कक्षा
11

गणित

कक्षा 11
गणित

गणित

कक्षा–11

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड राजस्थान, अजमेर

पाठ्य पुस्तक निर्माण समिति

पुस्तक - गणित कक्षा - 11

संयोजक :– डॉ. महेन्द्र कुमार गोखरु, गणित विभाग
सम्राट पृथ्वीराज चौहान राजकीय महाविद्यालय, अजमेर

लेखकगण :–
1. डॉ. नारायण लाल जोशी, सहायक निदेशक
   उच्च शिक्षा उदयपुर संभाग, उदयपुर
2. डॉ. सुशील कुमार बिस्सु, व्याख्याता
   सम्राट पृथ्वीराज चौहान राजकीय महाविद्यालय, अजमेर
3. डॉ. शशिकान्त, गणित विभाग
   राजकीय डूँगर महाविद्यालय, बीकानेर
4. जयनारायण गुप्ता, से.नि. सहायक निदेशक
   कार्यालय उप निदेशक, मा.शि. अजमेर मण्डल, अजमेर
5. शम्भू सिंह लाम्बा, प्रधानाचार्य
   राजकीय उच्च माध्यमिक विद्यालय, तोपदड़ा, अजमेर

प्रस्तावना

यह पुस्तक माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान के कक्षा XI के नवीन पाठ्यक्रम के अनुसार लिखी गई है। पुस्तक को प्रस्तुत करते समय नवीन पाठ्यक्रम की मूल भावना को ध्यान में रखा गया है। विषय वस्तु को सरल एवं स्पष्ट भाषा में प्रस्तुत करने का भरसक प्रयास किया गया है। विभिन्न संकल्पनाओं का विवेचन पर्याप्त विस्तार से किया गया है। हिन्दी भाषा के साथ जहां आवश्यक हो अंग्रेजी शब्दों का प्रयोग भी किया गया है।

विद्यार्थियों के हितों को ध्यान में रखकर पर्याप्त संख्या में दृष्टांतीय उदाहरण दिये गये हैं। प्रश्नमाला में भी पर्याप्त मात्रा में सभी प्रकार के प्रश्नों का समावेश किया गया है तथा प्रत्येक अध्याय के अन्त में मुख्य बिन्दु के रूप में अध्याय का सारांश दिया गया है जो अध्याय को दोहराने में विद्यार्थियों को अत्यन्त सहायक सिद्ध होगा।

आशा है प्रस्तुत पुस्तक विद्यार्थियों के लिए उपयोगी एवं लाभप्रद सिद्ध होगी। विद्यार्थियों, शिक्षकों तथा समीक्षकों से अनुरोध है कि अपनी टिप्पणी, सुझाव तथा पुस्तक में रही किसी भी कमी से लेखकों को अवगत कराते रहें ताकि पुस्तक के स्तर में वांछित सुधार किया जा सके।

लेखकगण

अनुक्रमणिका

1

समुच्चय सिद्धान्त
(Sets Theory)

1.01 प्रस्तावना (Introduction)

विश्व को भारतीय गणितज्ञों का सबसे बडा योगदान संख्याओं का आविष्कार, उनकी गणना तथा दशमलव पद्धति है। मूलतः संख्या ही गणित का आधार है। सबसे पहले गणना के अंक, जिसे प्राकृत संख्या कहते है, का आविष्कार हुआ। इसके क्रमित विस्तार से पूर्ण संख्याएं, पूर्णांक, परिमेय एवं अपरिमेय संख्याएं, वास्तविक संख्याएें, संमिश्र संख्याएें आयी। दशमलव पद्धति में भी सबसे अधिक महत्व शून्य का है। विज्ञान मे विशेषतः संगणक क्षेत्र में आज हो रही प्रगति की कल्पना भी शून्य के बिना नितान्त असम्भव है।

इस अध्याय की शुरूआत हम गणित की आधारभूत परिकल्पना, समुच्चय से करते है, जिसका प्रयोग गणित की प्रायः सभी शाखाओं में होता है। समुच्चय का प्रयोग हम आगे आने वाले अध्याय मे सम्बन्ध एवं फलन को परिभाषित करने के लिए भी करेंगे।

1.02 समुच्चय एवं उसका निरूपण (Set and its representation)

दैनिक जीवन में अनुभव किए जाने वाले कुछ संग्रहों पर विचार कीजिए–

(i) ताश की गड्डी।
(ii) क्रिकेट टीम।
(iii) भारत की नारियॉ।
(iv) कक्षा में लम्बे विद्यार्थी।
(v) प्राकृत संख्याओं का संग्रह।
(vi) वास्तविक संख्याओं का संग्रह।

