज का क्षेत्रफल 108 वर्ग मीटर हो तो मेज की चौड़ाई (समान्तर भुजाओं के मध्य दूरी) ज्ञात कीजिए।

B9S6KS

11.05 आयत, वर्ग एवं चारों दीवारों का क्षेत्रफल

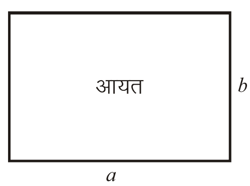
(1) चित्रानुसार, आयत भी लम्बाई a व एवं चौड़ाई b है

अतः आयत का परिमाप

= चारों भुजाओं की लम्बाई का योग

= 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

आयत का परिमाप = 2 (a+b)



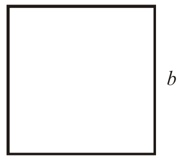
चित्र 11.11

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = a × b

(2) यदि वर्ग की भुजा a है

तो वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा = 4a

वर्ग का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = a^2



चित्र 11.12

(3) किसी कमरे या आयताकार टंकी की चारों दीवारों का क्षेत्रफल

= 2 × (लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

कमरे के फर्श का परिमाप = 2 × (लम्बाई + चौड़ाई)

अतः कमरे की चारो दीवारों का क्षेत्रफल = परिमाप × ऊँचाई

दृष्टांतीय उदाहरण

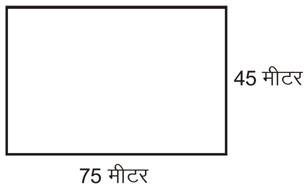
उदाहरण 14: एक आयताकार खेल के मैदान की लम्बाई 75 मीटर एवं चौड़ाई 45 मीटर है तो मैदान का क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ लम्बाई a = 75 मीटर, चौड़ाई b = 45 मीटर

अतः आयताकार खेल के मैदान का क्षेत्रफल = a × b

= 75 × 45 वर्ग मीटर

= 3375 वर्ग मीटर



चित्र 11.13

आयताकार मैदान का परिमाप = 2 × (a + b)

= 2 × (75 + 45)

= 2 × 120 = 240 मीटर

उदाहरण 15: एक आयताकार मैदान के चारों ओर 5 चक्कर लगाने में 600 मीटर की दूरी तय होती है। यदि मैदान की चौड़ाई 25 मीटर हो तो मैदान की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हलः मैदान का परिमाप $= \frac{600}{5} = 120$ मीटर

आयताकार मैदान का परिमाप $= 2(a + b)$

अतः $2[a + b] = 120$

$[a + 25] = 60$

$a = 60 - 25 = 35$ मीटर

अतः मैदान की लम्बाई = 35 मीटर

उदाहरण 16: एक वर्गाकार खेत की लम्बाई 120 मीटर है। इसका परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः वर्गाकार खेत की भुजा = 120 मीटर

अतः खेत का परिमाप = 4 × भुजा

= 4 × 120 मीटर

= 480 मीटर

खेत का क्षेत्रफल = (भुजा)^2

= $(120)^2$

= 14400 वर्गमीटर

उदाहरण 17: एक आयताकार मैदान की लम्बाई 35 मीटर एवं चौड़ाई 20 मीटर है। इसमें टाइल बिछवानी है। यदि टाइल की माप 7 सेमी × 5 सेमी हो तो कितनी टाइलों की आवश्यकता होगी।

हल: आयताकार मैदान की लम्बाई $= 35$ मीटर

चौड़ाई $= 20$ मीटर

मैदान का क्षेत्रफल $= 35 \times 20$ वर्गमीटर

$= 700$ वर्गमीटर

टायल की लम्बाई $= 7$ सेमी $= .07$ मीटर

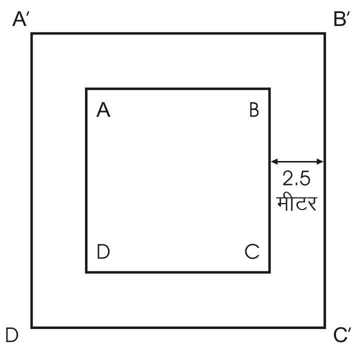
चौड़ाई $= 5$ सेमी $= .05$ मीटर

एक टायल का क्षेत्रफल $= .07 \times .05 = .0035$ वर्ग मीटर

$$\text{मैदान में लगने वाली टाइलों की संख्या} = \frac{\text{मैदान का क्षेत्रफल}}{\text{एक टायल का क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{700}{.0035} = \frac{7000000}{35} = 200000$$

उदाहरण 18: एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 625 वर्ग मीटर है इसके बाहर चारों ओर 2.5 मीटर चौड़ा मार्ग बना हुआ है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि मार्ग में 50 सेमी लम्बाई के वर्गाकार चौके लगाने हो, तो कितने चौकों की आवश्यकता होगी।



चित्र 11.14

हल: प्रश्नानुसार वर्गाकार मैदान का

क्षेत्रफल $= 625$ वर्ग मीटर

अतः मैदान की लम्बाई $= \sqrt{\text{क्षेत्रफल}}$

$= \sqrt{625}$ मीटर

$= 25$ मीटर

चित्रानुसार मैदान के बाहर चारों ओर 2.5 मीटर चौड़ा मार्ग बना हुआ है। अतः मार्ग सहित बाहरी लम्बाई

$= (25 + 2.5 + 2.5)$ मीटर

$= 30$ मीटर

अतः मार्ग सहित मैदान का क्षेत्रफल $= 30 \times 30$ वर्ग मीटर

$= 900$ वर्ग मीटर

मार्ग का क्षेत्रफल = मार्ग सहित मैदान का क्षेत्रफल – वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल

$= (900 - 625)$ वर्ग मीटर

$= 275$ वर्ग मीटर

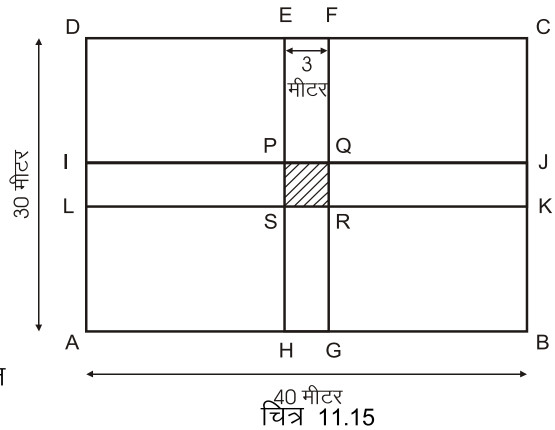
मार्ग में लगने वाले वर्गाकार चौकों की लम्बाई $= 50$ सेमी $= 50$ मीटर

एक वर्गाकार चौके का क्षेत्रफल $= .50 \times .50$ वर्ग मीटर $= .25$ वर्ग मीटर

$$\text{अतः मार्ग में लगने वाले चौकों की संख्या} = \frac{275}{.25}$$

$$= \frac{27500}{25} = 1100$$

उदाहरण 19: एक आयताकार मैदान 40 मीटर लम्बा और 30 मीटर चौड़ा है। इसके बीचों–बीच 3 मीटर चौड़ा मार्ग लम्बाई और चौड़ाई के समान्तर बना हुआ है। इस मार्ग पर 200 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कंकरीट बिछवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।



चित्र 11.15

हलः प्रश्नानुसार, मैदान की लम्बाई

= 40 मीटर

मैदान की चौड़ाई = 30 मीटर

मैदान का क्षेत्रफल

= 40×30 वर्ग मीटर

= 1200 वर्गमीटर

चित्रानुसार, लम्बाई के समान्तर

IJKL का क्षेत्रफल

= 40×3 =120 वर्ग मीटर

चौड़ाई के समान्तर EFGH का क्षेत्रफल

= $30 \times 3 = 90$ वर्ग मीटर

छायादार भाग PQRS का क्षेत्रफल = $3 \times 3 = 9$ वर्ग मीटर

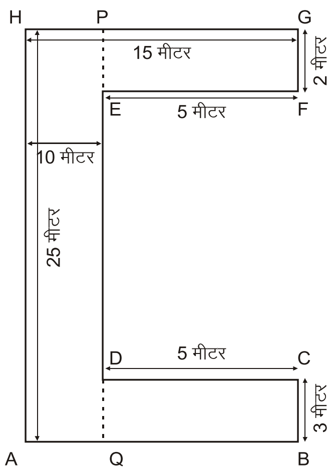
सम्पूर्ण मार्ग का क्षेत्रफल = $120 + 90 - 9 = 201$ वर्ग मीटर

इस मार्ग पर 200 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कंकरीट बिछवाने का कुल व्यय

= $201 \times 200 = 40200$ रुपये

उदाहरण 20: चित्र में दिये गये मापों के आधार पर क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः चित्रानुसार दिये गए क्षेत्र को हम आयतों में विभक्त कर सकते है।



चित्र 11.16

(i) आयत GFEP का क्षेत्रफल

= $EF \times GF$

= 5×2 वर्ग मीटर

= 10 वर्ग मीटर

(ii) आयत BCDQ का क्षेत्रफल

= $QB \times BC$

= 5×3 वर्ग मीटर

= 15 वर्ग मीटर

(iii) आयत HPQA का क्षेत्रफल

= $HA \times HP$

= 25×10 वर्ग मीटर

= 250 वर्ग मीटर

अतः दिये गये क्षेत्र का क्षेत्रफल

= आयत GFEP का क्षेत्रफल + आयत QBCD का क्षेत्रफल + आयत HPQA का क्षेत्रफल

= $(10 + 15 + 250)$ वर्ग मीटर

= 275 वर्ग मीटर

उदाहरण 21: एक आयताकर कक्ष 7 मीटर लम्बा, 6 मीटर चौड़ा एवं 3.5 मीटर ऊँचाई का है। यदि इसमें 3 दरवाजे 2 मी × 1.5 मी के तथा 4 खिड़कियाँ 1.25 मी. × 1 मी की हों, तो 4 रु 50 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से दीवारों पर रंग करवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल: कक्ष की लम्बाई = 7 मीटर, चौड़ाई = 6 मीटर, ऊँचाई = 3.5 मीटर

अतः कक्ष की चारों दीवारों का क्षेत्रफल

= 2 × (लम्बाई + चौड़ाई) × ऊँचाई

= 2 × (7 + 6) × 3.5 वर्ग मीटर

= 91 वर्ग मीटर

एक दरवाजे का क्षेत्रफल = 2 × 1.5 वर्ग मीटर = 3 वर्ग मीटर

अतः तीन दरवाजों का क्षेत्रफल = 3 × 3 = 9 वर्ग मीटर

एक खिडकी का क्षेत्रफल = 1.25 × 1 वर्ग मीटर

= 1.25 वर्ग मीटर

अतः चार खिड़कियों का क्षेत्रफल = 4 × 1.25 वर्ग मीटर

= 5.00 वर्ग मीटर

दरवाजे एवं खिड़कियों को छोडकर चारों दीवारों का

शेष क्षेत्रफल = 91 – (9 + 5) वर्ग मीटर

= 91 – 14 वर्ग मीटर

= 77 वर्ग मीटर

दीवारों पर रंग कराने का व्यय = 77 × 4.50 रुपये

= 346.50 रुपये

उदाहरण 22: एक आयताकार पानी का टैंक 12 मीटर लम्बा, 6 मीटर चौड़ा तथा 2 मीटर गहरा है। इसकी चारों दीवारों एव तल की मरम्मत कराने का खर्च 15 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

हल: आयताकार पानी के टैंक की लम्बाई = 12 मीटर

चौड़ाई = 6 मीटर

गहराई = 2 मीटर

टैंक की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2 × गहराई × (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 × 2 × (12 + 6) वर्ग मीटर

= 72 वर्ग मीटर

टैंक के तल का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 12 × 6 वर्ग मीटर

= 72 वर्ग मीटर

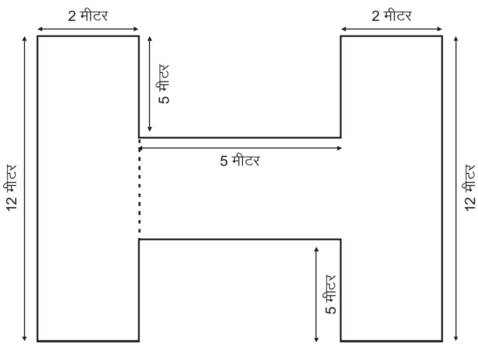
टैंक की चारों दीवारों एवं तल का क्षेत्रफल = 72 वर्ग मीटर + 72 वर्ग मीटर = 144 वर्ग मीटर

चारों दीवारों एवं तल मरम्मत कराने का खर्च

= 144 × 15 =2160 रुपये

प्रश्नमाला 11.4

1. निम्नलिखित माप के आयतों का क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात कीजिए।
   (i) लम्बाई 9.5 मीटर चौड़ाई 7.5 मीटर
   (ii) लम्बाई 125 मीटर चौड़ाई 75 मीटर
   (iii) लम्बाई 12.5 सेमी चौड़ाई 7.5 सेमी
2. निम्नलिखित माप की भुजा के वर्गों के क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात कीजिए।
   (i) 5.3 मीटर (ii) 8.5 मीटर (iii) 9.6 मीटर
3. एक वर्गाकार मैदान के 4 चक्कर लगाने पर 16 किमी की दौड़ पूर्ण होती है तो मैदान की लम्बाई एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. एक आयताकार खेत 75 मीटर लम्बा एवं 45 मीटर चौड़ा है इसमें 5 मीटर लम्बी एवं 3 मीटर चौड़ी कितनी क्यारियाँ बन सकती है।
5. एक कमरे की लम्बाई 10 मीटर तथा चौड़ाई 5 मीटर है। इसके फर्श पर 50 वर्ग सेमी के कितने चौकों की आवश्यकता होगी 20 रुपये प्रति चौके की दर से चौके लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
6. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 2025 वर्ग मीटर हैं इसके चारों ओर 3.5 मीटर चौड़ा मार्ग हो तो मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. एक आयताकार कमरा 40 मीटर लम्बा तथा 25 मीटर चौड़ा है। इसके चारों ओर2.5 मीटर चौड़ाई की एक सड़क है। इसमें 50 सेमी × 70 सेमी के चौके बिछाने है। चौकों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. एक आयताकार मैदान 60 मीटर लम्बा और 40 मीटर चौड़ा है इसके बीचो–बीच 4 मीटर चौड़ा मार्ग लम्बाई और चौड़ाई के समानतर बना है। इस मार्ग पर 100 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से मिट्टी डलवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
9. चित्र में दी गई आकृति का क्षेत्रफल एवं परिमाप ज्ञात कीजिए।



चित्र 11.17

10. एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 15.35 मीटर, 4.65 मीटर एवं 6.50 मीटर है। यदि कमरे में 4 दरवाजे प्रत्येक 1.5 मीटर × 1.3 मीटर और 3 खिडकियाँ प्रत्येक 1.5 मीटर × 12 मीटर की हो तो 3.40 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कमरे में रंग करवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।
11. एक पानी की टंकी 10 मीटर लम्बी, 8 मीटर चौड़ी तथा 2 मीटर गहरी है। इसकी चारों दीवारों एवं तल की मरम्मत कराने का व्यय 15 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

2. हीरो के सूत्र से त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ वर्ग इकाई,

   जहाँ $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\text{त्रिभुज का परिमाप}}{2} =$ त्रिभुज का अर्द्ध परिमाप जहाँ a, b, c त्रिभुज की भुजाएँ हैं।

3. समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ वर्ग इकाई, जहाँ a, त्रिभुज की समान भुजा तथा b अन्य भुजा है।

4. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ वर्ग इकाई जहाँ a भुजा है

5. समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (समकोण वाली भुजाओं का गुणनफल)

   या

   $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

6. चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ विकर्ण $\times$ (विकर्ण पर डाले गए लम्बों का योग)

7. समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार $\times$ ऊँचाई

8. चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ वर्ग इकाई, जहाँ a, b, c, d भुजाएं है तथा $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

9. समचतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ (विकर्णों की लम्बाइयों का गुणनफल)

10. समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

    $= \frac{1}{2} \times$ (समान्तर भुजाओं का योग) $\times$ समान्तर भुजाओं के मध्य की दूरी

11. आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई

12. वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$

13. चार दीवारों का क्षेत्रफल $= 2 \times$ (लम्बाई + चौड़ाई) $\times$ ऊँचाई

विविध प्रश्नमाला 11

1. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 8 सेमी है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा

(A) $16\sqrt{3}$ वर्ग सेमी (B) $8\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

(C) $64\sqrt{3}$ वर्ग सेमी (D) $4\sqrt{3}$ वर्ग सेमी ( )

2. एक त्रिभुज की भुजाएँ 40 सेमी, 70 सेमी एवं 90 सेमी है, त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा

(A) $600\sqrt{5}$ वर्ग सेमी (B) $500\sqrt{6}$ वर्ग सेमी

(C) $482\sqrt{5}$ वर्ग सेमी (D) $60\sqrt{5}$ वर्ग सेमी ( )

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज की समान भुजाएँ 6 सेमी तथा अन्य भुजा 8 सेमी है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा

(A) $8\sqrt{5}$ वर्ग सेमी (B) $5\sqrt{8}$ वर्ग सेमी

(C) $3\sqrt{55}$ वर्ग सेमी (D) $3\sqrt{8}$ वर्ग सेमी ( )

4. समबाहु त्रिभुज का परिमाप 60 सेमी हो तो उसका क्षेत्रफल होगा

(A) $400\sqrt{3}$ वर्ग सेमी (B) $100\sqrt{3}$ वर्ग सेमी

(C) $50\sqrt{3}$ वर्ग सेमी (D) $200\sqrt{3}$ वर्ग सेमी ( )

5. एक समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल 36 वर्ग सेमी है एवं आधार 9 सेमी हो तो लम्ब की लम्बाई होगी

(A) 8 सेमी (B) 4 सेमी (C) 16 सेमी (D) 32 सेमी ( )

6. किसी वर्ग की भुजा 10 सेमी हो तो परिमाप होगा

(A) 20 सेमी (B) 10 सेमी (C) 40 सेमी (D) 30 सेमी ( )

7. समचतुर्भुज के विकर्ण 8 सेमी एवं 6 सेमी हो तो उसका क्षेत्रफल होगा

(A) 48 वर्ग सेमी (B) 24 वर्ग सेमी (C) 12 वर्ग सेमी (D) 96 वर्ग सेमी ( )

8. किसी कमरे का परिमाप 40 मीटर और ऊँचाई 4 मीटर है तो उसकी चारों दीवारों का क्षेत्रफल होगा

(A) 40 वर्ग सेमी (B) 80 वर्ग सेमी (C) 120 वर्ग सेमी (D) 160 वर्ग सेमी ( )

9. समबाहु त्रिभुज की लम्बाई क्या होगी जिसका क्षेत्रफल $9\sqrt{3}$ वर्ग सेमी है।

____

10. चक्रीयचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

____

11. एक वर्ग का क्षेत्रफल 144 आर है तो इसका परिमाप लिखिए।

____

12. समान्तर चतुर्भुज का आधार 18 मीटर एवं क्षेत्रफल 174.60 वर्गमीटर हो तो इसकी ऊँचाई लिखिए।

____

13. चतुर्भुज का क्षेत्रफल लिखिए जिसका विकर्ण 6 सेमी एवं अन्तः लम्बों का योग 12 सेमी है।

____

14. किसी त्रिभुज की भुजाओं का अनुपात 25 : 17 : 12 है तथा परिमाप 540 मीटर है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. एक समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 12 वर्ग सेमी है। इसका आधार ज्ञात कीजिए यदि इसकी समान भुजाओं की लम्बाई 5 सेमी हो।

16. किसी त्रिभुज का परिमाप 40 सेमी है यदि इसकी दो भुजाएँ क्रमशः 8 सेमी एवं 15 सेमी हो तो इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा सबसे लम्बी भुजा पर शीर्ष से डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

17. एक समचतुर्भुज का परिमाप 146 सेमी तथा एक विकर्ण की लम्बाई 55 सेमी हो तो समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

18. एक सम चतुर्भुजाकार घास के खेत में 18 गायों के खाने के लिए घास है। यदि इस समचतुर्भुज की प्रत्येक भुजा 30 मीटर हो और बड़ा विकर्ण 48 मीटर है तो प्रत्येक गाय को खाने के लिए इस घास के खेत का कितना क्षेत्रफल प्राप्त होगा।

19. दो विभिन्न रंगों के कपड़ों के 10 त्रिभुजाकार टुकड़ों को जोड़कर एक छाता बनाया जाता है। प्रत्येक टुकड़ें की माप 20 सेमी, 50 सेमी और 50 सेमी है। छाते में कितना कपड़ा लगा है।

20. एक समलम्ब चतुर्भुज की समानतर भुजाओं का अनुपात 16 : 5 है। जिसे एक आयत जिसकी भुजाएँ 63 मीटर एवं 5 मीटर में से काटा गया हैं यदि समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल का $\frac{4}{15}$ भाग हो तो समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाओं को ज्ञात कीजिए।

21. एक आयताकार मैदान का क्षेत्रफल 4356 वर्ग मीटर है मैदान की लम्बाई 99 मीटर है। मैदान के बीचों बीच लम्बाई एवं चौड़ाई के समान्तर 4.5 मीटर चौड़ी सड़क बनाई गई है। सड़क पर 1.50 मीटर भुजा वाले कितने वर्गाकार चौके लगेंगे।

22. एक कमरा 8 मीटर 50 सेमी लम्बा एवं 6 मीटर 50 सेमी चौड़ा है। इसके फर्श के लिए 25 सेमी चौड़ाई की कितनी लम्बी दरी पट्टी चाहिए? 20 रुपये प्रतिमीटर की दर से पट्टी का मूल्य ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 11.1

1.	60 वर्ग सेमी	**2.**	$50\sqrt{14}$ वर्ग सेमी
3.	$4\sqrt{15}$ वर्ग सेमी	**4.**	$100\sqrt{3}$ वर्ग सेमी
5.	60 वर्ग सेमी	**6.**	54 वर्ग सेमी
7.	51 क्यारियाँ		

प्रश्नमाला 11.2

1.	90 वर्ग सेमी	**2.**	40 मीटर
3.	18 वर्ग सेमी	**4.**	306 वर्ग सेमी
5.	1200 वर्ग सेमी	**6.**	18.2 वर्ग सेमी
7.	84000 रुपये		

प्रश्नमाला 11.3

1.	11544 वर्ग मीटर, 57720 रुपये	**2.**	525 वर्ग तथा 97.72 सेमी
3.	96 वर्ग मीटर	**4.**	610.9 वर्ग मीटर
5.	10 सेमी	**6.**	9 सेमी

प्रश्नमाला 11.4

1. (i) 71.25 वर्ग सेमी, 34 मीटर (ii) 9375 वर्ग मीटर, 400 मीटर
(iii) 93.75 वर्ग सेमी, 40 सेमी

2. (i) 28.09 वर्ग मीटर, 21.2 मीटर (ii) 72.25 वर्ग मीटर, 34 मीटर
(iii) 92.16 वर्ग मीटर, 38.4 मीटर

3.	250 मीटर, 62500 वर्ग मीटर	**4.**	225 क्यारियाँ
5.	1000 चौके, 20000 रुपये	**6.**	679 वर्ग मीटर
7.	1000 चौके	**8.**	38400 रुपये
9.	58 वर्ग मीटर	**10.**	839.12 रुपये
11.	2280 रुपये		

विविध प्रश्नमाला 11

1. (A)

2. (A)

3. (A)

4. (B)

5. (A)

6. (C)

7. (B)

8. (D)

9. 6 सेमी

11. 480 मीटर

12. 9.7 मीटर

13. 36 वर्ग सेमी

14. 9000 वर्ग मीटर

15. 8 सेमी

16. 60 वर्ग सेमी, $7\frac{1}{17}$ सेमी

17. 1320 वर्ग सेमी

18. 48 वर्ग मीटर

19. $2000\sqrt{6}$ वर्ग मीटर

20. 25.6 मीटर, 8 मीटर

21. 277 चौके

22. 221 मीटर एवं 4420 रुपये

अध्याय

12

घन और घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन
(Surface Area and Volume of Cube and Cuboid)

BA22HF

12.01 प्रस्तावना (Introduction)

पिछले अध्यायों में हमने त्रिभुज, चतुर्भुज एवं आयत जैसी समतल आकृतियों के क्षेत्रफल ज्ञात किये हैं। इस अध्याय में हम ठोस आकृतियों घन, घनाभ जैसे ईंट, माचिस की डिब्बी, चाक का डिब्बा, सन्दूक आदि के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करेंगे।

इन सभी वस्तुओं का आकार और आयतन निश्चित होता है। ये सभी आकृतियों त्रिविमीय ठोस आकृतियाँ है अर्थात् इनकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई होती है।