इन संग्रहों मे (iv) को छोड कर अन्य सभी संग्रहों में हम निश्चित रूप से यह बताने में सक्षम है कि एक निश्चित वस्तु या अवयव इस संग्रह में हैं अथवा नहीं। परन्तु संग्रह (iv) में लम्बे होने का मापदण्ड अलग–अलग व्यक्तियों के लिए अलग–अलग हो सकता है। अतः यह संग्रह सुपरिभाषित नहीं है।

परिभाषा : वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते है।

यहां पर हमे निम्नलिखित बिन्दुओं पर ध्यान देना चाहिए–

(i) समुच्चय के लिए वस्तुएें, अवयव तथा सदस्य पर्यायवाची शब्द है।
(ii) समुच्चय को प्रायः अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से निरूपित करते है, जैसे A,B,C,X,Y,Z इत्यादि।
(iii) समुच्चय के अवयवों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों द्वारा प्रदर्शित करते है, जैसे a,b,c,x,y,z इत्यादि।

यदि a समुच्चय A का सदस्य है, तो इसे प्रतीकात्मक रूप से $a \in A$ लिखते हैं तथा इसे 'a **सदस्य है** A **का**' पढ़ते है, यहाँ $\in$ (epsilon) यूनानी प्रतीक है। यदि b समुच्चय A का सदस्य नही है तो इसे $b \notin A$ लिखते है तथा 'b **सदस्य नहीं है** A **का**' पढ़ते है। उपरोक्त उदाहरणानुसार, $2 \in N,\ 1\cdot5 \notin N$.

समुच्चय का निरूपण (Representation of a set)

समुच्चय का निरूपण दो प्रकार से किया जाता है–

1. सारणीबद्ध या रोस्टर रूप (Tabular or Roster Form)
2. समुच्चय निर्माण रूप (Set Builder Form)

1. सारणीबद्ध या रोस्टर रूप

इस विधि में सभी अवयवों को अर्धविराम द्वारा पृथक करते हुए बिना पुनरावृति के, मझले कोष्टक के भीतर लिखते हैं। जैसे दस से छोटी विषम प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को A द्वारा प्रदर्शित किया जाय तो–

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ तथा यहाँ } 3 \in A \text{ परन्तु } 4 \notin A$$

इसी प्रकार $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ एवं $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

अन्य उदाहरण :

(i) 32 को विभाजित करने वाली सभी प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को $\{1,2,4,8,16,32\}$ से

(ii) सप्ताह के दिनों के समुच्चय को
{सोमवार, मंगलवार, बुधवार, गुरूवार, शुक्रवार, शनिवार, रविवार} से,

(iii) अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों के समुच्चय को{a,e,i,o,u}से

(iv) classroom में प्रयुक्त अक्षरों के समुच्चय को {c,l,a,s,r,o,m} से निरूपित करते हैं।

टिप्पणी : यह ध्यान रखना चाहिए कि समुच्चय के रोस्टर रूप में लिखते समय किसी अवयव को सामान्यतः दोबारा नहीं लिखते हैं जैसा की उदाहरण (iv) से स्पष्ट है।

2. समुच्चय निर्माण रूप

समुच्चय निर्माण रूप में मझले कोष्ठक के अन्दर अवयवों को सूचीबद्ध करने के बजाय उनके गुणधर्म को लिखा जाता है। उपरोक्त अन्य उदाहरण (i) के समुच्चय को निम्नानुसार निरूपित करेंगे–

{ x : x , 32 को विभाजित करने वाली प्राकृत संख्या है} यहाँ मझले कोष्ठक के अन्दर लिखें विवरण को 'x, **इस प्रकार है कि x, 32 को विभाजित करने वाली एक प्राकृत संख्या है**,' पढ़ते हैं।

इसी प्रकार N = {x : x एक प्राकृत संख्या है} एवं Z = { x : x एक पूर्णांक है}

निम्न सारणी में समुच्चयों को दोनो ही रूप में निरूपित किया गया है।

सारणीबद्ध या रोस्टर रूप	समुच्चय निर्माण रूप
{1,2,3,6,7,14,21,42}	{x : x, 42 को विभाजित करने वाली एक प्राकृत संख्या}
{1,4,9,16}	{x : x, 25 से छोटी एक पूर्ण वर्ग प्राकृत संख्या है}
{a,e,i,o,u}	{x : x अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है }
{s,c,h,o,l}	{x : x, school में प्रयुक्त एक अक्षर है }
{4,5,6,7,8,9}	{x : x एक प्राकृत संख्या है तथा $3 < x < 10$}