किसी ठोस आकृति के पृष्ठीय क्षेत्रफल से तात्पर्य समस्त पृष्ठों के क्षेत्रफल के योग से है तथा किसी ठोस द्वारा जितना स्थान घेरा जाता है वह उसका आयतन कहलाता है। क्षेत्रफल को वर्ग इकाई और आयतन को घन इकाई में मापा जाता है।

12.02 घनाभ (Cuboid)

कागज के आयताकार पत्रों (शीटों) को एक के ऊपर एक रखकर जो बण्डल बनता है उससे जो आकृति दिखाई देती है उसे घनाभ कहते है। इसका प्रत्येक फलक आयताकार होता है इसलिए घनाभ को आयतफल की ठोस भी कहते हैं। घनाभ में छः पृष्ठ (फलक), 8 शीर्ष, व 12 कोरे होती हैं। जैसे कमरा, सन्दूक, ईंट आदि। घनाभ के आमने–सामने के फलक परस्पर समान होते है। घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये इसके छः फलकों का क्षेत्रफल निकालना होता है।

घनाभ के फलक ABCD का क्षेत्रफल = फलक A'B'C'D का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

घनाभ के फलक ADD'A' का क्षेत्रफल = फलक BCC'B' का क्षेत्रफल = चौड़ाई × ऊँचाई

घनाभ के फलक ABB'A का क्षेत्रफल = फलक DCC'D' का क्षेत्रफल = ऊँचाई × लम्बाई

अतः घनाभ का सम्पूर्ण पष्ठीय क्षेत्रफल = [लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊँचाई × लम्बाई] वर्ग इकाई

12.03 घन (Cube)

यदि घनाभ का प्रत्येक फलक वर्गाकार हो अर्थात् लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर हो तो इसे घन कहते है।

$\because$ घन का प्रत्येक पृष्ठ वर्गाकार होता है।

इसलिए घन के एक पृष्ठ का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$

$\therefore$ घन के 6 पृष्ठों का क्षेत्रफल = 6 $(\text{भुजा})^2$

अतः घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 $(\text{भुजा})^2$ वर्ग इकाई

12.04 घन और घनाभ के विकर्ण (Diagonal of Cube and Cubiod)

घन या घनाभ के समान्तर फलक के दो सम्मुख शीर्षों को मिलाने वाली रेखा विकर्ण कहलाती है। अतः घन एवं घनाभ में कुल 4 विकर्ण होते है।

घनाभ के विकर्ण की लम्बाई $=\sqrt{(\text{लम्बाई})^2+(\text{चौड़ाई})^2+(\text{ऊँचाई})^2}$ इकाई

घन के विकर्ण की लम्बाई = भुजा $\sqrt{3}$ इकाई

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: एक कमरे की लम्बाई 5 मीटर, चौड़ाई 3.5 मीटर तथा ऊँचाई 4 मीटर है, तो कमरे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: कमरे की लम्बाई = 5 मीटर

चौड़ाई = 3.5 मीटर

ऊँचाई = 4 मीटर

कमरे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$=2(\text{लम्बाई}\times\text{चौड़ाई}+\text{चौड़ाई}\times\text{ऊँचाई}+\text{ऊँचाई}\times\text{लम्बाई})$$

$$=2(5\times3.5+3.5\times4+4\times5) \text{ वर्ग सेमी}$$

$$=2[51.5] \text{ वर्ग सेमी}$$

$$=103 \text{ वर्ग सेमी}$$

उदाहरण 2: 12 मीटर लम्बे, 9 मीटर चौड़े तथा 8 मीटर ऊँचे कमरे में अधिक से अधिक कितनी लम्बी छड़ रखी जा सकती है।

हल: कमरे की लम्बाई = 12 मीटर

चौड़ाई = 9 मीटर

ऊँचाई = 8 मीटर

कमरे में अधिक से अधिक रखी जाने वाली छड़ कमरे के विकर्ण के बराबर होगी।

अतः छड की लम्बाई = कमरे का विकर्ण $=\sqrt{(\text{लम्बाई})^2+(\text{चौड़ाई})^2+(\text{ऊँचाई})^2}$

$$=\sqrt{(12)^2+(9)^2+(8)^2} \text{ मीटर}$$

$$=\sqrt{144+81+64} \text{ मीटर}$$

$$=\sqrt{289} \text{ मीटर}$$

$$=17 \text{ मीटर}$$

उदाहरण 3: एक घन की भुजा 12 सेमी है तो घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: घन का सम्पूर्ण पष्ठीय क्षेत्रफल = 6 (भुजा)^2

$= 6 \times (12)^2$ वर्ग सेमी

$= 6 \times 144$ वर्ग सेमी

= 864 वर्ग सेमी

उदाहरण 4: एक सन्दूक 1 मीटर लम्बा, 60 सेमी चौड़ा 40 सेमी ऊँचा है। इसके पैंदे को छोड़कर बाहर की ओर सभी पृष्ठों पर 20 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से रंग कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल: सन्दूक की लम्बाई = 1 मीटर = 100 सेमी

चौड़ाई = 60 सेमी

ऊँचाई = 40 सेमी

सन्दूक के पैंदे को छोड़कर सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= (\text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई}) + 2[(\text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई}) + (\text{ऊँचाई} \times \text{लम्बाई})]$

$= (100 \times 60) + 2[(60 + 40) + (40 + 100)]$ वर्ग सेमी

$= 6000 + 2[2400 + 4000]$ वर्ग सेमी

$= 6000 + 2[6400]$ वर्ग सेमी

$= [6000 + 12800]$ वर्ग सेमी

= 18800 वर्ग सेमी

= 1.88 वर्ग मीटर

रंग कराने की दर = 20 रुपये प्रति वर्ग मीटर

अतः सन्दूक पर पैंदे को छोड़कर शेष सम्पूर्ण पृष्ठ पर रंग कराने का व्यय

$= 1.88 \times 20 = 37.60$ रुपये

उदाहरण 5: एक टिन के बक्से की लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमशः 15 सेमी, 10 सेमी एवं 8 सेमी है। ऐसे 20 बक्से बनाने हैं। इसमें लगने वाले टिन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि टिन का मूल्य 50 रुपये प्रति वर्ग मीटर हो, तो बक्सों में लगने वाले टिन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: एक बक्से की लम्बाई = 15 सेमी

चौड़ाई = 10 सेमी

ऊँचाई = 8 सेमी

एक बक्से का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2[15 \times 10 + 10 \times 8 + 8 + 15]$ वर्ग सेमी

$= 2[150 + 80 + 120]$ वर्ग सेमी

$= 2[350]$ वर्ग सेमी

= 700 वर्ग सेमी

20 बक्सों में लगे टिन का क्षेत्रफल

$= 700 \times 20 = 14000$ वर्ग सेमी

$= 1.4$ वर्ग मीटर

20 बक्सों में लगे टिन का मूल्य

$= 1.4 \times 50 = 70.0$ रुपये

प्रश्नमाला 12.1

1. एक बन्द लकड़ी के बक्से की लम्बाई 1 मीटर, चौड़ाई 60 सेमी एवं ऊँचाई 40 सेमी है तो बक्से का बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक सन्दूक की माप क्रमशः 40 सेमी, 30 सेमी एवं 20 सेमी है। सन्दूक का कवर बनाने में कितने वर्ग सेमी की आवश्यकता होगी।
3. एक कमरे की लम्बाई 5 मीटर, चौड़ाई 3.5 मीटर व ऊँचाई 4 मीटर है 15 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से छत व चारों दीवारों पर सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
4. एक घनाकार चौक के डिब्बे की भुजा 4 सेमी है तो चौक के डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा विकर्ण की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
5. एक घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 1014 वर्ग मीटर है तो घन की भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
6. ढक्कनदार एक सन्दूक 2.5 सेमी मोटी लकड़ी का बना है सन्दूक के अन्दर की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 1 मीटर, 65 सेमी एवं 55 सेमी है। इसके बाहर के सम्पूर्ण पृष्ठ पर 15 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से रंग कराने का खर्चा ज्ञात कीजिए।
7. एक घन का प्रत्येक पृष्ठ 100 वर्ग सेमी है। यदि आधार के समान्तर समतल द्वारा घन को काटकर दो बराबर भागों में बाँट दिया जाये, तो प्रत्येक समान भाग का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. एक बगैर ढक्कन का एक सन्दूक 3 सेमी मोटी लकड़ी का बना है उसकी बाहरी लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमशः 146 सेमी, 116 सेमी एवं 83 सेमी है उसके अन्दर का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

BAAXP3

12.05 घन और घनाभ का आयतन (Volume of Cube and Cuboid)

हम जानते है कि प्रत्येक ठोस वस्तुएँ स्थान घेरती हैं। इस घेरे गये स्थान के माप को उस वस्तु का आयतन कहते है। यदि वस्तु खोखली है तो उसे हवा या द्रव से भरा जा सकता है। यह द्रव उस वस्तु (बर्तन) के आकार का हो जाता है। इस स्थिति में बर्तन के अन्दर जितना द्रव भरा जाता है, वह उसकी धारिता (Capacity) कहलाती है।

किसी वस्तु की धारिता उस वस्तु के अन्दर भरे जा सकने वाले द्रव का आयतन होता है। इसका मात्रक घन मात्रक होता है।

घन एवं घनाभ का आयतन निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

घनाभ का आयन = (लम्बाई $\times$ चौड़ाई $\times$ ऊँचाई) घन इकाई

घन का आयतन = $(\text{भुजा})^3$ घन इकाई

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 6: एक घन का आयतन 216 घन मीटर है। उसकी भुजा ज्ञात कीजिए।

हल: माना घन की भुजा x मीटर है

$\therefore$ घन का आयतन = (भुजा)^3 = x^3 घनमीटर

प्रश्नानुसार $x^3 = 216 = 6 \times 6 \times 6 = (6)^3$

$x = 6$

अतः घन की भुजा = 6 मीटर

उदाहरण 7: एक पानी की टंकी 6 मीटर लम्बी, 5 मीटर चौड़ी एवं 4.5 मीटर गहरी है। उसमें कितने लीटर पानी आ सकता है। (1 लीटर = 1000 घन सेमी)

हल: टंकी की लम्बाई = 6 मीटर = 600 सेमी

चौड़ाई = 5 मीटर = 500 सेमी

गहराई = 4.5 मीटर = 450 सेमी

टंकी का आयतन = 600 × 500 × 450 घन सेमी

$$= \frac{600 \times 500 \times 450}{1000} \text{ लीटर}$$

= 135000 लीटर

टंकी में 135000 लीटर पानी भरा जा सकता है।

उदाहरण 8: एक बक्से की लम्बाई 30 सेमी, चौड़ाई 20 सेमी एवं ऊँचाई 6 सेमी है इसमें 10 सेमी × 5 सेमी × 2 सेमी माप की कितनी कैसेट रखी जा सकती है।

हल: बक्सें की लम्बाई = 30 सेमी

चौड़ाई = 20 सेमी

ऊँचाई = 6 सेमी

बक्से का आयतन = 30 × 20 × 6 घन सेमी

एक कैसेट का आयतन = 10 × 5 × 2 = 100 घन सेमी

$$\text{कैसेट की संख्या} = \frac{\text{बक्से का आयतन}}{\text{एक कैसेट का आयतन}}$$

$$= \frac{30 \times 20 \times 6}{100} = 36 \text{ कैसेट}$$

उदाहरण 9: एक लकड़ी का बक्सा 1 सेमी मोटी लकड़ी का बना हुआ है। उसकी बाहरी लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमशः 75 सेमी, 60 सेमी एवं 40 सेमी है तो बक्से में लगी लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: बक्से की लम्बाई = 75 सेमी

चौड़ाई = 60 सेमी

ऊँचाई = 40 सेमी

बक्से का बाहरी आयतन = 75 × 60 × 40 = 180000 घन सेमी

लकड़ी की मोटाई = 1 सेमी

बक्से की अन्दर की लम्बाई = 75 – 2 × 1 = 73 सेमी

चौड़ाई = 60 – 2 × 1 = 58 सेमी

ऊँचाई = 40 – 2 × 1 = 38 सेमी

बक्से के अन्दर का आयतन = 73 × 58 × 38 = 160892 घन सेमी

बक्से में लगी लकड़ी का आयतन = बक्से का बाहरी आयतन – बक्से का अन्दर का आयतन

= 180000 – 160892 = 19108 घन सेमी

उदाहरण 10: 20 मीटर लम्बी, 5 मीटर ऊँची और 50 सेमी मोटी दीवार बनाने में 25 सेमी × 16 सेमी × 10 सेमी माप की कितनी ईंटे लगेगी, जबकि दीवार में एक दरवाजा 2 मीटर × 1.5 मीटर और दो खिडकी 1.5 मीटर × 1 मीटर की है? 280 रुपये प्रति हजार की दर से ईंटों का मूल्य भी ज्ञात कीजिए।

हल: दीवार का आयतन = 20 × 5 × 0.5 = 50 घन मीटर

एक दरवाजा और दो खिड़कियों के लिए छोडे गये खाली स्थान का आयतन

= (दरवाजे की ऊँचाई × चौड़ाई × दीवार की मोटाई) +2 (खिड़की की ऊँचाई × चौड़ाई × दीवार की मोटाई)

$= \left[2 \times 1.5 \times 0.5 + 2(1.5 \times 1 \times 0.5)\right]$ घन मीटर

$= [1.5 + 1.5]$ घन मीटर

= 3.0 घन मीटर

दीवार का आयतन जहाँ ईटें लगेगी = (50 – 3) = 47 घन मीटर

एक ईंट का आयतन = (25 × 16 × 10) घन सेमी

$= \left(\frac{25}{100} \times \frac{16}{100} \times \frac{10}{100}\right)$ घन मीटर

$= \frac{4000}{1000000} = \frac{1}{2500}$ घन मीटर

ईंटों की संख्या $= \frac{47}{\frac{1}{2500}} = 47 \times 2500 = 117500$ ईंटे

ईंटों का मूल्य $= 117500 \times \frac{280}{1000} = 3290$ रुपये

प्रश्नमाला 12.2

1. माचिस की डिब्बी की माप 3 सेमी × 2 सेमी × 1 सेमी है। ऐसी 12 डिब्बीयों के पैकेट का आयतन ज्ञात कीजिए।
2. घन के एक पृष्ठ का परिमाप 24 सेमी है तो उस घन का आयतन ज्ञात कीजिए।
3. धातु के तीन घनों की कोर क्रमशः 3 सेमी, 5 सेमी तथा 4 सेमी है। उन्हें पिघलाकर एक नया घन बनाया गया है। इस नये घन का आयतन तथा इस घन की कोर की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

4. पानी की एक टंकी की लम्बाई 2.5 मीटर, चौड़ाई 2 मीटर है। उसमें 1500 लीटर पानी आता है। टंकी की गहराई ज्ञात कीजिए।

5. एक दीवार की लम्बाई 4 मीटर, चौड़ाई 15 सेमी तथा ऊँचाई 3 मीटर है। दीवार बनाने में 20 सेमी $\times$ 10 सेमी $\times$ 8 सेमी माप की कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी। यदि ईटों का मूल्य 120 रु. प्रति हजार हो तो ईंटो का कुल मूल्य ज्ञात कीजिए।

6. एक गाँव में 20 मीटर $\times$ 15 मीटर $\times$ 6 मीटर माप की एक पानी की टंकी बनी हुई है। उसमें कितने लीटर पानी आ सकता है। यदि प्रतिदिन उसमें से 1000 लीटर पानी खर्च किया जाये तो टंकी का पानी कितने दिन के लिए पर्याप्त होगा।

7. एक दीवार की लम्बाई 8 मीटर तथा ऊँचाई 4 मीटर है। दीवार 35 सेमी मोटी है। इसमें एक दरवाजा 2 मीटर $\times$ 1 मीटर का और दो खिडकियाँ 1.20 मीटर $\times$ 1 मीटर की है। दीवार बनाने का खर्च 1500 रुपये प्रति घन मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

8. 5 मीटर लम्बी, 2 मीटर ऊँचाई तथा 50 सेमी मोटाई एक दीवार बनाने के लिए 25 सेमी $\times$ 15 सेमी $\times$ 6 सेमी माप की कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी यदि दीवार में 10% स्थान सीमेन्ट का है।

9. तालाब से मिट्टी खोदकर मिट्टी को एक आयताकार मैदान में समान रूप से फैला दिया जाता है। यदि तालाब में खोदा गया गड्ढा 200 मीटर लम्बा, 50 मीटर चौड़ा और 0.75 मीटर गहरा है तो मैदान का धरातल कितना ऊँचा उठा जायेगा? मैदान का क्षेत्रफल 1500 वर्ग मीटर है।

10. लकडी का एक ढक्कनदार सन्दूक बाहर से 1.25 मीटर लम्बा 0.80 मीटर चौड़ा और 0.55 मीटर ऊँचा है। लकड़ी की मोटाई 2.5 सेमी यदि एक घनमीटर लकडी की तोल 250 किलोग्राम हो तो सन्दूक की तोल ज्ञात कीजिए।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि घन की भुजा a हो, तो घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय
   क्षेत्रफल $= 6\,a^2$
   घन का आयतन $= a^3$
   घन का विकर्ण $= a\sqrt{3}$
2. यदि घनाभ की लम्बाई a, चौड़ाई b व ऊँचाई c हो, तो घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल
   $= 2[ab + bc + ac]$
   घनाभ का आयतन $= a \times b \times c$
   घनाभ का विकर्ण$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
3. आयतन सम्बन्धी इकाईयाँ
   1 लीटर = 1000 घन सेमी
   1000 लीटर = 1 घनमीटर = 1 किलो लीटर
   1 घन सेमी = 1000 घन मिमी
   1 घन मीटर = 1000000 घन सेमी

विविध प्रश्नमाला 12

1. एक घन का आयतन 125 घन मीटर है, घन की भुजा होगी
(A) 7 मीटर (B) 6 मीटर (C) 5 मीटर (D) 2 मीटर ( )

2. एक घन का आयतन 1331 घन सेमी है घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल है
(A) 762 वर्ग सेमी (B) 726 वर्ग सेमी (C) 426 वर्ग सेमी (D) 468 वर्ग सेमी ( )

3. एक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4 मीटर, 3 मीटर और 2 मीटर है घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा
(A) 25 मीटर (B) 26 मीटर (C) 52 वर्ग मीटर (D) 62 मीटर ( )

4. 8 मीटर $\times$ 7 मीटर $\times$ 6 मीटर माप वाले घनाभ का विकर्ण है
(A) 12.2 मीटर (B) 12.02 मीटर (C) 14.2 मीटर (D) 14.02 मीटर ( )

5. एक घन की भुजा 5 सेमी है। घन का विकर्ण है
(A) $4\sqrt{3}$ सेमी (B) $2\sqrt{3}$ सेमी (C) $5\sqrt{3}$ सेमी (D) 5 सेमी ( )

6. एक घनाभ का आयतन 400 घन सेमी है और इसके आधार का क्षेत्रफल 80 वर्ग सेमी है तो घनाभ की ऊँचाई है
(A) 7 सेमी (B) 6 सेमी (C) 4 सेमी (D) 5 सेमी ( )

7. एक घनाभ की माप 15 सेमी $\times$ 12 सेमी $\times$ 6 सेमी है। इस घनाभ को पिघलाकर 3 सेमी वाले कितने घन बनाये जा सकते है।
____

8. दो घनाकार पासों की कोर 2 सेमी है। इन पासों के एक पृष्ठ को आपस में चिपका कर एक ठोस बनाया गया है। ठोस का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
____

9. तीन घनों की कोर क्रमशः 3 सेमी, 4 सेमी और 5 सेमी है इनसे बनने वाले एक घन की भुजा है।
____

10. एक खाली हौज 4 मीटर लम्बा और 3 मीटर चौड़ा हैं इसमें कितने घनमीटर पानी भरा जाये कि पानी की गहराई 2 मीटर हो जाये?
____

11. एक घनाकार बर्तन में 8 लीटर पानी आता हैं बर्तन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

12. किसी गोदाम की माप 60 मीटर $\times$ 25 मीटर $\times$ 10 मीटर हैं इस गोदाम में 1.5 मीटर $\times$ 1.25 मीटर $\times$ 0.5 मीटर की माप वाले लकड़ी के कितने अधिकतम क्रेट (Cratc) रखे जा सकते है।

13. 3 मीटर गहरी और 40 मीटर चौडी एक नदी 2 km प्रति घण्टा की चाल से बह कर समुद्र में गिरती है। एक मिनट में समुद्र में कितना पानी गिरेगा?

14. यदि एक समकोणिक समान्तर षटफलक की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का अनुपात 6 : 5 : 4 है और उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 33300 वर्ग सेमी है तो समकोणिक समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात कीजिए।

15. एक प्लाट 20 मीटर लम्बा और 15 मीटर चौड़ा है। प्लॉट के बाहर 10 मीटर लम्बा, 6 मीटर चौड़ा और 5 मीटर गहरा गड्डा खोदकर उससे निकाली गई मिट्‌टी को इस प्लॉट में बिछाया गया है। प्लॉट में बिछाई गई मिट्‌टी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 12.1

1. 2.28 वर्ग मीटर

2. 5200 वर्ग सेमी

3. 1282.5 रुपये

4. 96 वर्ग सेमी, $4\sqrt{3}$ सेमी

5. 13 सेमी

6. 53.55 रुपये

7. 400 वर्ग सेमी

8. 55400 वर्ग सेमी

प्रश्नमाला 12.2

1. 72 घन सेमी

2. 216 घन सेमी

3. 216 घन सेमी, 6 सेमी

4. 30 सेमी

5. 1125 ईंटे, 135 रुपये

6. 1800000 लीटर, 1800 दिन

7. 14490 रुपये

8. 2000 ईंटे

9. 50 सेमी

10. 25 कि. ग्राम

विविध प्रश्नमाला 12

1. (C)

2. (B)

3. (C)

4. (A)

5. (C)

6. (D)

7. 40 घन

8. 40 वर्ग सेमी

9. 6 सेमी

10. 24 घन मीटर

11. 2400 वर्ग सेमी

12. 16000 क्रेट

13. 4000 घन मीटर

14. 405000 घन सेमी

15. 1 मीटर

अध्याय

13

कोण एवं उनके माप
(Angle and their Measurement)

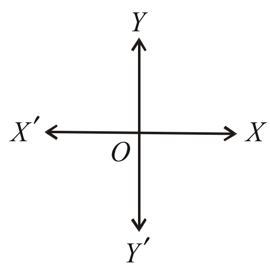
BAJTQQ

13.01 त्रिकोणमिति (Trigonometry) :

त्रिकोणमिति शब्द 'त्रिकोण एवं 'मिति' दो शब्दों से मिलकर बना है। त्रिकोणमिति का तात्पर्य है तीन कोणों वाली आकृति अर्थात् 'त्रिभुज' एवं मिति का अर्थ है 'माप'। अतः त्रिकोणमिति गणित की वह शाखा है जिसका विषय त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों की माप से संबंधित है। ऊँचाई दूरी एवं क्षेत्रफल आदि को ज्ञात करने के लिए त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों के परस्पर संबंधों का प्रयोग होता है। बहुधा ऐसी ऊँचाई और दूरी अथवा क्षेत्रफल आदि ज्ञात करने की आवश्यकता होती है जिसको सरलता से मापा नहीं जा सकता उनको भी हम त्रिकोणमिति की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ पृथ्वी से चन्द्रमा, सूर्य आदि की दूरियाँ ज्ञात करने में एवं किसी देश या क्षेत्र का मानचित्र बनाने में त्रिकोणमितीय सूत्रों का प्रयोग होता है। त्रिकोणमिति का ज्ञान भौतिकी, नौ सेना एवं इन्जिनियरिंग आदि मे भी बहुत उपयोगी है।

13.02 धनात्मक एवं ऋणात्मक दूरियाँ

XOX' एवं YOY' दो परस्पर लम्ब रेखाएँ एक दूसरे को बिन्दु O पर काटती है। इस प्रकार समतल चार भागों में विभक्त हो जाता है। ऐसी स्थिति में



चित्र 13.01

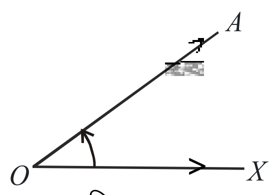
(i) O से OX, दिशा में मापी गयी दूरियाँ धनात्मक तथा OX' की दिशा में मापी गयी दूरियाँ ऋणात्मक मानी जाती है।

(ii) O से OY दिशा में मापी गयी दूरियां धनात्मक तथा O से OY' की दिशा में मापी गयी दूरियाँ ऋणात्मक मानी जाती हैं। $XOY, YOX', X'OY'$ तथा $Y'OX$ को क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय तथा चतुर्थ चतुर्थांश (quadrant) कहते हैं। यह ध्यान देने योग्य है कि यह क्रम घड़ी की सुईयों के घूमने की विपरीत दिशा में है।

BNIDH6

13.03 कोण (Angle) :

कोई किरण OA अपनी प्रारंभिक स्थिति OX से OA तक जाने में जितना घुमाव उत्पन्न करती है उसे कोण कहते हैं। इस प्रकार चित्र 13.02 में XOA एक कोण है। कोण के लिए हम संकेत $\angle$ का प्रयोग करते हैं।



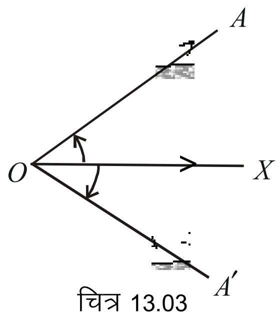
चित्र 13.02

साधारणतया कोणों के शीर्षों को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों यथा $A, B, C, \ldots$ से तथा कोणों की माप को α (एल्फा), β (बीटा), γ (गामा), θ (थीटा), ϕ (फाई), ψ (साई) आदि अक्षरों से व्यक्त किया जाता है।

धनात्मक तथा ऋणात्मक कोण :

यदि किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर घड़ी की सुईयों के विपरीत दिशा में (वामावर्त) घूमती है तो इस प्रकार निर्मित कोण धनात्मक कोण है। चित्र 10.03 में $\angle XOA$ एक धनात्मक कोण है।

यदि किरण OA अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से घड़ी के सुईयों की दिशा में (दक्षिणावर्त) घूमती है तो इस प्रकार निर्मित कोण ऋणात्मक माना जाता है। अतः $\angle XOA'$ एक ऋणात्मक कोण है।



चित्र 13.03

13.04 किसी भी परिमाण के कोण :

(i) कोई परिक्रामी किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर वामावर्त घूमकर प्रथम चतुर्थांश में जो कोण बनाती है वह $0°$ से $90°$ के मध्य होगा। उदाहरणार्थ : चित्र 13.04 (i) में $\angle XOA$.

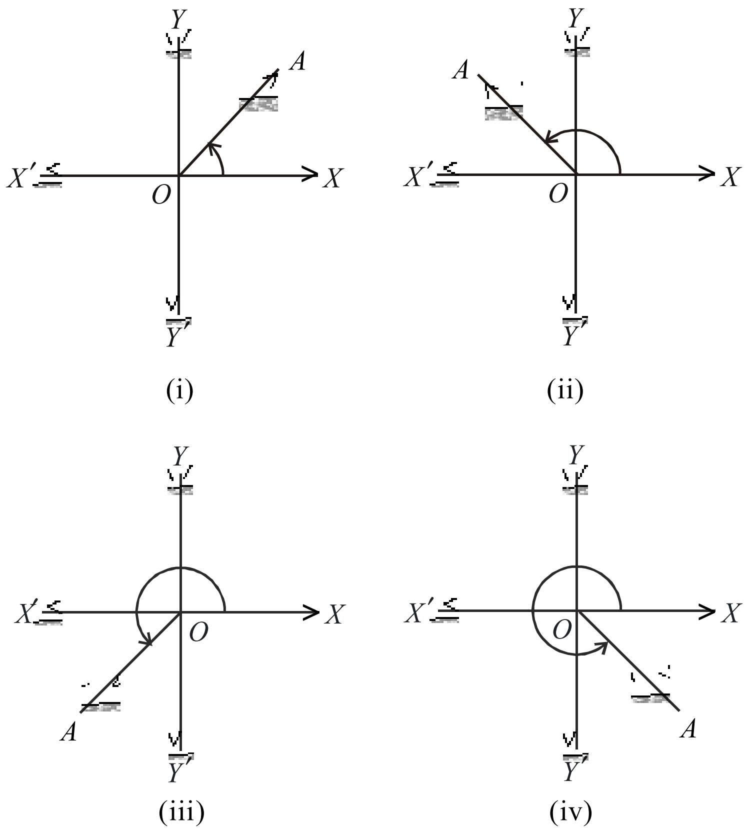
(ii) कोई परिक्रामी किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर वामावर्त घूमकर द्वितीय चतुर्थांश में जो कोण बनाती है वह $90°$ से $180°$ के मध्य होगा। उदाहरणार्थ : चित्र 13.04 (ii) में $\angle XOA$.

(iii) कोई परिक्रामी किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर वामावर्त घूमकर तृतीय चतुर्थांश में जो कोण बनाती है वह $180°$ से $270°$ के मध्य होगा। उदाहरणार्थ : चित्र 13.04 (iii) में $\angle XOA$.

(iv) कोई परिक्रामी किरण OA, अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX से प्रारम्भ कर वामावर्त घूमकर चतुर्थ चतुर्थांश में जो कोण बनाती है वह $270°$ से $360°$ के मध्य होगा। उदाहरणार्थ : चित्र 13.04 (iv) में $\angle XOA$.

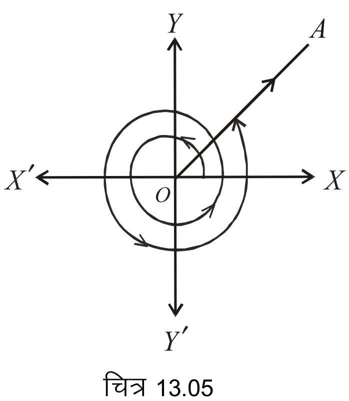
यदि किरण OA वामावर्त घूमकर एक पूरा चक्कर लगाकर अपनी प्रारम्भिक स्थिति OX में आ जाती है, तो वह $360°$ का कोण बनाती है और यदि दक्षिणावर्त घूमकर अपनी प्रारंभिक स्थिति में आ जाती है तो वह $-360°$ का कोण बनाती है।

अब तक हमने देखा कि कोण की अधिकतम माप $360°$ या 4 समकोण के बराबर हो सकती है, किन्तु कोण की माप $360°$ से भी अधिक हो सकती है। परिक्रामी किरण अपनी मूल स्थिति के परितः प्रत्येक पूर्ण चक्कर में $360°$ का कोण बनाती है।



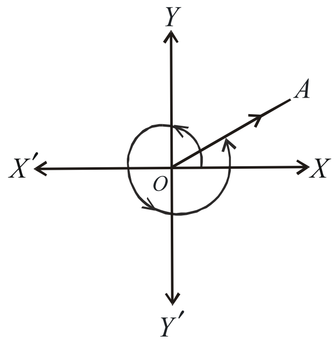
चित्र 13.04

यदि परिक्रामी किरण OA, अपनी प्रारंभिक स्थिति OX से प्रारंभ कर O के परितः पूरे दो चक्कर लगाती है तो वह $2\times 360^\circ = 720^\circ$ का कोण बनाती है। यदि वह दो चक्कर लगाने के बाद पुनः OA की स्थिति में आ जाती है, तो इस प्रकार निर्मित कोण $= 2\times 360^\circ + \angle XOA$ होता है। (चित्र 13.05)।



चित्र 13.05

उदाहरण 1. चित्र की सहायता से 390° का कोण निरूपित कीजिए।



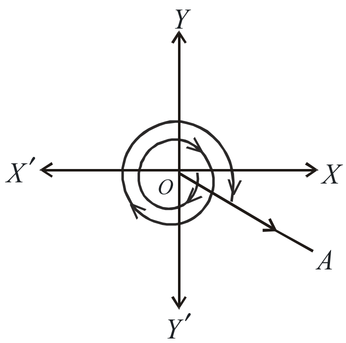
चित्र 13.06

हल : $390° = 1 \times 360° + 30°$ अतः परिक्रामी किरण OA अपनी प्रारंभिक स्थिति OX से प्रारंभ कर वामावर्त घूमकर एक पूर्ण चक्कर लगाकर फिर $30°$ पहले की दिशा में घूमेगी। इस प्रकार OA की अन्तिम स्थिति प्रथम चतुर्थांश में चित्रानुसार होगी।

उदाहरण 2. चित्र की सहायता से –750° का कोण निरूपित कीजिए।

हल : $-750° = -(2 \times 360°) - 30°$

अतः परिक्रामी रेखा OA अपनी प्रारंभिक स्थिति OX से प्रारंभ कर दक्षिणावर्त घूमकर दो पूर्ण चक्कर लगाकर फिर उसी दिशा में $30°$ घूमेगी। इस प्रकार उसकी अन्तिम स्थिति चतुर्थ चतुर्थांश में चित्रानुसार होगी।



चित्र 13.07

BNS9IT

13.05 कोणों की माप (Measurement of Angles):

(i) षष्टिक पद्धति (Sexagesimal system)

(ii) शतिक पद्धति (Centesimal system)

(iii) वृत्तीय पद्धति (Circular system)

(i) **षष्टिक पद्धति** : इस पद्धति में हम कोण को अंश, मिनट तथा सैकण्ड में मापते हैं। इनके पारस्परिक संबंध निम्नलिखित है :

एक समकोण = नब्बे अंश $= 90°$

एक अंश $(1°)$ = साठ मिनट $= 60'$

एक मिनट $(1')$ = साठ सैकण्ड $= 60''$

(ii) **शतिक पद्धति** : इस पद्धति को फ्रांसीसी पद्धति भी कहते है। इस पद्धति में हम कोण को ग्रेड़कला तथा विकला में मापते हैं। इसके पारस्परिक संबंध निम्नलिखित हैं :

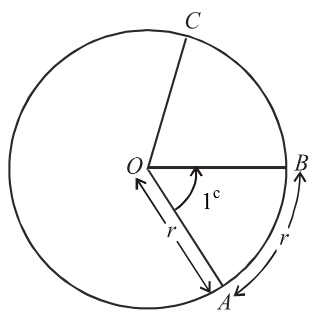
एक समकोण = 100 ग्रेड $= 100^g$

एक ग्रेड (1^g) = 100 कला $= 100'$

एक कला $(1')$ = 100 विकला $= 100''$

टिप्पणी : यह पद्धति प्रचलन में नहीं है।

(iii) **वृत्तीय पद्धति** : इस पद्धति में कोण के माप की इकाई रेडियन (Radian) है। ''किसी वृत्त के केन्द्र पर उसकी त्रिज्या के बराबर लम्बाई के चाप द्वारा अंतरित कोण एक रेडियन का होता है''।



चित्र 13.08

माना किसी वृत्त की त्रिज्या r तथा केन्द्र O है और वृत्त की परिधि पर कोई बिन्दु A है। बिन्दु A से एक चाप AB त्रिज्या r के बराबर लिया। इस प्रकार बना हुआ कोण $\angle AOB$ एक रेडियन कहलाता है। प्रतीक द्वारा एक रेडियन 1^c द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। अतः चित्र 13.08 में $\angle AOB = 1^c$.

माना वृत्त की परिधि पर कोई अन्य बिन्दु C है, तो

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\text{चाप } AC}{\text{चाप } AB}$$

या $$\frac{\angle AOC}{\text{चाप } AC} = \frac{\angle AOB}{\text{चाप } AB}$$

$$\angle AOC = \frac{\text{चाप } AC}{\text{चाप } AB} \times \angle AOB$$

$$= \frac{\text{चाप } AC}{\text{चाप } AB} \times 1^c$$

$$= \frac{\text{चाप } AC}{\text{चाप } AB} \text{ रेडियन} \qquad \cdots(1)$$

यदि $\angle AOC = \theta^c$ (θ रेडियन) तथा चाप $AC = x$ हो तो समीकरण (1) से

$$\theta^c = \frac{x}{r} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} \text{ रेडियन}$$

BP25KG

13.06 π (पाई) का मान

किसी वृत्त की परिधि और उसके व्यास का अनुपात सदैव अचर होता है। इस अचर राशि को ग्रीक अक्षर π (पाई) द्वारा व्यक्त किया जाता है, जो एक अपरिमेय संख्या है। दशमलव के 8 स्थानों तक π का मान $3{\cdot}14159265$ है, भिन्न रूप में इसका मान $22/7$ लेते हैं।

13.07 रेडियन का मान

हम जानते हैं कि

$$\pi = \frac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{वृत्त का व्यास}}$$

अतः यदि किसी वृत्त की त्रिज्या r हो तो उसका व्यास $2r$ तथा परिधि $2\pi r$ होती है। हम यह भी जानते हैं कि वृत्त के किसी चाप और उस चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण में एक निश्चित संबंध होता है चित्र 10.08 से

$$\frac{\angle AOB}{360^\circ} = \frac{\text{चाप } AB}{\text{वृत्त की परिधि}}$$

या $$\frac{\angle AOB}{\text{चाप } AB} = \frac{360^\circ}{\text{वृत्त की परिधि}}$$

या $\frac{1^c}{r} = \frac{360°}{2\pi r}$

या $1^c = \frac{180°}{\pi}$ $\quad\ldots(1)$

या $1^c = 57°17'45''$ लगभग (π का मान $3\cdot1416$ लेने पर)

इस प्रकार हम देखते हैं कि रेडियन का मान वृत्त की त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता है। अर्थात् सभी वृत्तों के लिए एक रेडियन का मान अचर होता है।

समीकरण (1) से

$$\pi^c = 180°$$

व्यवहार में चिह्न 'c' को छोड़ देते हैं और π^c के स्थान पर मात्र π का ही प्रयोग करते हैं। अर्थात् $180° = \pi$.

उदाहरण 3. 60° को रेडियन में परिवर्तित कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $180° = \pi$ रेडियन

$\therefore$ $1° = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

$\therefore$ $60° = \frac{\pi}{3}$ रेडियन

उदाहरण 4. $\frac{\pi}{4}$ रेडियन को अंशों में परिवर्तित कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $1^c = \frac{180°}{\pi}$

$\therefore$ $\frac{\pi}{4}$ रेडियन $= \frac{180°}{4} = 45°$ $\quad\therefore$

उदाहरण 5. किसी वृत्त के केन्द्र पर $\frac{\pi}{3}$ रेडियन का कोण अंतरित करने वाले चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : यदि वृत्त की त्रिज्या r तथा $\frac{\pi}{3}$ रेडियन का कोण अंतरित करने वाले चाप की लम्बाई x हो तो

$$\frac{\pi}{3} = \frac{x}{r}$$

या $x = \frac{\pi}{3} r.$

उदाहरण 6. किसी वृत्त की सम्पूर्ण परिधि द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि r त्रिज्या के वृत्त की सम्पूर्ण परिधि $2\pi r$ होती है और r लम्बाई के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण 1 रेडियन होता है।

$\because$ r लम्बाई की चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण $=1$ रेडियन

$\therefore$ 1 लम्बाई की चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण $=\frac{1}{r}$ रेडियन

$\therefore$ $2\pi r$ लम्बाई की चाप (परिधि) द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण $=\frac{1}{r}\times 2\pi r$ रेडियन $= 2\pi$ रेडियन

अतः वृत्त की सम्पूर्ण परिधि $2\pi r$ द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण का मापांक 2π रेडियन या $2\pi^c$ होता है।

उदाहरण 7. किसी घड़ी के मिनट की सुई को $\frac{3\pi}{2}$ रेडियन कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा?

हल : हम जानते हैं कि

4 समकोण $=2\pi$ रेडियन

$\because$ घड़ी के मिनट की सुई को 2π रेडियन कोण की रचना करने में समय लगता है $=1$ घंटा

$\therefore$ घड़ी के मिनट की सुई को 1 रेडियन कोण की रचना करने में समय लगेगा $=\frac{1}{2\pi}$ घंटा

$\therefore$ घड़ी के मिनट की सुई को $\frac{3\pi}{2}$ रेडियन कोण की रचना करने में समय लगेगा $=\frac{1}{2\pi}\times\frac{3\pi}{2}$ घंटा

$=\frac{3}{4}$ घंटा $=\frac{3}{4}\times 60$ मिनट $=45$ मिनट

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. परिक्रामी रेखा के वामावर्त दिशा में घूमने पर धनात्मक कोण और दक्षिणावर्त दिशा में घूमने पर ऋणात्मक कोण बनता है।
2. कोणों के माप की निम्नलिखित पद्धतियाँ हैं :
   (i) षष्टिक पद्धति (ii) शतिक पद्धति (iii) वृत्तीय पद्धति
3. षष्टिक पद्धति में कोण को मापने की इकाई 'डिग्री' है।
   1 समकोण $=90°$, $1° = 60'$ (मिनट) तथा $1' = 60''$ (सैकंड)
4. किसी वृत्त के केन्द्र पर बना वह कोण जो वृत्त की त्रिज्या के बराबर लम्बाई के चाप द्वारा अंतरित होता है उसे एक **'रेडियन'** कहते हैं। वृत्तीय पद्धति में कोण को मापने की इकाई **'रेडियन'** है।
5. वृत्त की सम्पूर्ण परिधि द्वारा उसके केन्द्र पर अंतरित कोण 2π रेडियन होता है।
6. षष्टिक व वृत्तीय पद्धति में संबंध $D = \left(\frac{180°}{\pi}\right)R$ होता है जहां D व R क्रमशः डिग्री व रेडियन में कोण हैं।

विविध प्रश्नमाला 13

वस्तुनिष्ठ प्रश्न [1 – 5]

1. $750°$ का कोण अनुरेखित करने वाली परिक्रामी रेखा स्थित है :
   (A) प्रथम चतुर्थांश में (B) द्वितीय चतुर्थांश में
   (C) तृतीय चतुर्थांश में (D) चतुर्थ चतुर्थांश में [ ]
2. $30°$ के कोण में रेडियन की संख्या है :
   (A) $\frac{\pi}{3}$ रेडियन (B) $\frac{\pi}{4}$ रेडियन
   (C) $\frac{\pi}{6}$ रेडियन (D) $\frac{3\pi}{4}$ रेडियन [ ]
3. $\frac{3\pi}{4}$ का मान षष्टिक पद्धति में है :
   (A) $75°$ (B) $135°$
   (C) $120°$ (D) $220°$ [ ]

4. किसी घड़ी के मिनट की सुई को $\frac{\pi}{6}$ रेडियन कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा ?

(A) 10 मिनट (B) 20 मिनट

(C) 15 मिनट (D) 5 मिनट [ ]

5. 100 मीटर त्रिज्या वाले वृत्तीय पथ पर 25π मीटर चलने पर केन्द्र पर अंतरित कोण का मान रेडियन में होगा :

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$ [ ]

6. परिक्रामी रेखा की स्थिति कौनसे चतुर्थांश में होगी, जबकि वह प्रारम्भिक स्थिति से निम्नलिखित कोण बनाती हो :

(i) $240°$ (ii) $425°$

(iii) $-580°$ (iv) $1280°$ (v) $-980°$

7. निम्नलिखित कोणों को रेडियन में परिवर्तित कीजिए।

(i) $45°$ (ii) $120°$

(iii) $135°$ (iv) $540°$

8. निम्नलिखित कोणों को षष्टिक पद्धति में व्यक्त कीजिए।

(i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\frac{2\pi}{5}$

(iii) $\frac{5}{6}\pi$ (iv) $\frac{\pi}{15}$

9. 5 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के केन्द्र पर 12 सेमी लम्बाई के चाप द्वारा कितने रेडियन का कोण बनेगा ?

10. किसी घड़ी के मिनट की सुई को $\frac{3\pi}{2}$ रेडियन कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा ?

11. किसी घड़ी के मिनट की सुई को $120°$ के कोण की रचना करने में कितना समय लगेगा ?

12. किसी वृत्त में 10 सेमी लम्बाई का चाप केन्द्र पर $60°$ का कोण अंतरित करता है तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

13. यदि ठीक दोपहर पश्चात् घड़ी के मिनट की सुई 30 समकोण परिक्रमण कर चुकी हो, तो घड़ी में समय बताइए।

14. किसी त्रिभुज के कोण $2:3:4$ के अनुपात में हैं। तीनों कोणों को रेडियन में ज्ञात कीजिए।

15. $\frac{3}{5}\pi$ रेडियन को षष्टिक पद्धति में व्यक्त कीजिए।

उत्तरमाला

विविध प्रश्नमाला 13

1. (A) **2.** (C) **3.** (B)

4. (D) **5.** (A)

6. (i) तृतीय (ii) प्रथम (iii) द्वितीय (iv) तृतीय (v) द्वितीय

7. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{2\pi}{3}$ (iii) $\frac{3\pi}{4}$ (iv) 3π

8. (i) 90° (ii) 72° (iii) 150° (iv) 12°

9. $\frac{12}{5}$ रेडियन

10. 45 मिनिट

11. 20 मिनिट

12. $\frac{30}{\pi}$ सेमी

13. सांय 7 बजकर 30 मिनिट

14. $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$

15. 108°

❑

अध्याय

14

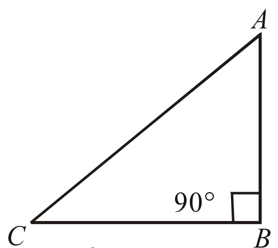
न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

(Trigonometric Ratios of Acute Angles)

BPB1H4

14.01 समकोण त्रिभुज (Right Angled Triangle):

पूर्ववर्ती अध्यायों में हमनें पढ़ा है कि ऐसा त्रिभुज जिसमें एक कोण 90° का हो, वह समकोण त्रिभुज कहलाता है। चित्र 14.01 एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B$ एक समकोण है। समकोण के सम्मुख भुजा को कर्ण कहते हैं, अतः समकोण ΔABC में AC कर्ण है। किसी समकोण त्रिभुज के अन्य दो कोणों के संदर्भ में किसी कोण को बनाने वाली कर्ण के अतिरिक्त दूसरी भुजा आधार (base) अथवा आसन्न भुजा तथा इस कोण की सम्मुख भुजा लम्ब कहलाती है। चित्र 14.01 में $\angle C$ के लिए भुजा CB आधार तथा भुजा AB को लम्ब कहेंगे। इसी प्रकार $\angle A$ के लिए भुजा AB को आधार तथा भुजा BC को लम्ब कहेंगे। समकोण त्रिभुज में समकोण के अतिरिक्त अन्य कोण न्यून कोण होते हैं। समकोण त्रिभुज की भुजाओं में परस्पर संबंध के लिए **बौधायन सूत्र**



चित्र 14.01

"किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण पर बना वर्ग का क्षेत्रफल त्रिभुज की शेष दो भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है"

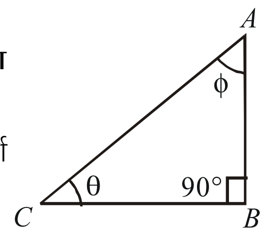
उपयोग में लिया जाता है। उपर्युक्त प्रमेय को संक्षेप में चित्र 14.01 के संदर्भ में इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

स्पष्ट है कि यदि AB, BC तथा AC में से कोई दो भुजाएँ दी गई हों तो तीसरी भुजा ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 1: किसी समकोण त्रिभुज ABC में कोण θ तथा ϕ के लिए भुजाओं के नाम बताईये।

हल : किसी त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है। अतः भुजा AC कर्ण है। अब कोण θ के लिए भुजा BC आधार तथा भुजा AB लम्ब है। इसी प्रकार कोण ϕ के लिए भुजा AB आधार तथा भुजा BC लम्ब है।



चित्र 14.02

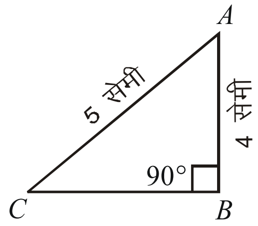
उदाहरण 2: किसी त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है। यदि भुजा $AB = 4$ सेमी तथा भुजा $AC = 5$ सेमी हो, तो भुजा BC ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार ΔABC का कच्चा चित्र बनाइये, जिसमें

$\angle B = 90°$

$AC = 5$ सेमी

$AB = 4$ सेमी



चित्र 14.03

अब बौधायन सूत्र से

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

या $\quad (5)^2 = (4)^2 + BC^2$

या $\quad BC^2 = 25 - 16$

या $\quad BC^2 = 9$

अतः $\quad BC = 3$ सेमी

14.02 न्यून कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

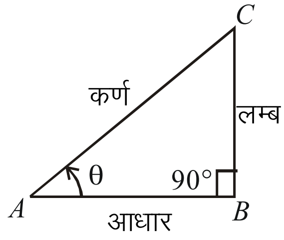
(Trigonometric Ratios of an Acute Angle):

किसी समकोण त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं के अनुपात को त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं।

माना ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle ABC$ समकोण है, तथा $\angle CAB = \theta$ हो, तो

(i) $\dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \text{sine}\,\theta$ या ज्या θ ।

sine θ को संक्षेप में $\sin\theta$ या ज्या θ लिखा जाता है।



चित्र 14.04

(ii) $\dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC} = \text{cosine}\,\theta$ या कोटिज्या θ ।

cosine θ को संक्षेप में $\cos\theta$ या कोज्या θ लिखा जाता है।

(iii) $\dfrac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \dfrac{BC}{AB} = \text{tangent}\,\theta$ या स्पर्शज्या θ ।

tangent θ को संक्षेप में $\tan\theta$ या स्प θ लिखा जाता है।

(iv) $\dfrac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{AB}{BC} = \text{cotangent}\,\theta$ या कोटिस्पर्शज्या θ ।

cotangent θ को संक्षेप में $\cot\theta$ या कोस्प θ लिखा जाता है।

(v) $\dfrac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \dfrac{AC}{AB} = \text{secant}\,\theta$ या व्युत्क्रम कोटिज्या θ ।

secant θ को संक्षेप में $\sec\theta$ या व्युकोज्या θ लिखा जाता है।

(vi) $\dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \dfrac{AC}{BC} = \text{cosecant}\,\theta$ या व्युत्क्रमज्या θ ।