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: समुच्चय $A = \{x : x$ एक धन पूर्णांक हैं और $x^2 < 40\}$

हल: क्योंकि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 ऐसे पूर्णांक हैं जिनका वर्ग 40 से कम है। अतः अभीष्ट समुच्चय $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

उदाहरण 2: समुच्चय A = { 1, 4, 9, 16, 25, … } को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

हल: यहाँ समुच्चय के अवयव सभी प्राकृत संख्याओं के वर्ग हैं अतः समुच्चय निर्माण रूप में निम्नानुसार लिखेंगे

A = {x : x एक प्राकृत संख्या का वर्ग है}

या $A = \{x : x = n^2, n \in N\}$

उदाहरण 3: समुच्चय $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$ को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

हल: यहाँ अंश एक प्राकृत संख्या है जो 1 से प्रारम्भ होकर उत्तरोत्तर 5 तक बढ़ती है तथा हर अंश से 1 अधिक है। अतः समुच्चय निर्माण रूप में निम्नानुसार लिखेंगे–

$$\left\{ x : x = \frac{n}{n+1}, n \in N \text{ तथा } 1 \le n \le 5 \right\}$$

1.03 विभिन्न प्रकार के समुच्चय (Different types of sets)

रिक्त समुच्चय (Empty or Null Set)

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए–

(i) A = {x : x एक प्राकृत संख्या इस प्रकार है कि $2 < x < 3$ }

(ii) B = {x : x एक प्राकृत संख्या इस प्रकार है कि $x^2 - 2 = 0$ }

(iii) C = {x : x एक 2 से अधिक अभाज्य सम संख्या है}

(iv) D = {x : x एक प्राकृत संख्या जिसका वर्ग 3 है}

ध्यानपूर्वक विचार करने पर हम देखते है कि वास्तविक रूप में इन समुच्चयों में कोई अवयव नहीं है। अतः इन्हें रिक्त समुच्चय कहते हैं।

परिभाषा : वह समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं हो, रिक्त समुच्चय कहलाता है। इसे **शून्य समुच्चय** भी कहते हैं क्योंकि इसमें अवयवों की संख्या शून्य होती है। रोस्टर रूप में इसे { } से दर्शाते हैं अर्थात मझले कोष्ठक में कुछ नहीं लिखते हैं तो वह रिक्त समुच्चय को प्रदर्शित करता है तथा अधिकांश लेखक इसे प्रतीक ϕ (फाई) से दर्शाते है।

एकल समुच्चय (Singleton set)

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए–

$A=\{2\}$, B = { x : x एक प्राकृत संख्या इस प्रकार है कि $x-5=0$ }, $C=\{\phi\}$, $D=\{x:3<x<5,\ x\in N\}$

उपरोक्त सभी समुच्चयो में अवयवों की संख्या 1 है, इस प्रकार के समुच्चय एकल समुच्चय कहलाते हैं।

परिभाषा : ऐसे समुच्चय जिनमें एक ही अवयव हो एकल समुच्चय कहलाते हैं।

परिमित और अपरिमित समुच्चय (Finite and infinite Sets)

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए–

A = {a,e, i,o,u}, B = {1, 4, 9, 16}, C = { } या ϕ

D= {मैदान में खेल रही आपके विद्यालय की फुटबाल टीम के सदस्य } तथा E= {x : x एक प्राकृत संख्या है }

यहाँ समुच्चय A, B, D मे अवयवों की संख्या परिमित है तथा C मे एक भी अवयव नहीं है अर्थात शून्य अवयव है, परन्तु E मे अवयवों की संख्या परिमित नहीं है।

परिभाषाः समुच्चय में यदि अवयवों की संख्या परिमित हों, तो वह समुच्चय,परिमित समुच्चय कहलाता है अन्यथा उसे अपरिमित समुच्चय कहते हैं।

किसी अपरिमित समुच्चय के सभी अवयवों को { } के भीतर लिखना संभव नहीं है। अपरिमित समुच्चय को रोस्टर रूप में प्रकट करने के लिए उसके कम से कम इतने अवयवों को लिखते है जिससे उस समुच्चय की संरचना स्पष्ट हो सके और इसके पश्चात् तीन क्रमवार बिन्दु लगाते हैं। सभी अपरिमित समुच्चयों का वर्णन रोस्टर रूप में नहीं किया जा सकता है। उदाहरण के लिए वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।