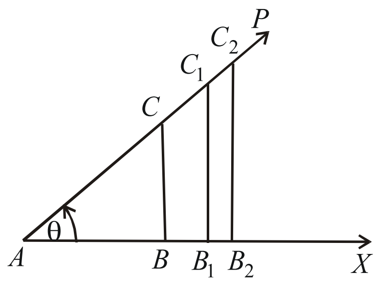
cosecant θ को संक्षेप में $\text{cosec}\,\theta$ या व्युज्या θ लिखा जाता है।

टिप्पणी : (i) मान लीजिए एक परिक्रामी रेखा AX अपनी आदि स्थिति AX से शीर्ष A को स्थिर रखते हुए वामावर्त दिशा में परिक्रमा करती हुई एक धनात्मक न्यून कोण $\angle XAP = \theta$ बनाती है। बिन्दु C, C_1, C_2 से AX पर लम्ब क्रमशः CB, C_1B_1 तथा C_2B_2 खींचिए।

हम देखते हैं कि त्रिभुज CAB, C_1AB_1, C_2AB_2 इत्यादि समरूप त्रिभुज हैं। इसलिए

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \cdots$$

और $$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \cdots$$



चित्र 14.05

इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में $\sin\theta$ या $\cos\theta$ का मान समान रहता है अथात् इनके मान परिक्रामी रेखा पर स्थित बिन्दु P की स्थिति पर निर्भर नहीं करता है। इसी प्रकार θ के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात भी परिक्रामी रेखा पर बिन्दु P की स्थिति पर निर्भर नहीं करते हैं।

अतः किसी त्रिकोणमितीय अनुपात का मान न्यून कोण θ पर निर्भर करता है न कि समकोण त्रिभुज की आकृति पर। क्योंकि प्रत्येक कोण θ के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात का मान अद्वितीय होता है, इस कारण से त्रिकोणमितीय अनुपात को त्रिकोणमितीय कलन भी कहते हैं।

(ii) $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \ldots$ इत्यादि का अर्थ कदापि नहीं है कि sin या cos या tan या $\cdots$ को θ से गुणा किया गया है

अर्थात् $$\sin\theta \neq \sin\times\theta$$
$$\cos\theta \neq \cos\times\theta$$
$$\tan\theta \neq \tan\times\theta$$

(iii) किसी भी धनात्मक न्यून कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात सदैव धनात्मक होते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

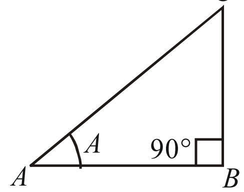
उदाहरण 3: त्रिभुज ABC में कोण B समकोण है, कोण A के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिखिए।

हल : चित्र 14.06 के अनुसार भुजा AC कर्ण है तथा कोण A की सम्मुख भुजा BC है। अतः ΔABC में भुजा AB आधार, भुजा BC लम्ब तथा भुजा AC कर्ण है।

$\therefore$ $$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{BC}{AB}$$



चित्र 14.06

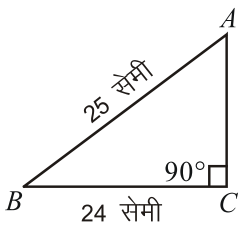
$$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{AC}{BC}$$

उदाहरण 4: त्रिभुज ABC में कोण C समकोण है तथा $AB = 25$ सेमी तथा $BC = 24$ सेमी है, तो कोण A के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ ΔABC एक समकोण त्रिभुज है



चित्र 14.07

$$\therefore \quad AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{(25)^2 - (24)^2}$$

$$= \sqrt{49}$$

$$= 7 \text{ सेमी}$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{24}{25}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{25}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{7}$$

$$\cot A = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{24}$$

$$\sec A = \frac{AB}{AC} = \frac{25}{7}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AB}{BC} = \frac{25}{24}$$

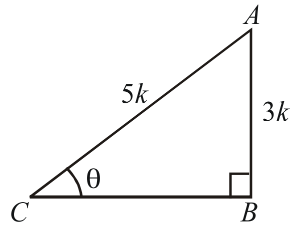
उदाहरण 5: यदि $\sin\theta = \frac{3}{5}$ हो, तो θ के शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC की रचना करते हैं जिसमें $\sin\theta = \frac{3}{5}$ (चित्र 14.08) अर्थात् लम्ब AB और कर्ण AC, $3:5$ के अनुपात में हैं। माना $AB = 3k$ तथा $AC = 5k$, जहाँ $k > 0$ जो कि अनुपातिक अचर राशि है।

अतः बौधायन सूत्र से

$$BC^2 = AC^2 - AB^2 = (5k)^2 - (3k)^2 = 16k^2$$

$\therefore$ $BC = \pm 4k$



चित्र 14.08

क्योंकि कोण θ न्यून कोण है, अतः BC धनात्मक होगी

अर्थात् $BC = 4k$

$\therefore$ $$\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}\cdot$$

उदाहरण 6: यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$ हो, तो $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

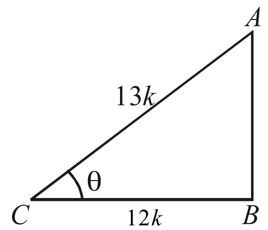
हल : त्रिभुज ABC की रचना करते है जिसमें $\sec\theta = \frac{13}{12}$ (चित्र 14.09)।

अर्थात् कर्ण AC और आधार $BC, 13:12$ अनुपात में है।

माना $AC = 13k, BC = 12k,$

जहाँ $k > 0,$ जो कि अनुपातिक अचर राशि हैं।

अतः बौधायन सूत्र से



चित्र 14.09

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (13k)^2 - (12k)^2 = 25k^2$$

$\therefore$ $AB = \pm 5k$

क्योंकि कोण θ न्यून कोण है, अतः AB धनात्मक होगी।

$\therefore$ $AB = 5k$

$\therefore$ $$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

प्रश्नानुसार $$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \frac{1-\frac{5}{12}}{1+\frac{5}{12}} = \frac{7}{17}$$

उदाहरण 7: यदि $\operatorname{cosec} A = 2$, तो $\cot A + \dfrac{\sin A}{1+\cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\because \operatorname{cosec} A = \dfrac{2}{1}$

$\therefore$ त्रिभुज ABC की रचना करते है जिसमें कर्ण AC और लम्ब BC, $2:1$ के अनुपात में हैं (चित्र 14.10)

माना $AC = 2k,\ BC = k$

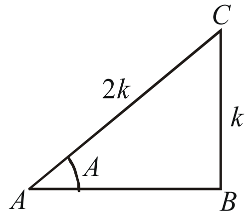
जहां $k > 0$, जो कि अनुपातिक अचर राशि हैं।

अतः बौधायन सूत्र से

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

या $$AB^2 = (2k)^2 - k^2 = 3k^2$$

या $$AB = \pm\sqrt{3}k$$



चित्र 14.10

क्योंकि कोण A न्यून कोण है, अतः AB धनात्मक होगी।

$\therefore$ $$AB = \sqrt{3}k$$

$\therefore$ $$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}k}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{3}k}{k} = \sqrt{3}$$

प्रश्नानुसार $$\cot A + \frac{\sin A}{1+\cos A} = \sqrt{3} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{3} + \frac{2-\sqrt{3}}{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2$$

प्रश्नमाला 14.1

1. यदि ΔABC में $\angle A = 90°, a = 25$ सेमी, $b = 7$ सेमी हो, तो $\angle B$ और $\angle C$ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिखिए।

2. यदि ΔABC में $\angle B = 90°, a = 12$ सेमी, $b = 13$ सेमी हो, तो कोण $\angle A$ और $\angle C$ के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपात लिखिए।

3. यदि $\tan A = \sqrt{2} - 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. यदि $\sin A = \frac{1}{3}$ तो $\cos A \operatorname{cosec} A + \tan A \sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\cos\theta = \frac{8}{17}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\cos A = \frac{5}{13}$ हो, तो $\frac{\operatorname{cosec} A}{\cos A + \operatorname{cosec} A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

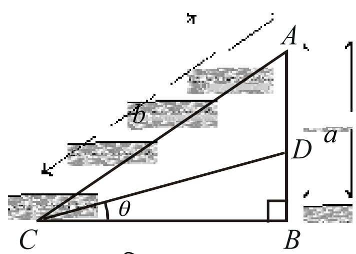
7. यदि $5\tan\theta = 4$ हो, तो $\frac{5\sin\theta - 3\cos\theta}{\sin\theta + 2\cos\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. त्रिभुज ABC में $\angle C = 90°$ है और यदि $\cot A = \sqrt{3}$ तथा $\cot B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ है तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 1$.

9. यदि $16\cot A = 12$ हो, तो $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. चित्र 14.13 में $AD = DB$ तथा $\angle B = 90°$ है तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

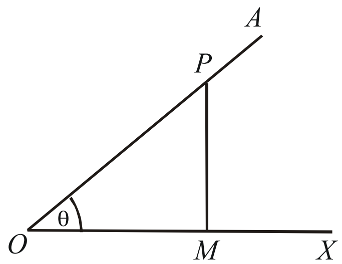
    (i) $\sin\theta$ (ii) $\cos\theta$ (iii) $\tan\theta$



चित्र 14.11

14.03 त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंध :
(Relation between Trigonometric Ratios):

किसी समकोण त्रिभुज OMP में कोण θ के लिए भुजा PM लम्ब, भुजा OM आधार तथा भुजा OP कर्ण है।



चित्र 14.12

(i) $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1$

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} \qquad \cdots (1)$$

तथा $$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} \qquad \cdots (2)$$

(1) और (2) का गुणा करने पर

$$\sin\theta \cdot \operatorname{cosec}\theta = \frac{PM}{OP} \times \frac{OP}{PM} = 1$$

अर्थात् $\sin\theta \operatorname{cosec}\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$

या $$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

अतः $\sin\theta$ और $\operatorname{cosec}\theta$ परस्पर व्युत्क्रम हैं।

(ii) $\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$

चित्र 14.12 से

$$\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{OM}{OP} \qquad \cdots (3)$$

और $$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{OP}{OM} \qquad \cdots (4)$$

समीकरण (3) और (4) का परस्पर गुणा करने पर

$$\cos\theta \cdot \sec\theta = \frac{OM}{OP} \cdot \frac{OP}{OM} = 1$$

अर्थात् $\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \quad \text{या} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

अतः $\cos\theta$ और $\sec\theta$ परस्पर व्युत्क्रम हैं।

(iii) $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$

चित्र 14.14 से $$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{PM}{OM} \qquad \cdots (5)$$

और $\quad \cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{OM}{PM} \qquad \cdots (6)$

समीकरण (5) और (6) को परस्पर गुणा करने पर

$$\tan\theta \cdot \cot\theta = \frac{PM}{OM} \times \frac{OM}{PM} = 1$$

अर्थात् $\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \quad \text{या} \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

अतः $\tan\theta$ और $\cot\theta$ परस्पर व्युत्क्रम हैं।

(iv) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

समीकरण (1) और (3) से

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}} = \frac{PM}{OP} \times \frac{OP}{OM} = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \tan\theta$$

अर्थात् $\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(v) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

समीकरण (1) और (3) से

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{OM}{OP}}{\frac{PM}{OP}} = \frac{OM}{OP} \times \frac{OP}{PM} = \frac{OM}{PM} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \cot\theta$$

अर्थात् $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(vi) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

समीकरण (1) और (3) से

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} \text{ एवं } \cos\theta = \frac{OM}{OP}$$

वर्ग कर जोड़ने पर

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$$

$$=\frac{PM^2+OM^2}{OP^2} = \frac{OP^2}{OP^2} = 1$$ [बौधायन सूत्र से (चित्र 14.14)]

(vii) $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

चित्र 14.14 से

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM}$$

$\therefore$ $$1+\tan^2\theta = 1+\frac{PM^2}{OM^2} = \frac{OM^2+PM^2}{OM^2} = \frac{OP^2}{OM^2}$$ [बौधायन सूत्र से]

[$\because \sec\theta = \frac{OP}{OM}$, चित्र (14.14) से]

या $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

वैकल्पिक विधि :

हम जानते हैं कि

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

दोनों तरफ $\cos^2\theta$ से भाग देने पर

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\Rightarrow$ $$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \left(\because \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta, \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta\right)$$

(viii) $1+\cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

चित्र 14.14 से $\cot\theta = \frac{OM}{PM}$

$\therefore$ $$1+\cot^2\theta = 1+\left(\frac{OM}{PM}\right)^2 = \frac{PM^2+OM^2}{PM^2} = \frac{OP^2}{PM^2}$$ (बौधायन सूत्र से)

$$= \text{cosec}^2\theta \quad \left(\because \text{cosec}\,\theta = \frac{OP}{PM} \text{ चित्र (14.14) से}\right)$$

वैकल्पिक विधि :

हम जानते हैं कि $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

दोनों तरफ $\sin^2\theta$ से भाग देने पर

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta \quad \left(\because \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta, \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta\right)$$

टिप्पणी : $(\sin\theta)^2$ को सदैव $\sin^2\theta$ लिखा जाता है और इसे साइन स्कवायर थीटा पढ़ा जाता है।

अर्थात् $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta \neq \sin\theta^2$

अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातों को भी इसी प्रकार से समझना चाहिए।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 8: यदि $\cos\theta = \frac{5}{13}$ हो, तो $\sin\theta, \tan\theta$ के मान त्रिकोण मितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से ज्ञात कीजिए, जबकि θ एक न्यून कोण है।

हल : हम जानते हैं कि

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$\cos\theta = \frac{5}{13}$ रखने पर

$$\sin^2\theta + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta = 1 - \frac{25}{169}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \pm\frac{12}{13}$$

$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{12}{13}$ (क्योंकि θ न्यून कोण है)

अब $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5}$

उदाहरण 9: यदि $\tan\theta = \sqrt{3}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपातों को त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से ज्ञात कीजिए जबकि θ एक न्यून कोण है।

हल : हम जानते हैं कि

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

या $\sec^2\theta = 1 + \left(\sqrt{3}\right)^2$

$$= 1 + 3 = 4$$

$\Rightarrow \quad \sec\theta = \pm 2$

या $\quad \sec\theta = 2$ (क्योंकि θ न्यून कोण है)

$\because \quad \cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \dfrac{1}{2}$

अतः $\quad \sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta$

$\Rightarrow \quad \sin\theta = \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3}/2\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{3}},$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot$

उदाहरण 10: यदि $\operatorname{cosec} A = \sqrt{10}$ हो, तो $\cot A, \sin A, \cos A$ के मान त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से ज्ञात कीजिए। θ न्यून कोण है।

हल : हम जानते हैं कि

$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

$\Rightarrow \quad \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A - 1$

$\Rightarrow \quad \cot^2 A = \left(\sqrt{10}\right)^2 - 1 = 10 - 1 = 9$

$\Rightarrow \quad \cot A = 3$ (क्योंकि θ न्यून कोण है)

अब $\quad \sin A = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

और $\quad \cos A = \cot A \cdot \sin A$

$= 3 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

उदाहरण 11: यदि $\sec\theta = \dfrac{17}{8}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपातों को त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से ज्ञात कीजिए। θ न्यून कोण है।

हल : हम जानते है कि

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

या $\quad \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

या $\quad \tan^2\theta = \left(\dfrac{17}{8}\right)^2 - 1$

$= \dfrac{289 - 64}{64} = \dfrac{225}{64}$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \dfrac{15}{8}$ (क्योंकि θ न्यून कोण है)

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{(15/8)} = \dfrac{8}{15}$

और $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \dfrac{1}{17/8} = \dfrac{8}{17}\cdot$

अब $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

$= \dfrac{15}{8}\cdot\dfrac{8}{17}$

$= \dfrac{15}{17}$

और $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{15}{17}\right)} = \dfrac{17}{15}.$

उदाहरण 12: यदि $\sin\theta = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ हो, तो $\cos\theta$ और $\tan\theta$ के मान त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से ज्ञात कीजिए। θ न्यून कोण है।

हल : $\sin\theta = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

अब $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \quad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

या $\cos^2\theta = 1 - \dfrac{\left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$

$= \dfrac{\left(a^2+b^2\right)^2 - \left(a^2-b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$

$= \dfrac{4a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}$

$\Rightarrow \quad \cos\theta = \pm\dfrac{2ab}{\left(a^2+b^2\right)}$

या $\cos\theta = \dfrac{2ab}{\left(a^2+b^2\right)}$ ($\because$ θ न्यून कोण है)

अब $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)}{\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)} = \dfrac{a^2-b^2}{2ab}$

प्रश्नमाला 14.2

त्रिकोणमितीय अनुपातों में संबंधों द्वारा हल कीजिए : [प्रश्न 1 से 10 तक]

1. यदि $\operatorname{cosec} A = \dfrac{5}{4}$ हो, तो $\cot A, \sin A, \cos A$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. यदि $\tan A = \dfrac{20}{21}$ हो, तो $\cos A$ तथा $\sin A$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\sin A = \dfrac{3}{5}$ हो, तो $\cos A$ और $\tan A$ के मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\cos B = \dfrac{1}{3}$ हो, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

5. यदि $\sin A = \dfrac{5}{13}$ हो, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $\tan A = \sqrt{2} - 1$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos A = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

7. यदि $\tan A = 2$ हो, तो $\sec A \sin A + \tan^2 A - \operatorname{cosec} A$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ हो, तो $\dfrac{4\tan\theta - 5\cos\theta}{\sec\theta + 4\cot\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. यदि $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ हो, तो $\sin\theta$ तथा $\cot\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

10. यदि $\sec\theta = 2$ तो $\tan\theta, \cos\theta$ तथा $\sin\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

14.04 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (Trigonometric Identities) :

ऐसे त्रिकोणमितीय संबंध जो उनमें प्रयुक्त कोण के उन सभी मानों के लिए सदैव सत्य हो, जिन मानों पर प्रयुक्त त्रिकोणमितीय अनुपात परिभाषित हो, त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ कहलाती हैं।

अनुच्छेद 11.02 तथा 11.03 में परिभाषित सभी संबंध θ के सभी मानों के लिए सत्य है। अतः इन्हें मूलभूत सर्वसमिकाएँ कहते हैं।

त्रिकोणमिती में सभी संबंध सर्वसमिकाएँ नहीं होती हैं। उदाहणार्थ $\sin\theta = \cos\theta$ केवल एक समीकरण है क्योंकि यह θ के समस्त मानों के लिए सत्य नहीं है।

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करते समय निम्न बिन्दुओं को ध्यान में रखना चाहिए :

(i) सर्वसमिका में जटिल पक्ष की तरफ से प्रारम्भ करते हैं तथा मूलभूत सर्वसमिकाओं का प्रयोग करते हुए दूसरा पक्ष ज्ञात करते हैं।

(ii) यदि सर्वसमिका में कई त्रिकोणमितीय अनुपात विद्यमान हों, तो सभी अनुपातों को sine अथवा cosine को व्यक्त करना सामान्यतया सुविधाजनक होता है।

(iii) करणी चिह्न (Redical sign) यदि कोई हो, तो यथासम्भव हटाना चाहिए।

(iv) कुछ समस्याओं में परिमेयकरण का उपयोग भी किया जा सकता है।

(v) यदि सर्वसमिका के एक पक्ष को सुगमता से दूसरे पक्ष में रूपान्तरित नहीं किया जा सकता हो, तो दोनों पक्षों को यथासम्भव सरल करके एक ही राशि अथवा पद के समानक सम (Identically equal) सिद्ध कर देना चाहिए।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 13: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$(\sec\theta + \cos\theta)(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta + \sin^2\theta.$$

हल : वाम पक्ष $= \sec^2\theta - \cos^2\theta$

$$= 1 + \tan^2\theta - (1 - \sin^2\theta) \quad \left[\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \text{ तथा } \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta\right]$$

$= \tan^2\theta + \sin^2\theta$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 14: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$(\mathrm{cosec}\,\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1.$$

हल : वाम पक्ष $= (\mathrm{cosec}\,\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

(सभी को sine तथा cosine में बदलने पर)

$$= \left(\frac{1 - \sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \quad \text{[मूलभूत सर्वसमिकाओं के उपयोग से]}$$

$= 1$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 15: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\sqrt{\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta \cdot$$

हल : वाम पक्ष $= \sqrt{\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta}$

$$= \sqrt{(1 + \tan^2\theta) + (1 + \cot^2\theta)} \quad \text{[मूलभूत सर्वसमिकाओं के उपयोग से]}$$

$$= \sqrt{\tan^2\theta + 2 + \cot^2\theta}$$

$$= \sqrt{\tan^2\theta + 2\tan\theta\cot\theta + \cot^2} \quad [\because \tan\theta\cot\theta = 1]$$

$$= \sqrt{(\tan\theta + \cot\theta)^2}$$

$$= \tan\theta + \cot\theta$$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 16: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\sqrt{\frac{\mathbf{1+\cos\theta}}{\mathbf{1-\cos\theta}}} = \mathbf{cosec\,\theta + \cot\theta} \cdot$$

हल : वाम पक्ष में करणी चिह्न को हटाने के लिए अंश तथा हर को $\sqrt{1+\cos\theta}$ से गुणा करने पर

वाम पक्ष $= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \times \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \qquad [\because 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta]$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 17: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\mathbf{\sec\theta - \tan\theta}}{\mathbf{\sec\theta + \tan\theta}} = \mathbf{1 - 2\sec\theta\tan\theta + 2\tan^2\theta} \cdot$$

हल : वाम पक्ष $= \dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \qquad \cdots (1)$$

दक्षिण पक्ष $= 1 - 2 \cdot \dfrac{1}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + 2 \cdot \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$$= \frac{\cos^2\theta - 2\sin\theta + 2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - 2\sin\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{(1-\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

समीकरण (1) और (2) से

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

उदाहरण 18: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\mathbf{\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} - \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta}}.$$

हल : दोनों पक्षों का पुनः निर्धारण से

$$\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} + \frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta$$

अब वाम पक्ष $= \dfrac{\sec\theta + \tan\theta + \sec\theta - \tan\theta}{(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta)}$

$$= \frac{2\sec\theta}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$$

$$= \frac{2\sec\theta}{1 + \tan^2\theta - \tan^2\theta}$$

$$= 2\sec\theta$$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 19: निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

$$\sec^6\theta - \tan^6\theta = 1 + 3\tan^2\theta + 3\tan^4\theta \cdot$$

हल : हम जानते हैं कि

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

अब वाम पक्ष $= (\sec^2\theta)^3 - (\tan^2\theta)^3$

$$= (\sec^2\theta - \tan^2\theta)(\sec^4\theta + \sec^2\theta\tan^2\theta + \tan^4\theta)$$

$$= (1 + \tan^2\theta - \tan^2\theta)\{\sec^2\theta(\sec^2\theta + \tan^2\theta) + \tan^4\theta\}$$

$$= 1\cdot\{(1+\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta + \tan^2\theta) + \tan^4\theta\}$$

$$= (1+\tan^2\theta)(1 + 2\tan^2\theta) + \tan^4\theta$$

$$= 1 + 3\tan^2\theta + 3\tan^4\theta$$

= दक्षिण पक्ष

प्रश्नमाला 14.3

निम्न सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिए :

1. $\cos\theta\cdot\tan\theta = \sin\theta$
2. $(1-\sin^2\theta)\tan^2\theta = \sin^2\theta$
3. $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$
4. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$
5. $\operatorname{cosec}^6\theta - \cot^6\theta = 1 + 3\operatorname{cosec}^2\theta\cot^2\theta$
6. $\sin^2\theta\cos\theta + \tan\theta\sin\theta + \cos^3\theta = \sec\theta$
7. $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \sin\theta + \cos\theta$
8. $\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}-1} + \dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{cosec}\theta + 1} = 2\sec^2\theta$
9. $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

10. $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$

11. $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

12. $\sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}=\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta$

13. $\dfrac{\sqrt{\left(\operatorname{cosec}^2\theta-1\right)}}{\operatorname{cosec}\theta}=\cos\theta$

14. $\left(1+\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta\right)\left(1+\tan\theta+\sec\theta\right)=2$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. किसी समकोण त्रिभुज में

   (i) $\sin\theta=\dfrac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ (ii) $\cos\theta=\dfrac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ (iii) $\tan\theta=\dfrac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

   (iv) $\cos\theta=\dfrac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$ (v) $\sec\theta=\dfrac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$ (vi) $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

2. (i) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (ii) $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

   (iii) $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$ (iv) $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$

3. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

4. $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

5. $1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

विविध प्रश्नमाला 14

1. यदि $\tan\theta = \sqrt{3}$ है तो $\sin\theta$ का मान है –

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (D) 1 [ ]

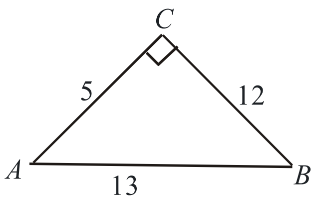
2. यदि $\sin\theta = \frac{5}{13}$ है तो $\tan\theta$ का मान है –

(A) $\frac{5}{12}$ (B) $\frac{12}{13}$ (C) $\frac{13}{12}$ (D) $\frac{12}{5}$ [ ]

3. यदि $\sqrt{3}\cos A = \sin A$ हो, तो $\cot A$ का मान है –

(A) $\sqrt{3}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) 2 [ ]

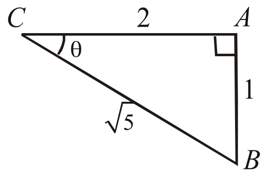
4. यदि



तो $\cot A$ का मान है –

(A) $\frac{12}{13}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{5}{13}$ (D) $\frac{13}{5}$ [ ]

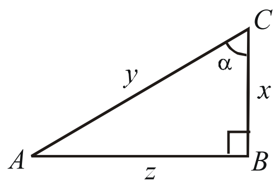
5. यदि



तो $\tan\theta$ का मान है –

(A) 2 (B) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{1}{2}$ [ ]

6. यदि



तो $\operatorname{cosec}\alpha$ का मान है –

(A) $\frac{y}{x}$ (B) $\frac{y}{z}$ (C) $\frac{x}{z}$ (D) $\frac{x}{y}$ [ ]

7. $\sin^2 30° + \cos^2 30°$ का मान है –

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 1 [ ]

8. $\text{cosec}^2 55° - \cot^2 55°$ का मान है –

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0 [ ]

9. यदि $\cot\phi = \frac{20}{21}$ हो, तो $\text{cosec}\,\phi$ का मान है –

(A) $\frac{21}{20}$ (B) $\frac{20}{29}$ (C) $\frac{29}{21}$ (D) $\frac{21}{29}$ [ ]

10. यदि ΔABC में $\angle B = 90°$, $c = 12$ सेमी तथा $a = 9$ सेमी हो, तो $\cos C$ का मान है –

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{4}{5}$ [ ]

11. $(\sec 40° + \tan 40°)(\sec 40° - \tan 40°)$ बराबर है :

(A) -1 (B) 1 (C) $\cos 40°$ (D) $\sin 40°$ [ ]

12. $\frac{1}{\sin\theta - \tan\theta}$ बराबर है :

(A) $\frac{\cot\theta}{\cos\theta - 1}$ (B) $\frac{\cot\theta}{\cot\theta - \text{cosec}\,\theta}$

(C) $\text{cosec}\,\theta - \cot\theta$ (D) $\cot\theta$ [ ]

13. $\frac{\sec A - 1}{\sec A + 1}$ बराबर है :

(A) $\frac{1+\cos A}{1-\cos A}$ (B) $\frac{\cos A - 1}{1+\cos A}$ (C) $\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$ (D) $\frac{\cos A - 1}{1-\cos A}$ [ ]

14. $\cot^2\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}$ बराबर है :

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 [ ]

15. यदि $\text{cosec}\,\theta = \frac{41}{40}$ हो, तो $\tan\theta$ और $\cos\theta$ के मान ज्ञात कीजिए।

....

16. यदि ΔABC में $\angle B$ समकोण है तथा $AB = 12$ सेमी और $BC = 5$ सेमी हो, तो $\sin A, \tan A, \sin C$ तथा $\cot C$ के मान ज्ञात कीजिए।

....

17. यदि $\cos\theta = \frac{3}{5}$ हो, तो $\frac{\sin\theta - \cot\theta}{2\tan\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

....

18. यदि $\cos\theta = \frac{21}{29}$ हो, तो $\frac{\sec\theta}{\tan\theta - \sin\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

....

19. यदि $\cot A = \sqrt{3}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin A \cos B + \cos A \sin B = 1.$

....

त्रिकोणमितीय अनुपातों में परस्पर संबंधों की सहायता से हल कीजिए :
[प्रश्न 16-20]

20. यदि $\tan\theta = \frac{4}{3}$ हो, तो $\frac{3\sin\theta + 2\cos\theta}{3\sin\theta - 2\cos\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

21. यदि $\cot\theta = \frac{b}{a}$ हो, तो $\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

22. यदि $\operatorname{cosec} A = 2$ हो, तो $\cot A + \frac{\sin A}{1 + \cos A}$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. यदि $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1 - \cos^2\theta}{2 - \sin^2\theta} = \frac{3}{5}\cdot$

24. यदि $\sin A = \frac{1}{3}$ हो, तो $\cos A \operatorname{cosec} A + \tan A \sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

सिद्ध कीजिए : [प्रश्न $25-27$]

25. $\sqrt{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A} = \tan A + \cot A$

26. $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

27. $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \tan A + \sec A$

निम्न सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिए : [प्रश्न $28-29$]

28. $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \tan\alpha \tan\beta$

29. $\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$

सिद्ध कीजिए : [प्रश्न $30-35$]

30. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

31. $\sec^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta = \tan^2\theta - \cot^2\theta$

32. $\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} + \frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B} = 0$

33. $(\sin A+\operatorname{cosec} A)^2+(\cos A+\sec A)^2=\tan^2 A+\cot^2 A+7$

34. $\dfrac{\tan A+\sec A-1}{\tan A-\sec A+1}=\dfrac{1+\sin A}{\cos A}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 14.1

1. $\sin B=\dfrac{7}{25}$, $\cos B=\dfrac{24}{25}$, $\tan B=\dfrac{7}{24}$

$\operatorname{cosec} B=\dfrac{25}{7}$, $\sec B=\dfrac{25}{24}$, $\cot B=\dfrac{24}{7}$

$\sin C=\dfrac{24}{25}$, $\cos C=\dfrac{7}{25}$, $\tan C=\dfrac{24}{7}$

$\operatorname{cosec} C=\dfrac{25}{24}$, $\sec C=\dfrac{25}{7}$, $\cot C=\dfrac{7}{24}$

2. $\sin A=\dfrac{12}{13}$, $\cos A=\dfrac{5}{13}$, $\tan A=\dfrac{12}{5}$

$\operatorname{cosec} A=\dfrac{13}{12}$, $\sec A=\dfrac{13}{5}$, $\cot A=\dfrac{5}{12}$

$\sin C=\dfrac{5}{13}$, $\cos C=\dfrac{12}{13}$, $\tan C=\dfrac{5}{12}$

$\operatorname{cosec} C=\dfrac{13}{5}$, $\sec C=\dfrac{13}{12}$, $\cot C=\dfrac{12}{5}$

4. $2\sqrt{2}+\dfrac{3}{8}$

5. $\sin\theta=\dfrac{15}{17}$, $\tan\theta=\dfrac{15}{8}$, $\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{17}{15}$,

$\sec\theta=\dfrac{17}{8}$, $\cot\theta=\dfrac{8}{15}$

6. $\dfrac{169}{229}$

7. $\dfrac{5}{14}$

9. 7

10. (i) $\dfrac{a}{\sqrt{4b^2-3a^2}}$ (ii) $\dfrac{2\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{4b^2-3a^2}}$ (iii) $\dfrac{a}{2\sqrt{b^2-a^2}}$

प्रश्नमाला 14.2

1. $\cot A = \frac{3}{4}, \ \sin A = \frac{4}{5}, \cos A = \frac{3}{5}$

2. $\cos A = \frac{21}{29}, \sin A = \frac{20}{29}$

3. $\cos A = \frac{4}{5}, \tan A = \frac{3}{4}$

4. $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \ \tan B = 2\sqrt{2}, \ \cot B = \frac{1}{2\sqrt{2}},$

   $\sec B = 3, \ \operatorname{cosec} B = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

5. $\cos A = \frac{12}{13}, \ \tan A = \frac{5}{12}$

7. $\frac{12-\sqrt{5}}{2}$

8. $\frac{1}{2}$

9. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cot\theta = 1$

10. $\cos\theta = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan\theta = \sqrt{3}$

विविध प्रश्नमाला

1. (B) 2. (A) 3. (C) 4. (B) 5. (D) 6. (B)
7. (D) 8. (A) 9. (C) 10. (A) 11. (B) 12. (A)
13. (C) 14. (D)

15. $\tan\theta = \frac{40}{9}, \ \cos\theta = \frac{9}{41}$ 16. $\frac{5}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}$ 17. $\frac{3}{160}$

18. $\frac{841}{160}$ 20. 3 21. $\frac{b+a}{b-a}$ 22. 2 24. $\frac{16\sqrt{2}+3}{8}$

❑

अध्याय

15

BPTSQE

सांख्यिकी
(Statistics)

C428IH

15.01 सांख्यिकी का परिचय

प्राचीन काल से भारतवर्ष में गणित की शाखा सांख्यिकी का उपयोग किया जा रहा है जो निम्न उदाहरणों द्वारा प्रकट होता है:–

– महाभारत काल में दमयन्ती के स्वयंवर पर राजा नल के साथ जाते हुए राजा ऋतुपर्ण ने एक पेड़ के न्यादर्श (Sample) के आधार पर पूरे पेड़ पर लगे फल एवं पत्तों की सही संख्या बता देना।

– चन्द्रगुप्त मौर्य के शासन काल (324–300 ई.पू.) में जन्म–मृत्यु का पंजीकरण एवं इसके आधार पर शासन की व्यवस्था करने का वर्णन कौटिल्य के अर्थशास्त्र में मिलता है।

इसी प्रकार शासन व्यवस्था चलाने में, युद्ध काल में सांख्यिकी के उपयोग के अनेक उदाहरण मिलते हैं। दैनिक जीवन में भी जब हम समाचार पत्रों, इलेक्ट्रोनिक मीडिया में कई चैनलों, पत्रिकाओं और अन्य संचार साधनों का अवलोकन करते हैं तो नगरों के तापमान, स्थान–स्थान पर वर्षा की स्थिति, विभिन्न कम्पनियों के शेयरों की स्थिति आदि की तथ्यात्मक एवं तुलनात्मक जानकारी आंकड़ों के द्वारा मिलती है।

हम जीवन भर किसी न किसी रूप से इन आंकड़ों का उपयोग करते रहते हैं। अतः हमारे लिए यह बहुत जरूरी हो जाता है कि इन आंकडों से हम अपनी इच्छानुसार अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करना जान जाएँ। अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करने से संबंधित अध्ययन गणित की इस शाखा में किया जाता है जिसे सांख्यिकी कहा जाता है।

अतः इस अध्याय में हम आँकड़ों का संग्रह, प्रस्तुतीकरण, चित्रों द्वारा निरूपण, असमूहित आँकड़ों का माध्य, माध्यक एवं बहुलक का विस्तार से अध्ययन करने का प्रयास करेंगे।

आंकड़ों का संग्रह– आँकड़ों को एकत्रित करने के स्रोतों के आधार पर इन्हें दो भागों में विभाजित किया जा सकता है–

(1) प्राथमिक आंकड़ें (Primary data) (2) द्वितीयक आँकड़ें (Secondary data)

(1) **प्राथमिक आँकड़ें**– जिन आँकड़ों को नए सिरे से पहली बार एकत्रित किया जाता है उन्हें प्राथमिक आँकड़ें कहते हैं। जैसे–विद्यालय की कक्षा–नवीं में पढ़ने वाले छात्रों का भार, लम्बाई इत्यादि। प्राथमिक आँकड़ों को निम्न विधियों से एकत्रित किया जाता है

(i) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अन्वेषण से (Direct personal investigation): इस विधि में अन्वेषक स्वयं सम्बन्धितों से सीधा सम्पर्क करके जानकारी प्राप्त करता है।

(ii) परोक्ष अन्वेषण से (Indirect Investigation): जब अन्वेषण का क्षेत्र विस्तृत हो एवं अन्वेषक द्वारा स्वयं जाना संभव न हो तो निम्न प्रकार से सूचनाएँ एकत्र की जाती है–

(क) प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर– इस विधि में अन्वेषक द्वारा अनुसूचियाँ तैयार करके प्रगणकों को दी जाती है जो क्षेत्र में जाकर संबंधित विषय में आँकड़ें एकत्र करते हैं।

(ख) सूचकों द्वारा प्रश्नावलियाँ भरवाकर– इस विधि में अन्वेषक द्वारा अध्ययन विषय पर प्रश्नावली तैयार करके सूचकों तक भिजवाई जाती है तथा सूचकों से उत्तर प्राप्त किए जाते हैं।

(ग) स्थानीय स्रोतों या संवाददाताओं द्वारा–ऐसी सूचनाएँ जिनको नियमित एकत्र करना जरूरी होता है तो अन्वेषक द्वारा विभिन्न स्थानों पर स्थानीय व्यक्तियों या संवाददाताओं को सूचना देने के लिए नियुक्त कर देता है।

(घ) विशेषज्ञों के माध्यम से परोक्ष मौखिक अन्वेषण–इस विधि में अन्वेषण सूचनाएँ उन व्यक्तियों से प्राप्त नहीं करते जो अन्वेषण से प्रत्यक्ष रूप से सम्बद्ध हो वरन् अप्रत्यक्ष रूप से संबद्ध तृतीय पक्षकारों के सहयोग से प्राप्त करते हैं। जैसे–यदि विद्यार्थियों का वार्षिक मूल्यांकन बिना परीक्षा लिए करना हो तो संबंधित अध्यापक द्वारा ऐसा किया जा सकता है।

(2) द्वितीयक आँकड़ें **(Secondary data):** वे आँकड़ें जिनका संकलन पहले से किया हुआ हो और प्रकाशित या अप्रकाशित स्थिति में हो द्वितीयक आंकड़े कहलाते हैं। इनके दो प्रमुख स्रोत हैं

(i) प्रकाशित स्रोत **(Published Sources):** सरकारी, गैर सरकारी व अन्य अन्वेषक समय–समय पर विभिन्न विषयों पर आँकड़े एकत्र कर उन्हें प्रकाशित करवाते है। इनके स्रोत इस प्रकार हैं–

(क) अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन–संयुक्त राष्ट्र संघ (U.N.O.) अन्तर्राष्ट्रीय श्रम संगठन (I.L.O) मुद्राकोष (I.M.F.) जैसे संगठन अपने से संबंधित आँकड़ो का संग्रह कर अपने सदस्यों के लिए प्रकाशित करवा लेते हैं।

(ख) सरकारी प्रकाशन (Government Publication): केन्द्र व राज्य सरकारों के अनेक मंत्रालयों, विभागों द्वारा अपने से संबंधित आँकड़ें एकत्रित कर प्रकाशित करवा देते हैं।

(ग) अर्ध सरकारी प्रकाशन (Semi Government Publication): स्थानीय निकाय (नगर पालिका/ग्राम पंचायत) समय–समय पर शिक्षा, बिजली, जन्म–मृत्यु, राजस्व रिकार्ड का ब्यौरा प्रकाशित करती है।

इसी प्रकार विश्वविद्यालय, शोध संस्थान, शिक्षक संघ, विभिन्न पत्र–पत्रिकाएँ एवं शोधार्थियों द्वारा कई प्रकार के आँकड़े एकत्र कर प्रकाशित किए जाते हैं।

(ii) अप्रकाशित स्रोत (Unpublished Sources): कभी–कभी सरकार या अन्य संस्थाओं द्वारा महत्वपूर्ण विषयों पर आँकड़े एकत्र किए जाते हैं लेकिन प्रकाशित नहीं होते। ऐसी सामग्री फाइलों, प्रलेखों, रजिस्टरों से प्राप्त की जाती है।

प्रश्नावली 15.1

1. प्राथमिक एवं द्वितीयक आँकड़े क्या हैं अंतर स्पष्ट करें।
2. प्राथमिक आँकड़ों के संकलन की विधियों की व्याख्या कीजिए।

आँकड़ों का प्रस्तुतीकरणः–

आँकड़ों को एकत्रित करने के बाद ही अन्वेषक को इन आँकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए उपयुक्त विधियों का चयन करना होता है जो अर्थपूर्ण हो, सरलता से समझी जा सकती हो और एक बार में ही उसके लक्षणों को जाना जा सकता हो।

आँकड़े जिस प्रकार तथा जिस रूप से प्राप्त हो उसी क्रम में संकलित किए जाएँ तो इन्हें ''यथा प्राप्त आँकड़ें'' (Raw data) कहते हैं। इन्हें कच्चे आँकड़ें भी कहा जाता है जैसे–विज्ञान की परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए अंक

62 75 65 40 35 70 25 20 36 55

क्या इसे देखकर आप न्यूनतम व अधिकतम अंक प्राप्त कर सकते हैं? यदि उक्त आँकड़ों को आरोही (छोटे से बड़े) या अवरोही (बड़े से छोटे) के क्रम में रखा जाये तो और सरलता से अधिकतम व न्यूनतम अंक प्राप्त कर सकते हैं। आँकड़ों का आरोही क्रम इस प्रकार है

20 25 35 36 40 55 62 65 70 75

इस प्रकार हम स्पष्ट देख सकते हैं कि न्यूनतम प्राप्तांक 20 और अधिकतम प्राप्तांक 75 है। आँकड़ों के अधिकतम व न्यूनतम मानों के अंतर को आँकड़ों का परिसर (range) कहा जाता है। अतः यहाँ पर परिसर $75 - 20 = 55$ है।

यदि आँकड़े अधिक संख्या में है तो आरोही या अवरोही क्रम में लिखने की बजाय सारणी रूप में लिखा जाता है।

आँकड़ों का सारणी रूप में प्रस्तुतीकरणः–

एक विद्यालय की दसवीं कक्षा के 20 छात्रों के विज्ञान की अर्द्धवार्षिक परीक्षा में 10 में से प्राप्त अंक क्रमशः निम्न प्रकार है–

5 4 3 4 5 8 4 3 8 2
4 5 4 3 8 5 3 4 2 8

इन यथा प्राप्त आँकड़ों को देखने पर कक्षा के स्तर का ठीक अनुमान लगाना कठिन है परन्तु यदि हम इन आँकड़ों से एक व्यवस्थित सारणी बना लें तो यह कार्य हमारे लिए सुगम हो जाएगा। ''किसी अंक की जितनी बार आवृत्ति होती है वह उस अंक की बारम्बारता (Frequency) कहलाती है।'' इसे "f" से निरूपित करते हैं।

उक्त आँकड़ों से सारणी निम्न विधि से तैयार करते हैं–

(i) प्रथम स्तम्भ में वे अंक लिख लेते हैं जो विद्यार्थियों ने प्राप्त किए हैं। कोई अंक छूटना नहीं चाहिए।

(ii) अब प्रत्येक स्तम्भ के प्रत्येक अंक को लेते हुए, दूसरे स्तम्भ में उस अंक के प्रत्येक प्राप्तांक के लिए एक खड़ी रेखा जिसे मिलान चिन्ह (Tally Mark) कहते हैं, खींचते जाते हैं।

(iii) किसी अंक के सामने चार खड़ी रेखाएँ आने पर पाँचवीं बार उसी अंक की आवृत्ति हो तो पाँचवीं रेखा को अलग से न लगाकर पूर्व में अंकित चार रेखाओं (||||) को एक आड़ी रेखा से काट दें।

(iv) अब छठवीं बार उसी अंक की आवृत्ति होने पर फिर खड़ी रेखा खींच दे एवं पुनः यही क्रम चलने (||||) दें।

(v) दूसरे स्तम्भ का कार्य पूर्ण होने पर तीसरे स्तम्भ में प्रत्येक अंक की आवृत्ति मिलान चिन्ह की गिनती करके लिख देते हैं।

सारणी

प्राप्तांक	मिलान चिन्ह	बारम्बारता (f)
2	$\vert\vert$	2
3	$\vert\vert\vert\vert$	4
4	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\,\vert$	6
5	$\vert\vert\vert\vert$	4
8	$\vert\vert\vert\vert$	4

$\overline{\sum f = 20}$

इस प्रकार के बारम्बारता बंटन को अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी(ungrouped frequency distribution table) कहा जाता है।

यदि आँकड़ों की संख्या बहुत अधिक हो तो आँकड़े को समूहों में रखकर छोटा कर लेते हैं इन समूहों को वर्ग (classes) कहा जाता है और इनके माप को 'वर्ग अंतराल' (class interval) का वर्गमाप (class size) या वर्ग चौड़ाई (class width) कहा जाता है। प्रत्येक वर्ग की निम्नतम संख्या को निम्न वर्ग सीमा (Lower class limit) और अधिकतम संख्या को उपरि वर्ग सीमा (upper class limit) कहा जाता है। इनको सारणी रूप में प्रकट करने लिए हम अगले उदाहरण द्वारा समझेंगे।

जैसे–वन महोत्सव के दौरान 30 विद्यालयों में से प्रत्येक विद्यालय में 50 पौधे लगाए गए। एक महीने बाद लगाए गए पौधों में से बच गए पौधों की संख्या निम्न थी

22	6	48	0	28	22	17	10	32	6
22	22	28	26	17	36	10	22	28	0
28	22	48	32	10	48	25	36	6	32

सारणी

बचे हुए पौधों की संख्या	मिलान चिन्ह	विद्यालयों की संख्या (बारम्बारता)
0 — 10	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\,\vert\vert\vert$	8
11 — 20	$\vert\vert$	2
21 — 30	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\,\cancel{\vert\vert\vert\vert}\,\vert\vert$	12
31 — 40	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}$	5
41 — 50	$\vert\vert\vert$	3
कुल योग		$\overline{\sum f = 30}$

आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण की इस विधि को वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी (Grouped Frequency Distribution Table) कहा जाता है। इस सारणी को देखकर हम सरलता से अनुमान लगा सकते हैं एवं निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

प्रश्नावली 15.2

1. एक माध्यमिक विद्यालय के कक्षा 10 के 30 छात्रों का भार (किलो ग्राम में) निम्नलिखित है:

34 34 36 37 38 33 34 35 36 37 38 33 34 35 34
33 37 35 34 36 38 36 35 34 35 37 38 34 35 35

उपर्युक्त आँकड़ों को बारम्बारता सारणी में निरूपति कीजिए।

2. एक गाँव में जन्मे 30 बच्चों का भार (किलो ग्राम में) निम्न प्रकार था:

3.4 3.6 3.0 3.8 3.6 3.8 2.9 3.4 2.9 3.4
3.0 3.4 3.2 3.1 3.2 3.2 3.1 3.2 3.4 3.0
3.1 3.2 3.5 3.7 3.1 3.0 2.9 3.0 3.1 3.2

उपर्युक्त को बारम्बारता सारणी में निरूपित कीजिए।

3. तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछाला गया। प्रत्येक बार चित (Head) आने की संख्या निम्न है

0 1 2 2 1 2 3 1 3 0
1 3 1 1 2 2 0 1 2 1
3 0 0 1 1 2 3 2 2 0

उपर्युक्त आँकड़ों से एक बारम्बारता सारणी बनाइए।

4. दसवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह ये हैं

AB O O A B O A O B A O B A O O
A AB O A A O O AB B A O B A B O

इन आँकड़ों को बारम्बारता सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए।
बताइए कि इन विद्यार्थियों में कौनसा रक्त समूह अधिक सामान्य है और कौनसा रक्त समूह विरलतम समूह है।

5. एक परीक्षा में कक्षा नवी के 30 छात्रों के प्राप्तांक निम्नलिखित हैं। इन प्राप्तांको से 10 वर्ग अंतराल वाले 5 वर्गों की बारम्बारता सारणी बनाइए:

19 27 40 3 33 41 18 8 20 0 23 49 16 36 14
39 6 12 29 28 22 24 37 10 23 38 35 9 49 23

6. निम्नलिखित बंटन के लिए पाँच–पाँच के वर्ग अन्तराल लेकर बारम्बारता सारणी का निर्माण कीजिए।

13 11 8 19 0 44 27 10 8 35 13
27 30 17 43 23 19 43 17 7

7. 50 दशमलव स्थान तक शुद्ध π का मान नीचे दिया गया है

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) दशमलव बिन्दु के बाद आने वाले 0 से 9 तक के अंको की एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।
(ii) सबसे अधिक बार और सबसे कम बार आने वाले अंक कौन–कौन से हैं?

8. 40 इंजिनियरों की उनके आवास से कार्यस्थल की दूरियाँ (किलो मीटर में) निम्न है

5 3 10 20 25 11 13 7 12 31
19 10 12 17 18 11 32 17 16 2
3 18 15 12 5 3 8 7 9 7
14 12 9 2 15 6 7 15 12 6

0 — 5 को (जिसमें 5 सम्मिलित नहीं है) पहला अंतराल लेकर ऊपर दिए हुए आँकड़ों से वर्गमाप 5 वाली एक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए। इस सारणीबद्ध निरूपण में आपको कौन–कौन से मुख्य लक्षण देखने को मिलते हैं?

9. तीस बच्चों से यह पूछा गया कि पिछले सप्ताह उन्होंने कितने घण्टों तक पढ़ाई की। प्राप्त परिणाम ये रहे हैं:

2	3	5	8	6	9	8	7	14	12
6	17	1	15	8	2	12	4	3	10
3	2	6	1	12	5	8	5	8	4

(i) वर्ग चौड़ाई 5 लेकर इन आँकड़ों की एक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

(ii) कितने बच्चों ने सप्ताह में 15 या अधिक घण्टों तक पढ़ाई की?

C4JZLS

आँकड़ों का आलेखीय निरूपणः

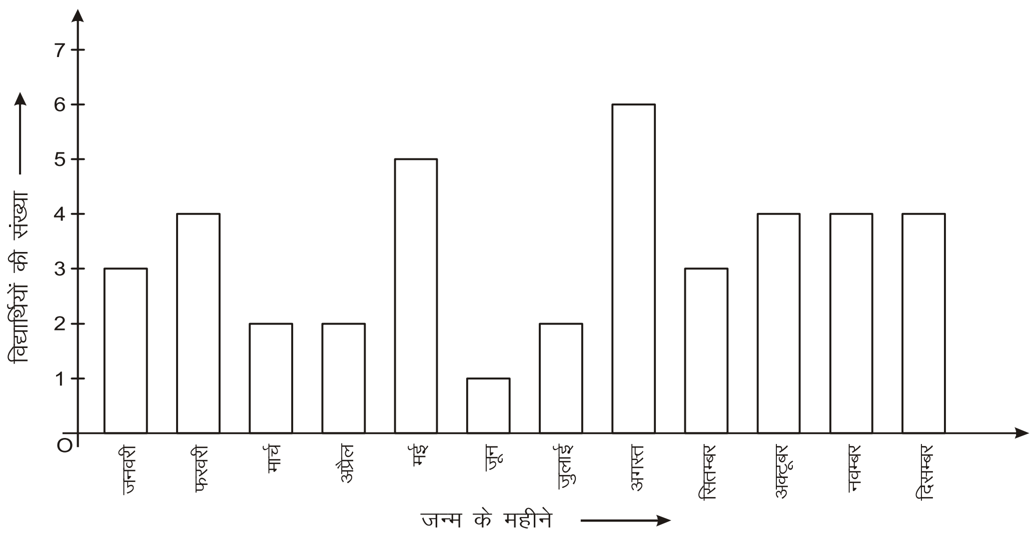
सृष्टि की रचना के बाद जैसे–जैसे सभ्यता का विकास हुआ वैसे–वैसे मनुष्य ने आवश्यकतानुसार विज्ञान व गणित का विकास किया। इसमें सांख्यिकी का विकास भी होता गया और संदेश पहुँचाने हेतु चित्रों का प्रयोग होने लगा। जिसे आलेखीय निरूपण कह सकते हैं। इन आलेखों को देखने मात्र से वह व्यक्ति अनुमान लगा सकता है जो कुशल गणितज्ञ नहीं है। इसी के अन्तर्गत आँकड़ों का आलेखीय निरूपण तीन प्रकार से करते हैं।

(1) दण्ड आलेख (Bar Graph)

(2) आयत चित्र (Histograms)

(3) बारम्बारता बहुभुज (Frequency polygon)

(1) **दण्ड आलेख**– दण्ड आलेख आँकड़ों का एक चित्रीय निरूपण होता है जिसमें प्रायः एक अक्ष (मान लीजिए x-अक्ष) पर एक चर को प्रकट करने वाले एक समान चौड़ाई के दण्ड खींचे जाते हैं जिनके बीच में बराबर–बराबर दूरियाँ छोड़ी जाती हैं। दूसरे चर के मान दूसरे अक्ष (मान लीजिए y-अक्ष) पर दिखाए जाते हैं दण्डों की ऊँचाइयाँ चर के मानों पर निर्भर करती हैं इसे हम निम्न उदाहरण द्वारा समझ सकते हैं।



उदाहरण 1: नवी कक्षा के 40 विद्यार्थियों से उनके जन्म का महीना बताने के लिए कहा गया। इस प्रकार प्राप्त आँकड़ों से निम्नलिखित आलेख बनाया गयाः

ऊपर दिए गए आलेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिएः

(i) मई माह में कितने विद्यार्थियों को जन्म हुआ?

(ii) सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म किस माह में हुआ?

(iii) सबसे कम विद्यार्थियों का जन्म किस माह में हुआ?

हल: यहाँ चर 'जन्म दिन का महीना' है और चर का मान 'जन्म लेने वाले विद्यार्थियों की संख्या' है।

(i) मई माह में 5 विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

(ii) सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म अगस्त महीने में हुआ।

(iii) सबसे कम विद्यार्थियों का जन्म जून महीने में हुआ।

उदाहरण 2: एक परिवार की मासिक आय दो लाख रूपए है, विभिन्न मदों के अन्तर्गत हर महीने होने वाले खर्च की योजना बनाई थीः

सारणी–3

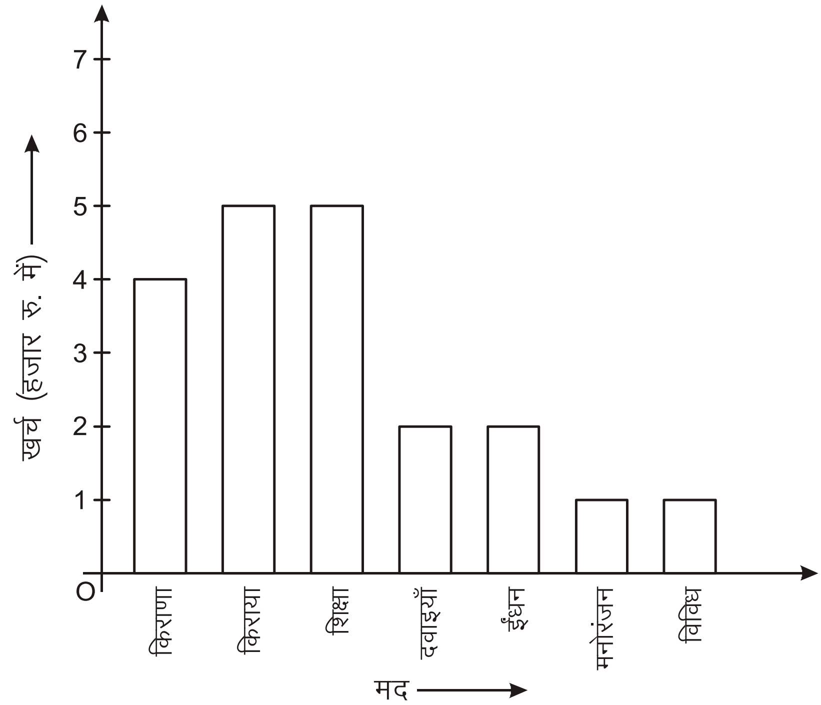
मद	खर्च (हजार रूपयों में)
किराणों का सामान	4
किराया	5
बच्चों की शिक्षा	5
दवाइयाँ	2
ईंधन	2
मनोरंजन	1
विविध	1

ऊपर दिए गए आँकड़ों का एक दण्ड आलेख बनाइए।

हल: उक्त आँकड़ों का दण्ड आलेख निम्नलिखित चरणों में बनाते हैं'–

1. कोई भी पैमाना (Scale) लेकर हम क्षैतिज अक्ष पर मदों (चर) को निरूपित करते है, यहाँ दण्ड की चौड़ाई का कोई महत्व नहीं होता फिर दण्ड की चौड़ाई समान लेते हैं व दो दण्ड के बीच की दूरी भी समान लेते हैं। यहाँ एक मद को एक सेंटीमीटर से निरूपित करेंगे।
2. खर्च (मूल्य) को उर्ध्वाधर अक्ष पर निरूपित करते है क्योंकि अधिकतम खर्च 5000 रुपये है अतः हम पैमाना = 1000 रुपये लेते हैं।
3. अपने पहले मद (किराणे के सामान) को निरूपित करने हेतु 1 इकाई की चौड़ाई 4 की ऊँचाई वाला एक आयतकार दण्ड बनाते हैं।
4. इसी प्रकार दो क्रमागत दण्डों के बीच 1 इकाई का खाली स्थान छोड़कर अन्य मदों को निरूपित किया जाता है। (देखिए आकृति 2)

उक्त आकृति में ही हम अन्य मदों में हुए खर्च का तुलनात्मक रूप से अध्ययन कर सकते हैं। अतः सारणी रूप में आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण के बजाय यह एक उत्तम निरूपण है।



(2) आयत चित्र (आधार लम्बाई परिवर्तन के साथ)

आयत चित्र वर्गीकृत एवं संतत बारम्बारता बंटन का आयतीय निरूपण है जिसमें वर्ग अंतराल आधार होते हैं तथा आयतों की ऊँचाइयाँ उन वर्गों की बारम्बारता के समानुपाती होती है।

वर्ग अंतराल को x-अक्ष व बारम्बारताओं को y-अक्ष पर उचित पैमाना लेते हुए इस प्रकार अंकित किया जाता है कि निर्मित आयतों का क्षेत्रफल सम्बन्धित बारम्बारताओं के समानुपाती रहे।

अतः हम चार भिन्न प्रकार की बारम्बारता बंटन से सम्बन्धित आयत चित्रों के निर्माण का अध्ययन करेंगे।

(क) जब बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत हो तथा वर्ग अंतराल समान हो।

(ख) जब बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत हो परन्तु वर्ग अंतराल असमान हो।

(ग) जब बारम्बारता बंटन वर्गीकृत तो है परन्तु संतत नहीं है।

(घ) जब बारम्बारता बंटन अवर्गीकृत है तथा बटन के मध्य बिन्दु दिए गए हो।

अब हम उक्त तथ्यों को कुछ उदाहरणों से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 3: निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का आयत चित्र बनाइए।

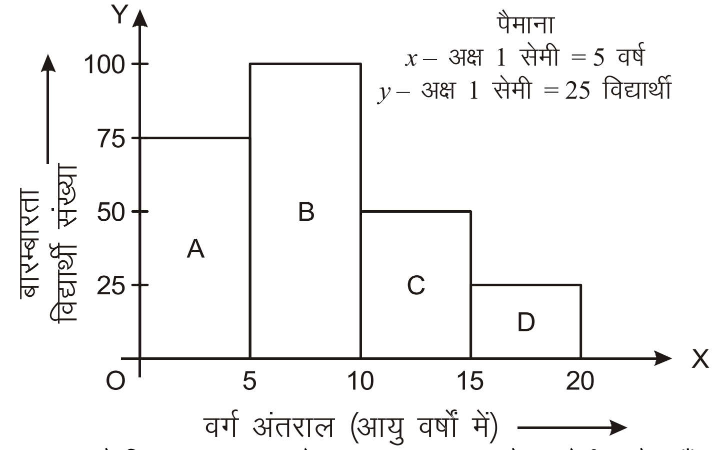
सारणी–4

वर्ग (आयु वर्षों में)	0 — 5	5 — 10	10 — 15	15 – 20
विद्यार्थियों की संख्या	72	103	50	25

हलः यहाँ बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है तथा वर्ग अंतराल भी समान है। अतः x-अक्ष पर वर्ग अंतराल अर्थात् आयु वर्षों में (पैमाना 1 सेमी = 5 वर्ष) अंकित करेंगे।

अब चूंकि 0 — 5 वर्ग अंतराल में विद्यार्थियों की संख्या 72 है अतः बारम्बारता के सामने x-

अक्ष के समान्तर रेखा खींचकर वर्ग अंतराल 0 — 5 पर आयत A की रचना करेंगे। इसी प्रक्रिया से आयत B, C, D का निर्माण करेंगे।



अतः यह स्पष्ट है कि इन सब आयतों का आधार समान है (1 सेमी) और ऊँचाई बारम्बारता के बराबर है इसलिए आयतों का क्षेत्रफल बारम्बारता के समानुपात में होगा।

उदाहरण 4: किसी औद्योगिक संस्थान के कार्मिकों का साप्ताहिक वेतन निम्न सारणी में दिया गया है इसका आयत चित्र बनाइए।

सारण–5

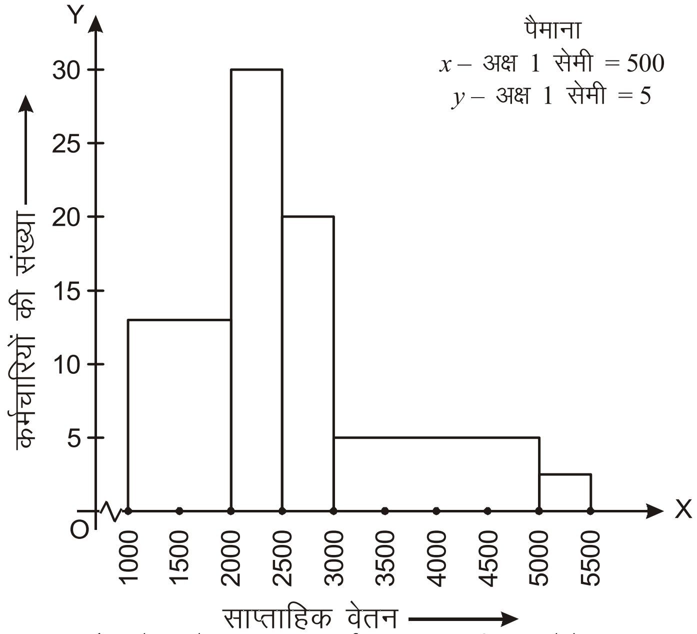
साप्ताहिक वेतन	1000—2000	2000—2500	2500—3000	3000—5000	5000—5500
कर्मचारियों की संख्या	26	30	20	16	1

हल: यहाँ बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है परन्तु वर्ग अंतराल असमान है अतः आयतों की ऊँचाइयाँ ज्ञात करने हेतु निम्न क्रिया विधि का उपयोग करेंगे जिससे ऊँचाइयाँ बारम्बारताओं के समानुपाती बनी रहे। (अ) सबसे कम अंतराल वाले वर्ग का अंतराल (h) लिखेंगे, यहाँ $h=500$ (ब) सूत्र – वर्ग की पुनः निर्धारित बारम्बारता $=\dfrac{h}{\text{वर्ग अंतराल}}\times$ वर्ग अंतराल की बारम्बारता से बारम्बारता का पुनः निर्धारण करेंगे। अतः नई सारणी प्राप्त करेंगे।

सारणी–6

साप्ताहिक वेतन (रुपयों में)	कर्मचारियों की संख्या	पुनः निर्धारित कर्मचारियों की संख्या
1000 — 2000	26	$\frac{500}{1000}\times 26=13$
2000 — 2500	30	$\frac{500}{500}\times 30=30$
2500 — 3000	20	$\frac{500}{500}\times 20=20$

3000 — 5000	16	$\frac{500}{2000} \times 16 = 4$
5000 — 5500	1	$\frac{500}{500} \times 1 = 1$



अब x-अक्ष पर (पैमानो 1 सेमी =500) वर्ग अंतराल अंकित करेंगे तथा y-अक्ष पर कर्मचारियों की संख्या (पैमाना 1 सेमी =5) अंकित करेंगे। पुनः निर्धारित बारम्बारता बंटन के आधार पर आयत A, B, C, D, E का निर्माण करेंगे। यही अभीष्ट बारम्बारता बंटन का आयत चित्र होगा।

उदाहरण 5: बारम्बारता बंटन का आयत चित्र बनाइए।

सारणी–7

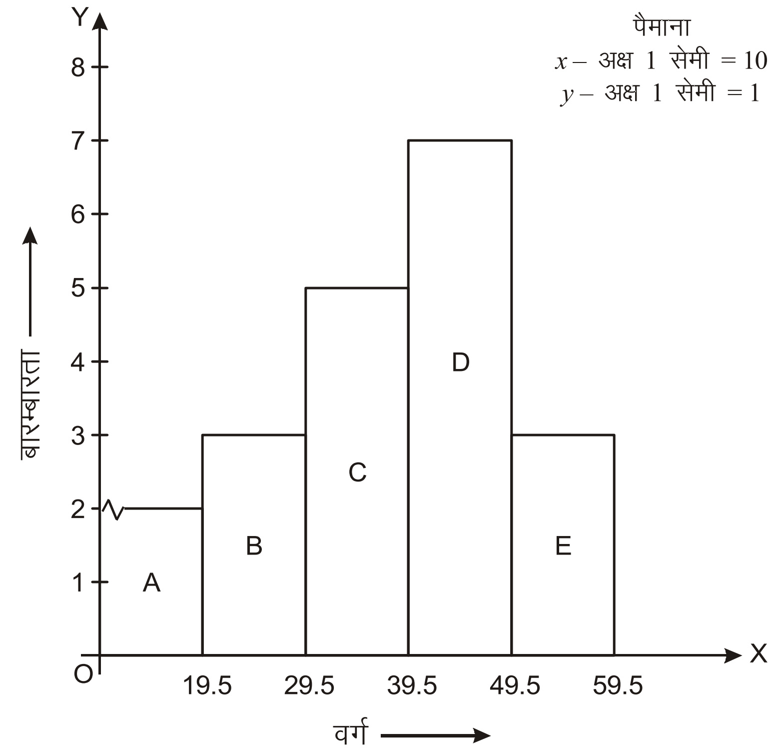
वर्ग	10 — 19	20 — 29	30 — 39	40 — 49	50 — 59
बारम्बारता	2	3	5	7	3

हलः यहाँ बारम्बारता बंटन वर्गीकृत तो है परन्तु संतत नहीं है अतः इसे समावेशी विधि द्वारा संतत बनायेंगे। इस प्रकार प्राप्त बारम्बारता बंटन सारणी–8 के अनुसार होगा।

सारणी–8

वर्ग	9.5 — 19.5	19.5 — 29.5	29.5 — 39.5	39.5 — 49.5	49.5 — 59.5
बारम्बारता	2	3	5	7	3

अब यहाँ बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है तथा वर्ग अंतराल भी समान है। अतः x-अक्ष पर वर्ग अंतराल (पैमाना 1 सेमी =10) अंकित करेंगे तथा y-अक्ष पर बारम्बारताएँ (पैमाना 1 सेमी =1)



उदाहरण 6: निम्न बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र बनाइए।

सारणी–9

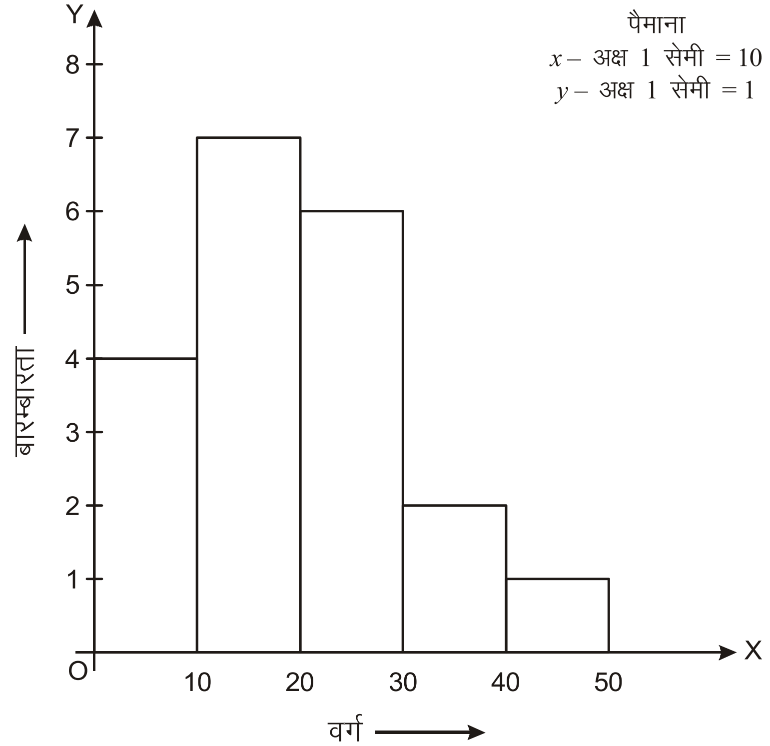
मध्य बिन्दु	5	15	25	35	45
बारम्बारता	4	7	6	2	1

हल: यहाँ बारम्बारता बंटन अवर्गीकृत है तथा बंटन के मध्य बिन्दु दिए गए है। अतः इसे वर्गीकृत बारम्बारता बंटन बदलते है।

सारणी–10

वर्ग	0 — 10	10 — 20	20 — 30	30 — 40	40 — 50
बारम्बारता	4	7	6	2	1

अब यह बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है तथा वर्ग अंतराल भी समान है। अतः x-अक्ष पर वर्ग अंतराल पैमाना (1 सेमी = 10) अंकित करेंगे तथा y-अक्ष पर बारम्बारताएँ पैमाना (1 सेमी = 1) लेकर आयत चित्र का निर्माण करने पर निम्न आयत चित्र प्राप्त होगा।



(3) **बारम्बारता बहुभुज (Frequency Polygon):**

बारम्बारता बंटन के आलेखी निरूपण का एक प्रकार बारम्बारता बहुभुज भी है। बारम्बारता बहुभुज का निर्माण दो प्रकार से किया जा सकता है।

(1) आयत चित्र के माध्यम से

(2) बिना आयत चित्र की सहायता से

(1) आयत चित्र के माध्यम से बारम्बारता बहुभुज बनाने के लिए निम्नलिखित क्रिया विधि सहायक सिद्ध होती है।

(i) दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र का निर्माण कीजिए।

(ii) प्रत्येक आयत के ऊपर क्षैतिज रेखा का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(iii) क्रमशः आयत के इन मध्य बिन्दुओं को सरल रेखाओं से मिलाइए।

(iv) प्रारम्भिक आयत के मध्य बिन्दु को इससे पूर्व संभावित वर्ग अन्तराल के x-अक्ष पर स्थित मध्य बिन्दु से मिलाएँ।

(v) अंतिम आयत के मध्य बिन्दु को इससे आगे बनाने वाले संभावित वर्ग अंतराल के x-अक्ष पर स्थित मध्य बिन्दु से मिलाए।

इस प्रकार प्राप्त चित्र बारम्बारता बहुभुज होता है।

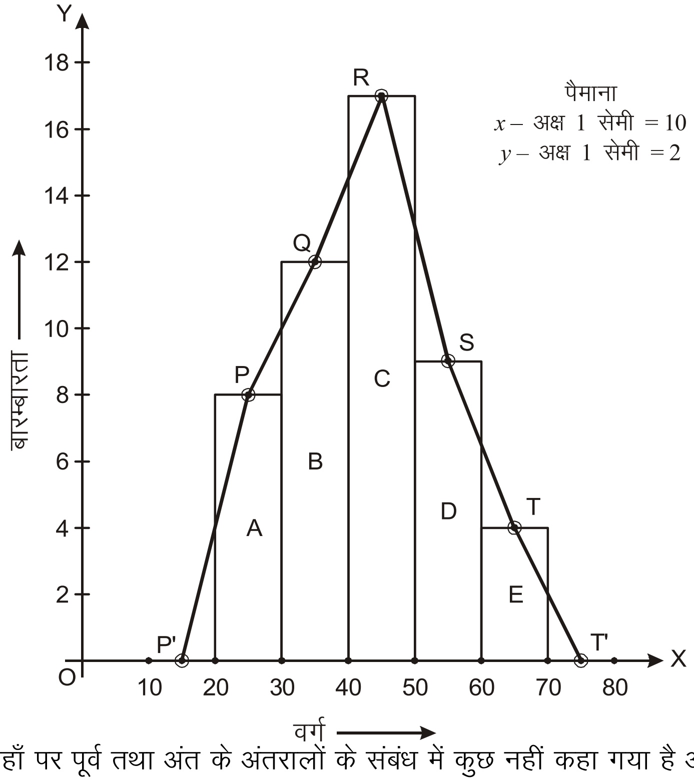
टिप्पणीः बिन्दु सं. (iv) व (v) की यदि संभावना नहीं है जैसे परीक्षा में प्राप्तांकों की संख्या 0 से नीचे नहीं हो सकती है तथा अधिकतम प्राप्तांक 100 से अधिक न हो तो ऐसी स्थिति में इन बिन्दुओं को प्रारम्भिक व अंतिम उर्ध्वाधर रेखाओं के मध्य बिन्दुओं से मिला दें।

उदाहरण 7ः निम्नलिखित बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र बनाते हुए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिएः

सारणी—11

वर्ग	20 — 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60	60 — 70
बारम्बारता	8	12	17	9	4

हलः दिया गया बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है अतः पूर्व में बताई गई विधि से आयत चित्र का निर्माण करते हैं। इस प्रकार प्राप्त आयतों A, B, C, D, E के ऊपर की क्षैतिज रेखा के मध्य बिन्दुओं P, Q, R, S, T को क्रमित सरल रेखाओं द्वारा मिला दें।



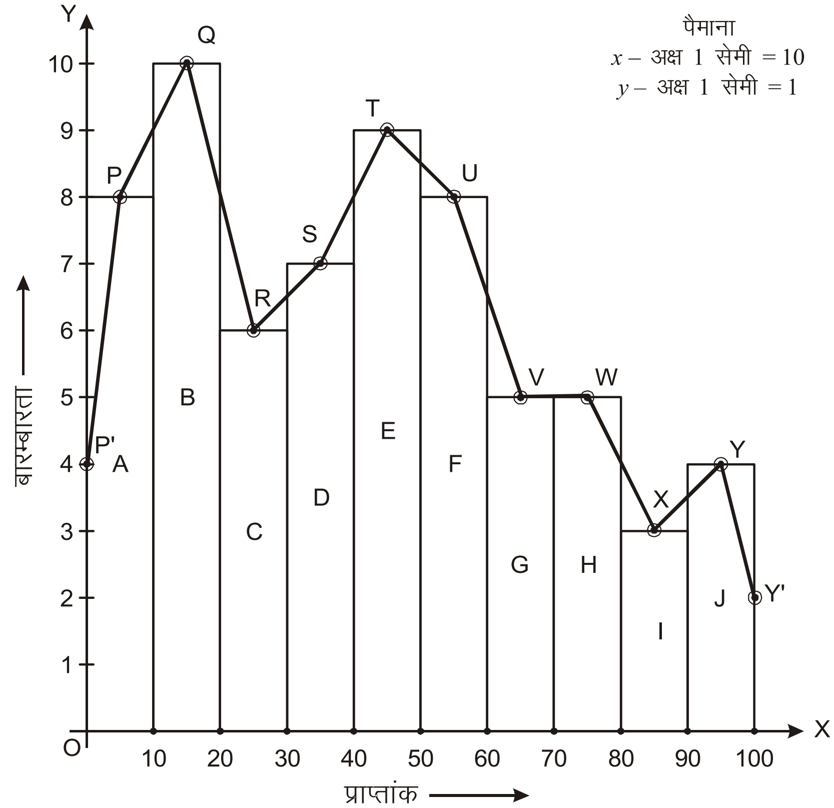
चूँकि यहाँ पर पूर्व तथा अंत के अंतरालों के संबंध में कुछ नहीं कहा गया है अतः सिरों को इन अंतरालों के x-अक्ष पर स्थित मध्य बिन्दुओं से मिलाने पर दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज P'PQRSTT' प्राप्त होता है।

उदाहरण 8: निम्नलिखित बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र बनाते हुए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए।

सारणी—12

प्राप्तांक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
विद्यार्थियों की संख्या	8	10	6	7	9	8	8	6	3	4

हलः दिया गया बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है अतः पूर्व में बताई विधि अनुसार आयत चित्र निर्माण करते है



इस प्रकार प्राप्त आयतों A, B, C, D, E, F, G, H, I, J के ऊपर को क्षैतिज रेखा के मध्य बिन्दुओं P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y को क्रमिक रेखाओं द्वारा मिला देते हैं।

चूंकि यहाँ पर विद्यार्थी के प्राप्तांक 0 से कम तथा 100 से अधिक नहीं हो सकते है अतः इनसे पूर्व तथा पश्चात् अंतराल नहीं होगा अतः प्रथम आयत पर स्थित बिन्दु P को इससे पूर्व उर्ध्वाधर रेखा के मध्य बिन्दु P' से तथा अंतिम आयत पर स्थित बिन्दु Y को इससे पश्चात् उर्ध्वाधर रेखा के मध्य बिन्दु Y' से चित्रानुसार मिला कर बहुभुज OP' PQRSTUVWXYY'K प्राप्त करते हैं। यही दी गई बारम्बारता बंटन का अभीष्ट बारम्बारता बहुभुज होगा।

(2) आयत चित्र का निर्माण किए बिना भी बारम्बारता बहुभुज बनाना हो तो निम्न क्रिया विधि सहायक सिद्ध होती है।

(i) यदि बारम्बारता बंटन वर्गीकृत है तो वर्ग चिन्ह ज्ञात करते है। अब यह बारम्बारता बंटन अवर्गीकृत रूप में आ जाएगा।

(ii) उचित पैमाना लेकर इन वर्ग चिन्हों को x-अक्ष पर अंकित करना

(iii) उचित पैमाना लेकर इन बारम्बारताओं को y-अक्ष पर अंकित करना

(iv) अब बिन्दुओं $(x_1, f_1), (x_2, f_2)$... को अंकित करना।

(v) अब रेखा खण्डों द्वारा इन बिन्दुओं को मिलाना।

(vi) प्रारम्भ वाले वर्ग से पूर्व की कक्षा तथा अंतिम वर्ग के पश्चात् वाली कक्षा के मध्य बिन्दुओं से इन सिरों को मिलायेंगे इस प्रकार प्राप्त बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज प्राप्त होता है।

टिप्पणीः 1. यहाँ बारम्बारता बंटन किसी भी प्रकार का हो बहुभुज आसानी से बनाया जाता सकता है।

2. यदि प्रथम से पूर्व तथा अंतिम के पश्चात् वर्ग अंतराल बनाना संभव नहीं है तो इन वर्ग अंतरालों के प्रारम्भिक बिन्दु एवं अंतिम बिन्दु पर उर्ध्वाधर रेखाएं खींच देते है एवं इस वर्ग अंतराल की आधी बारम्बारता वाले बिन्दु पर इन सिरों का मिला देते है। इस प्रकार दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज प्राप्त होगा।

उदाहरण 9: दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज बनाइए।

सारणी–13

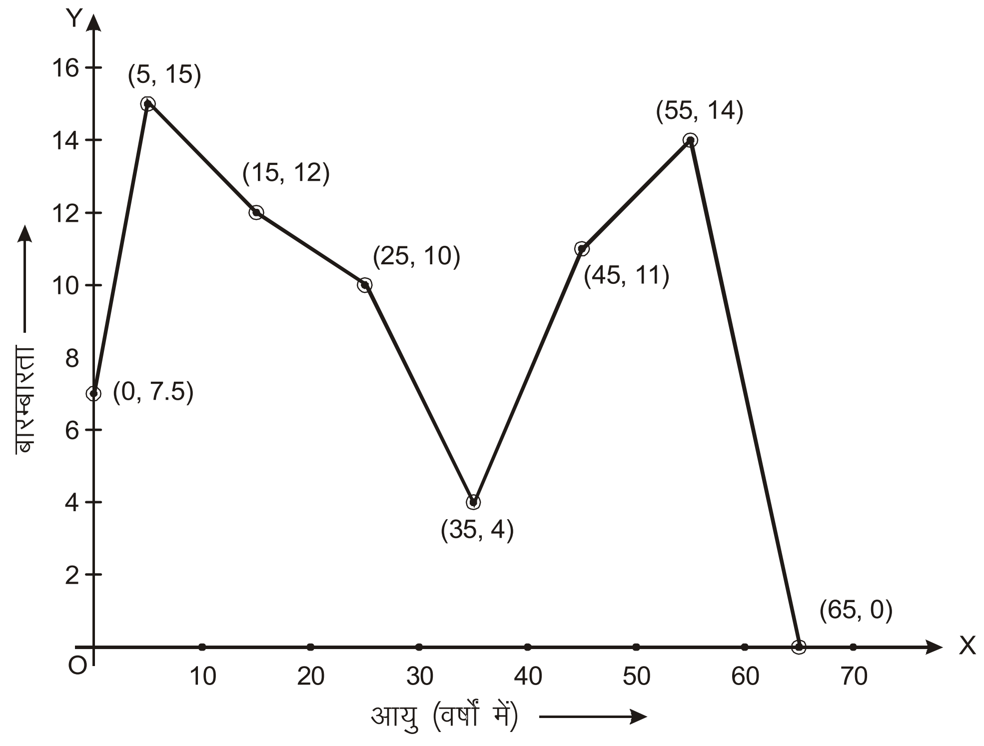
आयु (वर्षों में)	0 — 10	10 — 20	20— 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60
बारम्बारता	15	12	10	4	11	14

हलः यह बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है। अतः यहाँ पर वर्ग के आधार पर निम्नांकित सारणी प्राप्त होती है।

सारणी–14

आयु (वर्षों में)	0 — 10	10 — 20	20— 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60
वर्ग चिन्ह	5	15	25	35	45	55
बारम्बारता	15	12	10	4	11	14

अब ग्राफ पेपर पर उचित पैमाना मानते हुए बिन्दु (5, 15), (15, 12), (25, 10), (35, 4), (45, 11), (55, 14) अंकित करेंगे।



चूँकि आयु ऋणात्मक नहीं हो सकती है अतः सिरे (5, 15) को पूर्व कल्पित वर्ग की शून्य बारम्बारता वाले मध्य बिन्दु से मिलाने के स्थान पर इसवर्ग की निम्न सीमा अर्थात् O पर उर्ध्वाधर रेखा खींचेंगे एवं इस रेखा पर वर्ग की आधी बारम्बारता वाले बिन्दु (0, 7.5) पर सिरे को मिलायेंगे।

इस प्रकार दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए बहुभुज चित्र अनुसार प्राप्त होगा।

उदाहरण 10: निम्न बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए।

सारणी–15

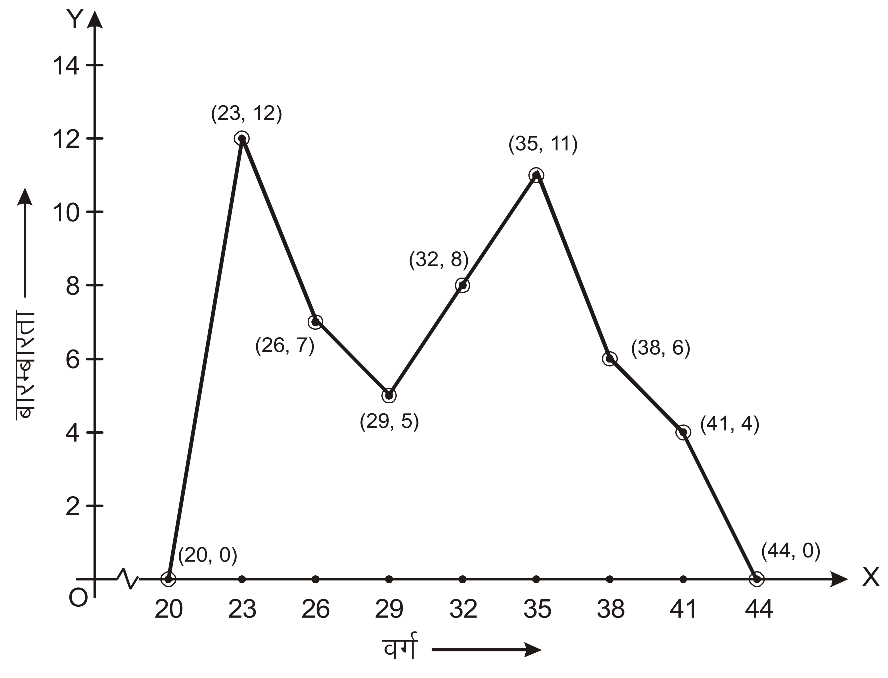
वर्ग	22—24	25—27	28—30	31—33	34—36	37—39	40—42
बारम्बारता	12	7	5	8	11	6	4

हल: यहाँ बारम्बारता बंटन वर्गीकृत तो है परन्तु संतत नहीं है। क्योंकि वर्गों को संतत बनाने पर भी वर्ग चिन्ह में कोई परिवर्तन नहीं होता है। अतः यहाँ हम इसे संतत बनाने के स्थान पर वर्ग चिन्ह ज्ञात करके बारम्बारता बहुभुज बनायेंगे।

सारणी–16

वर्ग	22—24	25—27	28—30	31—33	34—36	37—39	40—42
वर्ग चिन्ह	23	26	29	32	35	38	41
बारम्बारता	12	7	5	8	11	6	4

अब ग्राफ पेपर पर उचित पैमाना मानते हुए बिन्दु (23, 12), (26, 7), (29, 5), (32, 8), (35, 11), (38, 6), (41, 4) अंकित करेंगे।



उक्त विधि अनुसार बिन्दु (23, 12) को बिन्दु (20, 0) एवं बिन्दु (41, 4) को बिन्दु (44, 0) से मिलाकर अभीष्ट बारम्बारता बहुभुज प्राप्त करते है।

प्रश्नावली 15.3

1. एक संगठन ने पूरे विश्व में 15–44 (वर्षों में) की आयु वाली महिलाओं में बीमारी और मत्यु के कारणों का पता लगाने के लिए किए गए सर्वेक्षण से निम्नलिखित आँकड़े (% में) प्राप्त किए:

सारणी–17

क्र. सं.	कारण	महिला मत्यु दर (%)
1.	जनन स्वास्थ्य अवस्था	31.8
2.	तंत्रिका मनोविकारी अवस्था	25.4
3.	क्षति	12.4
4.	हृदय वाहिका अवस्था	4.3
5.	श्वसन अवस्था	4.1
6.	अन्य कारण	22.0

(i) उपर्युक्त सूचनाओं को दण्ड आलेख से व्यक्त करें।

(ii) कौनसी अवस्था पूरे विश्व की महिलाओं के खराब स्वास्थ्य और मृत्यु का बड़ा कारण है?

2. भारतीय समाज के विभिन्न क्षेत्रों में प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की (निकटतम दस तक की) संख्या के आँकड़े नीचे दिए दिए गए है

सारणी–18

क्र. सं.	क्षेत्र	प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की संख्या
1.	अनुसूचित जाति	940
2.	अनुसूचित जनजाति	970
3.	गैर अनूसूचित जाति/जनजाति	920
4.	पिछडेद्य जिले	950
5.	गौर पिछड़े जिले	920
6.	ग्रामीण	930
7.	शहरी	910

(i) उपर्युक्त सूचनाओं को दण्ड आलेख से व्यक्त करें।

(ii) इस आलेख से कौन–कौन से निष्कर्ष निकाल सकते है चर्चा करें।

3. एक राज्य के विधानसभा चुनाव में विभिन्न पार्टियों द्वारा जीती गई सीटों के परिणाम नीचे दिए गए है:

राजनैतिक पार्टी	A	B	C	D	E	F
जीती गई सीटें	75	55	37	29	10	37

(i) मतदान के परिणामों को निरूपित करने वाला एक दण्ड आलेख खींचिए।

(ii) किस पार्टी ने अधिकतम सीटें जीती हैं?

निम्न बारम्बारता सारणियों के आयत चित्र बनाइए

(प्रश्न 4 से 8 तक)

सारणी–20

4.

वर्ग	0 — 5	5 — 10	10 — 15	15 — 20	20 — 25
बारम्बारता	18	15	14	8	10

सारणी–21

5.

वर्ग	0 — 20	20 — 40	40 — 60	60 — 80	80 — 100
बारम्बारता	5	6	12	4	3

सारणी–22

6.

वर्ग	3 — 6	6 — 12	12 — 13	13 — 14	14 — 15
बारम्बारता	150	420	100	110	50

सारणी–23

7.

वर्ग	5 — 9	10 — 14	15 — 19	20 — 24
बारम्बारता	3	5	8	2

सारणी–24

8.

वर्ग	8	14	20	26	32
बारम्बारता	10	15	25	9	6

9. निम्न बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र की सहायता से बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए।

सारणी–25

वर्ग अंतराल	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35
बारम्बारता	1	2	4	6	5	3	2

10. निम्न बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र की सहायता से बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए। अधिकतम अंक 10 ही है।

सारणी–26

प्राप्तांक	0 — 2	2 — 4	4 — 6	6 — 8	8 — 10
विद्यार्थियों की संख्या	7	8	4	9	2

11. निम्न बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए।

सारणी—27

विचर x	5	10	15	20	25	30
बारम्बारता f	2	6	4	1	5	2

12. निम्न बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए।

सारणी—28

उत्पादन (टनों में)	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70
बारम्बारता	8	18	23	37	47	26	16

केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापः

इस अध्याय में अब तक हमने बारम्बारता बंटन सारणियों, दण्ड आलेखों, आयत चित्रों और बारम्बारता बहुभुजों की सहायता से आँकड़ों को विभिन्न रूपों में प्रस्तुत किया है। इन आँकड़ों को अर्थपूर्ण बनाने के लिए हमें सदैव ही सभी आँकड़ों का अध्ययन करने की आवश्यकता होती है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों या औसतों की सहायता से ऐसा किया जा सकता है।

एक ऐसी स्थिति लीजिए जहाँ दो छात्रों प्रवीण और आकाश को उनकी परीक्षा कॉपियाँ दी गई है। परीक्षा में 10—10 अंकों के पाँच प्रश्न थे। इस परीक्षा में उनके प्राप्तांक ये थेः

सारणी—29

प्रश्न की क्रम संख्या	1	2	3	4	5
प्रवीण के प्राप्तांक	10	8	9	8	7
आकाश के प्राप्तांक	4	7	10	10	10

परीक्षा की कॉपियाँ प्राप्त होने पर दोनों के औसत प्राप्तांक थे

प्रवीण के औसत प्राप्तांक $= \frac{42}{5} = 8.4$

आकाश के औसत प्राप्तांक $= \frac{41}{5} = 8.2$

क्योंकि प्रवीण का औसत प्राप्तांक आकाश के औसत प्राप्तांक से अधिक था, इसलिए प्रवीण का कहना है कि उसका प्रदर्शन अच्छा रहा है। परन्तु आकाश इससे सहमत नहीं था। उसने दोनों के प्राप्तांकों को आरोही क्रम में रखा और मध्य प्राप्तांक इस प्रकार प्राप्त किया।

सारणी—30

प्रवीण के प्राप्तांक	7	8	8	9	10
आकाश के प्राप्तांक	4	10	10	10	10

आकाश का कहना है कि उसका सबसे मध्य का प्राप्तांक 10 था, जो कि प्रवीण के सबसे मध्य के प्राप्तांक अर्थात् 8 से अधिक था इसलिए परीक्षा में उसके प्रदर्शन को उत्तम माना जाना चाहिए।

परन्तु प्रवीण उसके तर्क से सहमत नहीं था। प्रवीण को अपने कथन से सहमत कराने हेतु

आकाश ने एक अन्य युक्ति अपनाई। उसने बताया कि उसने 10 अंक तीन बार प्राप्त किए हैं जबकि प्रवीण ने केवल एक बार प्राप्त किए है। अतः परीक्षा में उसका प्रदर्शन अच्छा रहा है।

इन दोनों के विवाद को सुलझाने हेतु उनके द्वारा अपनाए गए तीन मापों को देखें और पता लगाएँ कि इन तीनों मापों में से कौन सा माप निर्णायक सिद्ध होता है?

पहली स्थिति में प्रवीण ने जो औसत प्राप्तांक प्राप्त किया था वह 'माध्य' (mean) है। मध्य प्राप्तांक जिसको आकाश ने अपने तर्क में प्रयोग किया था वह 'माध्यक' (median) है। अपनी दूसरी युक्ति में आकाश ने अधिक बार अधिक अंक प्राप्त करने की बात कही थी वह 'बहुलक' (mode) है।

आइए, पहले हम माध्य पर विस्तार से चर्चा करेंगे।

अनेक प्रेक्षणों का माध्य (या औसत) सभी प्रेक्षणों के मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देने से प्राप्त होता है। इसे प्रतीक $\bar{x}$ से जिसे x दण्ड (x bar) पढ़ा जाता है प्रकट किया जाता है।

उदाहरण 11: व्यक्तियों की दैनिक आय क्रमशः 250 रु. 200 रु. 225 रु. 300 रु 275 रु. है इनका माध्य ज्ञात करो।

हलः प्रेक्षणों का माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$

$$= \frac{250 + 200 + 225 + 300 + 275}{5} = \frac{1250}{5} = 250 \text{ रु.}$$

अतः 5 व्यक्तियों की औसत आय 250 रु. है।

अब 30 व्यक्तियों की आय का माध्य ज्ञात करने के लिए हमें $x_1 + x_2 + x_3 ... + x_{30}$ लिखना होगा, जो कठिन कार्य है हम संकलन (summation) के लिए प्रतीक Σ का प्रयोग करते हैं। अतः $x_1 + x_2 + x_3 ... + x_{30}$ के स्थान पर $\sum_{j=1}^{30} x_j$ जिसे x_j का योग पढ़ा जाता है जबकि j का मान 1 से 30 तक विचरण करता है।

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{30} x_j}{30}$$

इसी प्रकार यदि प्रेक्षणों की संख्या n हो तो $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_j}{n}$

माध्यक– दिए हुए प्रेक्षणों का वह मान होता है जो इसे ठीक–ठीक दो भागों में विभक्त कर देता है। अतः जब आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में लिखते हैं, तब अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक इस प्रकार परिकलित किया जाता हैः

(i) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) विषम होती है जब माध्यक $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान होता है।

उदाहरण के लिए यदि $n=13$ है तो $\left(\frac{13+1}{2}\right)$ वें अर्थात 7 वें प्रेक्षण का मान माध्यक होगा।

(ii) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) सम होती है तब माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षण का माध्य होता है। जैसे– यदि $n=16$ है तो $\left(\frac{16}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य अर्थात् 8वें और 9वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य ही माध्यक होगा।

उदाहरण 12: एक कक्षा के 9 विद्यार्थियों की लम्बाइयाँ (से.मी.) ये हैं:

155	160	145	149	150	147	152	144	148

इन आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करो।

हलः सर्वप्रथम हम इन आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखते हैं।

144	145	147	148	149	150	152	155	160

क्योंकि विद्यार्थियों की संख्या 9 है अर्थात् विषम है इसलिए हम $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें $=\left(\frac{9+1}{2}\right)$ वें =5 वें विद्यार्थी की लम्बाई जो 149 सेमी है ज्ञात करके माध्यक प्राप्त करते हैं। अतः माध्यक =149 से.मी.

उदाहरण 13: कबड्डी की एक टीम द्वारा अनेक मैचों में प्राप्त किए गए अंक इस प्रकार हैं

17	2	7	27	15	5	14	8	10	24
48	10	8	7	18	28				

टीम द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हलः अंकों को आरोही क्रम में लिखने पर

2	5	7	7	8	8	10	10	14	15
17	18	24	27	28	48				

यहाँ 16 पद हैं जो कि सम संख्या है। अतः $\left(\frac{16}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ वें अर्थात् 8 वें और 9 वें पद हैं।

अतः 8 वें और 9 वें पद के मानों का माध्य ही माध्यक होगा।

इसलिए माध्यक $=\frac{10+14}{2}=\frac{24}{2}=12$

अतः कबड्डी टीम द्वारा प्राप्त किए गए माध्यक अंक 12 हैं।

बहुलकः प्रेक्षण का वह मान होता है जो बार–बार घटित होता रहता है अर्थात् अधिकतम बारम्बारता वाले प्रेक्षण को बहुलक कहा जाता है।

रेडिमेड व जूता उद्योग केन्द्रीय प्रवृत्ति के इस माप का काफी प्रयोग करते हैं। बहुलक की सहायता से ये उद्योग निर्णय लेते हैं कि किस माप का उत्पादन बढ़ाना चाहिए।

उदाहरण 14: 20 विद्यार्थियों द्वारा (10 में से) प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

हल: आँकड़ों का आरोही क्रम में लिखने पर

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10

यहाँ 9 सबसे अधिक बार अर्थात् चार बार आया है।

अत: बहुलक 9 है।

प्रश्नावली 15.4

1. एक टीम ने फुटबाल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए:

   2 3 4 5 0 1 3 3 4 3

   इन गोलों का माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात करो।

2. गणित की परीक्षा में 15 छात्रों ने (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किए:

   41 39 48 52 46 62 54 40 96 52
   98 40 42 52 60

   इन आँकड़ों के माध्य, माध्यक और बहुक ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यस्थित किया गया है। यदि आँकड़ों का माध्यक 63 हो तो x का मान ज्ञात करो:

   29 32 48 50 x $x+2$ 72 78 84 95

4. आँकड़ों 14 25 14 28 18 17 18 14 23
   22 14 18 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

5. निम्न सारणी से एक फैक्ट्री में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए।

सारणी–31

वेतन (रुपयो में)	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
कर्मचारियों की संख्या	16	12	10	8	6	4	3	1

विविध प्रश्नमाला 15

1. बंटन 5, 5, 6, 4, 9, 5, 3, 2, 7, 6, 3, 8, 4 में वर्ग अंतराल 3 — 5 की बारम्बारता है:

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 ( )

2. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का परिसर होगा

3.2 2.8 3.1 2.1 3.2 2.4 2.1 2.8 2.7 2.7

(A) 2.7 (B) 3.1 (C) 2.4 (D) 1.1 ( )

3. निम्न बारम्बारता बंटन में 25 वर्ष से कम आयु के विद्यार्थियों की संख्या है

आयु (वर्षों में)	5 — 10	10 — 15	15 — 20	20 — 25	25 — 30
विद्यार्थियों की संख्या	3	6	8	8	2

(A) 8 (B) 16 (C) 9 (D) 25 ( )

4. दण्ड आलेख में आयत की ऊँचाई होती है

(A) वर्ग की आवृत्ति के व्युत्क्रमानुपात में (B) वर्ग की आवृत्ति के समानुपात में

(C) वर्ग अंतराल के समानुपात में (D) वर्ग अंतराल के व्युत्क्रमानुपात में ( )

5. विद्यालय की किसी कक्षा के परीक्षा परिणाम का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है

(A) वृत्ताकार लेखाचित्र से (B) दण्ड लेखाचित्र से

(C) रैखिक लेखाचित्र से (D) उपर्युक्त सभी से ( )

6. बंटन 6, 1, 2, 3, 9, 8, 3, 4, 8, 2, 3 का परिसर (परास) होगा

(A) 4 (B) 8 (C) 7 (D) 6 ( )

7. यदि विचर का बंटन 5, 1, 5, 2, 3, 6, 5, 4 हो तो विचर 5 की बारम्बारता होगी

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 ( )

8. 11, 2, 7, 8, 9, 3, 5 की माध्यक होगी

(A) 7 (B) 9 (C) 5 (D) 11 ( )

9. 15, 0, 10, 5 का माध्य होगा

(A) 15 (B) 10 (C) 5 (D) 7.5 ( )

10. 4, 3, 4, 5, 4, 2, 4, 1 में बहुलक होगा

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 4 ( )

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

11. बंटन 3, 2, 0, 10, 8, 5, 13, 5, 6, 6, 0, 14 से वर्ग अंतराल 0 — 5 की बारम्बारता लिखिए।

12. यदि 5, 8, 4, x, 6, 9 अंकों का माध्य 7 हो तो x का मान ज्ञात करो।

13. परास किसे कहते हैं?

14. आयत चित्र किसे कहते हैं?

15. 9, 7, 9, 8, 3, 9, 8, 3, 5, 7, 5, 3 की बारम्बारता सारणी बनाइए।

16. किसी बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य 15 है तथा $\sum f = 20$ हो तो $\sum f x$ का मान लिखो।

17. बंटन 5, 2, 3, 7, 5, 4, 3, 2, 1 का माध्यक लिखिए।

18. बंटन 12, 1, 6, 4, 10, 8, 1, 4 का माध्यक ज्ञात करो।

19. बंटन 4, 3, 4, 1, 2, 4, 7, 5, 3 का बहुलक लिखिए।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. आँकड़े मुख्यतः दो प्रकार के होते हैं: (i) प्राथमिक (ii) द्वितीयक
2. प्राथमिक आँकड़ों के संकलन की निम्न विधियाँ हैं:

   (i) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अन्वेषण से (ii) परोक्ष अन्वेषण से
3. परोक्ष आँकड़े निम्न प्रकार प्राप्त करते हैं–

   (i) प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर।

   (ii) सूचकों द्वारा प्रश्नावलियाँ भरवाकर।

   (iii) स्थानीय स्रोतों या संवाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति।

   (iv) विशेषज्ञों के माध्यम से परोक्ष मौखिक अन्वेषण द्वारा।
4. ऐसे आँकड़ें जो पहले से ही किसी व्यक्ति या संस्था द्वारा किसी विशिष्ट उद्देश्य के लिए एकत्रित किए गए हों तथा इसका उपयोग किसी अन्य अन्वेषक द्वारा हो तो इस प्रकार के आँकड़े द्वितीयक आँकड़े कहलाते है।
5. द्वितीयक आँकड़े प्रकाशित या अप्रकाशित हो सकते है।

6. प्रकाशित आँकड़ों के मुख्य स्रोत निम्न है

(i) अन्तर्राष्ट्रीय संगठन (ii) सरकारी प्रकाशन (iii) अर्द्धसरकारी प्रकाशन (iv) परिषदों एवं व्यापारिक संगठनों के प्रकाशन (v) अनुसंधान संस्थानों के प्रकाशन (vi) पत्र–पत्रिकाएँ (vii) शोधार्थियों के प्रकाशित स्रोत

7. बारम्बारता बंटन में प्राप्तांकों के लिए सामान्यतः विचर (x) का प्रयोग किया जाता है।

8. विचर (x) के अधिकतम एवं न्यूनतम मान के अंतर को परास कहते हैं।

9. किसी वर्ग के निम्नतम एवं उच्चतम मान उस वर्ग की निम्न तथा ऊपरी सीमाएँ कहलाती हैं।

10. किसी वर्ग की ऊपरी तथा निम्न सीमाओं का औसत वर्ग का मध्यमान या वर्ग चिन्ह (Class mark) कहलाता है। इसे x से व्यक्त करते हैं।

11. सांख्यिकी विश्लेषण में प्रमुख रूप से काम आने वाले आलेख निम्न प्रकार हैं–

(क) दण्ड आलेख (ख) आयत चित्र (ग) बारम्बारता बहुभुज

12. असमूहित आँकड़ों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन माप है

(i) <u>माध्यः</u> प्रेक्षणों के सभी मानों के योग में प्रेक्षणों की कुल संख्या का भाग देने पर माध्य प्राप्त होता है। $\bar{x} = \dfrac{\sum f x}{\sum f}$

(ii) <u>माध्यकः</u> सबसे मध्य के प्रेक्षण को माध्यक कहते हैं।

(iii) <u>बहुलकः</u> सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को बहुलक कहते है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 15.1

1. प्राथमिक आँकड़े:– अन्वेषक द्वारा अपने प्रयोग के लिए नए सिरे से पहली बार जिन आँकड़ों को एकत्रित किया जाता है उन्हें प्राथमिक आँकड़े कहते हैं।

द्वितीयक आँकड़े:– वे आँकड़े जिनका संकलन पहले से किया हुआ हो और प्रकाशित या अप्रकाशित स्थिति में हो, द्वितीयक आँकड़े कहलाते हैं।

2. पृष्ठ 1 व 2 पर उल्लेखित हैं।

प्रश्नमाला 15.2

1.

विचर x	33	34	35	36	37	38
गणना चिह्न	|||	𝍸|||	𝍸||	||||	||||	||||
बारम्बारता (f)	3	8	7	4	4	4

2.

विचर	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
गणना चिह्न	|||	𝍸	𝍸	𝍸|	–	𝍸|			||			||
बारम्बारता (f)	3	5	5	6	–	5	1	2	1	2

3.

सिरों की संख्या	गणना चिह्न	बारम्बारता (f)
0	𝍸|	6
1	𝍸𝍸	10

2	$\cancel{\|\|\|\|}\,\|\|\|\|$	9
3	$\cancel{\|\|\|\|}$	5
योग		30

4.

रक्त समूह	गणना चिह्न	छात्रों की संख्या
A	$\cancel{\|\|\|\|}\,\|\|\|\|$	9
B	$\cancel{\|\|\|\|}\,\|$	6
O	$\cancel{\|\|\|\|}\,\cancel{\|\|\|\|}\,\|\|$	12
AB	$\|\|\|$	3
कुल योग		30

5.

वर्ग	गणना चिह्न	बारम्बारता
0 — 10	$\cancel{\|\|\|\|}$	5
10 — 20	$\cancel{\|\|\|\|}\,\|$	6
20 — 30	$\cancel{\|\|\|\|}\,\|\|\|\|$	9
30 — 40	$\cancel{\|\|\|\|}\,\|$	6
40 — 50	$\|\|\|\|$	4

6.

वर्ग	गणना चिह्न	बारम्बारता (***f***)
0 — 5	$\|$	1
5 — 10	$\|\|\|$	3
10 — 15	$\|\|\|\|$	4
15 — 20	$\|\|\|\|$	4
20 — 25	$\|$	1
25 — 30	$\|\|$	2
30 — 35	$\|$	1
35 — 40	$\|$	1
40 — 45	$\|\|\|$	3

7. (i)

अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	कुल योग
बारम्बारता	2	5	5	8	4	5	4	4	5	8	50

(ii) सबसे अधिक बार आने वाले अंक 3 और 9 हैं। सबसे कम बार आने वाला अंक 0 है।

8. दूरी (किलो मीटर में) | गणना चिह्न | बारम्बारता

दूरी (किलो मीटर में)	गणना चिह्न	बारम्बारता
0 — 5	$\cancel{\|\|\|\|}$	5
5 — 10	$\cancel{\|\|\|\|}\cancel{\|\|\|\|}\|$	11
10 — 15	$\cancel{\|\|\|\|}\cancel{\|\|\|\|}\|$	11
15 — 20	$\cancel{\|\|\|\|}\|\|\|\|$	9
20 — 25	$\|$	1
25 — 30	$\|$	1
30 — 35	$\|\|$	2
		40

9.

घण्टों की संख्या	बारम्बारता
0 — 5	10
5 — 10	13
10 — 15	5
15 — 20	2
कुल योग	30

(ii) 2 बच्चे

प्रश्नमाला 15.3

1. (ii) जनन स्वास्थ्य अवस्था
3. (ii) पार्टी A

प्रश्नमाला 15.4

1. माध्य = 2.8, माध्यिका = 3, बहुलक = 3
2. माध्य = 54.8, माध्यक = 52, बहुलक = 52
3. $x = 62$
4. 14
5. 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन रुपये 5083.33 है।

विविध प्रश्नमाला 15

1. (ख), 2. (घ), 3. (घ), 4. (ख), 5. (ख), 6. (ख),
7. (ग), 8. (क), 9. (घ), 10. (घ), 11. –4, 12. –10,
13. विचर के अधिकतम तथा न्यूनतम मान के अंतर को परास कहते है।
14. आयत चित्र वर्गीकृत एवं सतत बारम्बारता बंटन का आयतीय निरूपण है।
15.

x	3	5	7	8	9
f	3	2	2	2	3

16. 300 17. 3 18. 5 19. 4

सड़क सुरक्षा शिक्षा

प्रतिशत

उद्देश्य : प्राणघातक दुर्घटनाओं की संख्या से प्रतिशत का सम्प्रत्यय (concept) स्पष्ट करना।

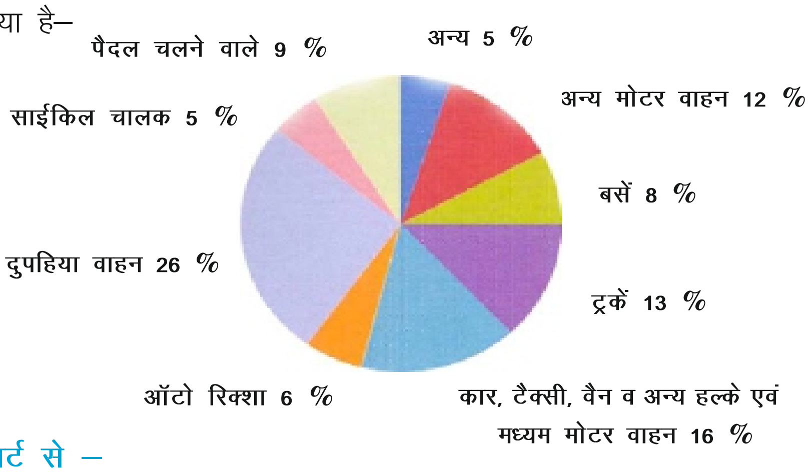
विषय वस्तु : वर्ष 2009 में कुल 7516 सड़क दुर्घटनाएं अभिलिखित की गई थी, इनमें से 2325 व्यक्ति काल के ग्रास बने और 6936 व्यक्ति घायल हुए। सड़क दुर्घटनाओं में मारे गए व्यक्तियों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए। प्राणघातक दुर्घटनाओं में से पैदल चलने वाले 1170 मारे गये और 2677 घायल हुए। पैदल चलने वाले व्यक्तियों के प्रतिशत की गणना कीजिए जो –

(अ) मारे गए (ब) घायल हुए

सड़कों पर पैदल चलने वाले व्यक्ति सबसे ज्यादा घायल होने वाले होते हैं। क्या आप उनके लिए सुरक्षा के कुछ उपाय सुझा सकते हैं? वर्ष 2009 में 691 दुपहिया वाहन चालक मारे गये थे और 2358 दुपहिया वाहन चालक व्यक्ति घायल हुए। मारे गये और घायल दुपहिया वाहन चालकों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए। क्या आप इन चालकों के लिए सड़क सुरक्षा के कुछ उपाय बता सकते हैं?

वर्ष 2009 में 1993 पुरुष और 158 महिलाएं सड़क दुर्घटनाओं में मारी गई थीं, ज्ञात कीजिए कितने प्रतिशत अधिक पुरुष मारे गये थे? यदि दिल्ली की सड़कों पर 174 बच्चे दुर्घटना में मारे गए, तो दुर्घटनाओं में मारे गये बच्चों का प्रतिशत क्या है?

गतिविधि : सड़क दुर्घटनाओं में मारे गये व्यक्तियों का विस्तृत विवरण पाई चार्ट के रूप में दिया गया है–



उक्त चार्ट से –

1. प्रत्येक प्रतिशत को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए।
2. यदि कुल 1,33,938 व्यक्ति मारे गए तो गणना कीजिए कि कितने पैदल चलने वाले व्यक्ति मारे गए?

वृत्त

उद्देश्य : वृत्ताकार सड़क–संकेत आदेशात्मक होते हैं। सामान्य वृत्ताकार सड़क–संकेतों की पहचान।

विषय सूची : अब तक आपने अध्ययन किया है कि –

– त्रिभुजाकार संकेत चेतावनी देते हैं

– आयताकार संकेत सूचना देते हैं

अब हम वृत्त के बारे में अध्ययन करते हैं। एक वृत्ताकार यातायात संकेत हमें आदेश देता है।

नीला वृत्त सकारात्मक निर्देश देता है। ऐसे यातायात संकेत का एक चित्र बनाएं।

लाल वृत्त निषेधात्मक निर्देश देता है। ऐसे यातायात संकेत का एक चित्र बनाएं।

दो यातायात संकेतों का पता लगाएं, जो इन नियमों का पालन नहीं करते हैं।

गतिविधि : अपने मौहल्ले के सभी यातायात संकेतों का पता लगाएं और देखें कि इनमें से कितने प्रतिशत यातायात संकेत आदेश देते हैं?

सांख्यिकी

उद्देश्य : सड़क सम्बंधी आकड़ों का चित्रात्मक प्रदर्शन करना।

विषय सूची : 'दण्ड आरेख' संख्यात्मक आकड़ों का चित्रात्मक प्रदर्शन है।

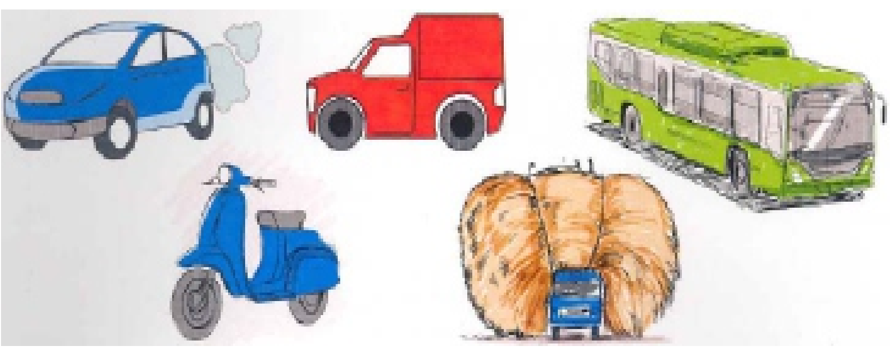
अभ्यास के लिए प्रश्न :

वर्ष 1980 और 1990 में भिन्न–भिन्न वाहनों के प्रतिशत में आंकड़े नीचे दिये गये हैं।

वाहन	1980	1990
1. प्राइवेट कार	22.48	21.74
2. मोटरसाईकिल / स्कूटर	64.13	67.50
3. टैक्सी	1.20	0.58
4. एम.सी.आर. / टी.एस.आर	3.82	3.51
5. मालवाहक वाहन	6.85	5.61
6. बसें	1.52	1.06

उपर्युक्त आंकड़ों का एक 'दण्ड आरेख' बनाएं।

1. वर्ष 1980 और 1990 में टैक्सियों की प्रतिशतता की तुलना कीजिए।
2. वर्ष 1990 में प्राइवेट कारों और टैक्सियों के प्रतिशत में क्या अन्तर है?



चतुर्भुज

उद्देश्य : सड़क संकेतों का उपयोग करते हुए चतुर्भुजों के क्षेत्रफल का निर्धारण

विषय सूची : छात्रों को चतुर्भुजों का ज्ञान कराया जाना है, जिससे वे वर्ग, आयत, समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज आदि में विभेद कर सकें, यातायात संकेत विभिन्न आकृतियों में होते हैं।

आयत का आकार 20″ × 18″ होता है।

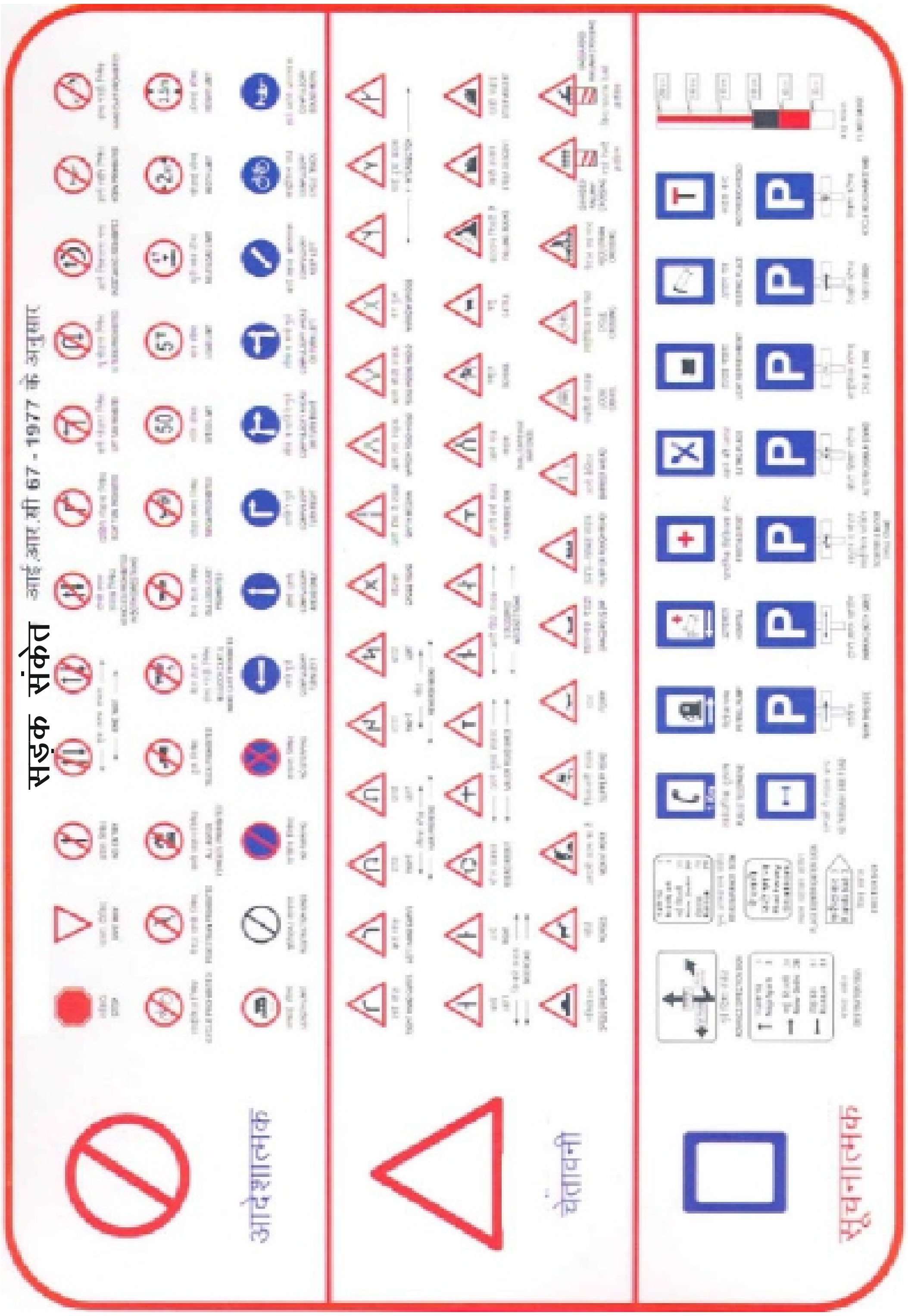
प्रश्न–1 दस रुपये प्रति वर्ग इंच की दर से दो आयताकार बोर्ड बनाने का मूल्य ज्ञात कीजिए। नीले रंग का आयताकार सूचनात्मक संकतपट्ट नीचे दिया गया है–

प्रश्न–2 बोर्ड में एक सफेद वर्ग 20″ × 20″ का है जिसमें रेड–क्रास का चिन्ह्न अंकित है। आयताकार बोर्ड का आकार 30″ × 25″ है। नीले क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

गतिविधि :

किसी यातायात प्रशिक्षण संस्थान के भ्रमण पर जाएं और वहाँ पर सभी आकार के यातायात संकेतों का अवलोकन करें।

इन संकेतों को एक चार्ट पेपर पर बनाइए और बतायें कि इनमें से कौन से वर्ग हैं, और कौन से आयत हैं? यह भी बताएं कि कौन से समान्तर चतुर्भुज हैं?


सड़क संकेत
आई आर सी 67 - 1977 के अनुसार
आदेशात्मक
चेतावनी
सूचनात्मक

प्रायिकता

उद्देश्य : बच्चों को प्रायिकता का ज्ञान कराया जाएगा।

P (e) = अनुकूल स्थितियों की संख्या/ कुल स्थितियाँ

अभ्यास :

एक व्यस्त चौराहे पर ट्रैफिक लाईट्स 90 सैकण्ड तक हरी, पीली या लाल रहती है। कार्यालय जाते समय सुरेश ने देखा कि सिग्नल कभी लाल, कभी हरा और कभी पीला था। उसने इसे 10 दिनों तक नोट किया एवं निम्नानुसार प्राप्त किया–

संकेत	लाल	पीला	हरा
10	3	3	4

प्रश्न–1 लाल लाईट पार करते समय प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि सुरेश को प्राप्त होने वाली लाईट

(1) हरी है

(2) लाल है

प्रश्न–2 यातायात लाईट्स का क्या क्रम होता है?

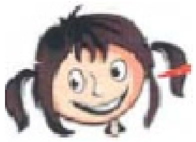
आँकड़े

नियम और कानून सड़क सुरक्षा प्रणाली को जानने में हमारी सहायता करते हैं। चालक के लाइसेंस प्राप्त करने की विशिष्ट योग्यता 18 वर्ष है और बच्चों को यह कानून नहीं तोड़ना चाहिए। वर्ष 2009 में 500 से अधिक अवयस्कों को दोषारोपित किया गया था। ज्ञात करो कि आपकी कक्षा में कितने छात्र वाहन चलाते हैं? वाहन चलाने वाले छात्रों का सम्पूर्ण कक्षा के छात्रों की तुलना में कितना भाग है? अन्य कक्षा के छात्रों के साथ इसकी तुलना करें और एक 'दण्ड आरेख' (Bar diagram) बनाएं।

अवयस्कों के वाहन चलाने पर रु. 300 का जुर्माना लगता है और यदि एक अवयस्क वाहन चलाते हुए पकड़ा जाता है तो वाहन मालिक को रु. 1000 का जुर्माना हो सकता है। यदि कम उम्र के चालक से दुर्घटना हो जाए तो आई.पी.सी. की धारा 304 ए या आई.पी.सी. 337 में इस अपराध के लिए उसको बाल सुधार गृह भेजा जा सकता है।

वाहन चालकों को सुरक्षित यात्रा करने के लिए सीट बैल्ट का प्रयोग करना चाहिए। दिल्ली में हेलमेट नहीं पहनने पर 2,55,686 व्यक्तियों को दोषारोपित किया गया था। इस उल्लंघन के जुर्माने को ज्ञात कीजिए। इस वर्ष इस अपराध के लिए कुल कितने चालान एकत्र हुए?

सीट बैल्ट नहीं पहनने के लिए दिल्ली में 11,084 व्यक्ति दोषारोपित हुए। इस उल्लंघन के लिए जुर्माना राशि का पता लगाएँ। इस वर्ष इस अपराध के लिए कुल कितने चालान संकलित किए गए?



मोटर वाहन एक्ट की धारा 177 के अन्तर्गत चालक के सीट बैल्ट नहीं पहनने पर रु. 100 तक का जुर्माना वसूला जा सकता है।

घातक दुर्घटनाओं का एक मुख्य कारण शराब पीकर वाहन चलाना है। वर्ष 2008 में 8296 और वर्ष 2009 में 12,784 व्यक्ति दिल्ली में दोषारोपित हुए। ऐसे मामलों की बढ़ती संख्या को ज्ञात कीजिए।

मोटर वाहन एक्ट की धारा 185 में शराबी वाहन चालक पर रु. 2,000 तक जुर्माना या जेल हो सकती है जिसकी अवधि छह माह तक बढ़ाई जा सकती है। तीन वर्ष की अवधि में पुनः होने वाले अपराध पर जेल की सजा दो वर्ष तक बढ़ाई जा सकती है और जुर्माना रु. 3,000 तक किया जा सकता है।