उपर्युक्त समुच्चयों में A, B, C तथा D परिमित समुच्चय है तथा E एक अपरिमित समुच्चय है। किसी समुच्चय A के लिए प्रतीक $n(A)$ समुच्चय A के कुल अवयवों की संख्या को दर्शाता है। उदाहरण के लिए–

$$n(A)=5,\ n(B)=4,\ n(C)=0,\ n(D)=11$$

क्योंकि E समुच्चय में अवयवों की संख्या अनन्त है अतः E एक अपरिमित समुच्चय है।

समान समुच्चय (Equal Sets)

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए –

A = { 0}, B = {$x:x-5=0$ }, C = {$x:x^2-25=0$},

D = {x : x <5 तथा $x>15$ }, E = {–5, 5 } तथा F = { } या ϕ

यहाँ A व B में अवयवों की संख्या समान है परन्तु अवयव अलग–अलग है। अतः समुच्चय A व B समान नहीं है, समुच्चय C को रोस्टर रूप में लिखने पर C = {–5,5 } प्राप्त होता है, अतः C तथा E के सभी अवयव समान है। अतः समुच्चय C एवं E समान है। पुनः D मे कोई अवयव नहीं होगा, क्योकि कोई भी संख्या x जो 5 से छोटी हो वह 15 से बड़ी नहीं हो सकती है अर्थात D एक रिक्त समुच्चय है अतः समुच्चय D एवं F समान है।

परिभाषाः दो समुच्चय A तथा B समान कहलाते हैं यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B में तथा समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A में हो।

यदि A व B समान समुच्चय हो तो इसे **A=B** से दर्शाते है तथा '**A समान है B के**' पढ़ते है। वस्तुतः यदि A=B हैं तो A व B के अवयव अक्षरशः समान होंगे। यदि A व B समान नहीं है तो इन्हें **असमान समुच्चय** कहते हैं जिसे $A\neq B$ से दर्शाते हैं।

टिप्पणीः यदि किसी समुच्चय के एक अथवा एक से अधिक अवयवों की पुनरावृत्ती होती है, तो समुच्चय बदलता नहीं है।

1.04 उपसमुच्चय (Subset)

निम्नलिखित समुच्चयो पर विचार कीजिए–

A = आपके विद्यालय के विज्ञान संकाय के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय।

B = आप विज्ञान के विद्यार्थी हैं तथा आपकी कक्षा के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय।

इसमें समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A का भी अवयव है। अतः कहा जा सकता है कि समुच्चय B, समुच्चय A का उपसमुच्चय है।

परिभाषाः यदि समुच्चय B का प्रत्येक अवयव, समुच्चय A का भी अवयव हैं, तो समुच्चय B, समुच्चय A का उपसमुच्चय कहलाता है। प्रतीकात्मक रूप से इसे $B \subset A$ से प्रकट किया जाता है तथा 'B उपसमुच्चय है A का' पढ़ा जाता है।

(i) परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का एक उपसमुच्चय है और इसे $Q \subset R$ लिखा जाता है।

(ii) माना कि A = { 1, 3, 5} तथा B = {x : x संख्या 6 से कम एक विषम प्राकृत संख्या है} तो $B \subset A$ तथा $A \subset B$, अतः A = B.

(iii) माना कि A = { a,e,i,o,u} तथा B = { a,b,c,d} तो A, B का उपसमुच्चय नहीं है तथा B भी A का उपसमुच्चय नहीं है।

(iv) सामान्य संकेतानुसार $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

अतः यदि $B \subset A$ तो $a \in B \Rightarrow a \in A$ अर्थात् उपसमुच्चय B का प्रत्येक अवयव निश्चित रूप से समुच्चय A का अवयव होता है। उदाहरण (i).

यदि $B \subset A$ तथा $A \subset B$ अर्थात् समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A का अवयव हो तथा समुच्चय A का भी प्रत्येक अवयव समुच्चय B का अवयव हो तो दोनों समुच्चय A तथा B समान समुच्चय होते है। उदाहरण (ii).

उपरोक्त परिभाषाओं तथा तथ्यों से निष्कर्ष निकलता हैं कि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय है अर्थात् $A \subset A$ क्योंकि रिक्त समुच्चय ϕ में कोई अवयव नहीं होता है अतः ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है। हम यह भी कह सकते हैं कि ϕ में ऐसा कोई अवयव नहीं है जो किसी समुच्चय A में नहीं है।

यदि A और B दो समुच्चय है तथा $A \subset B$ एवं $A \neq B$ तो A, B का **उचित उपसमुच्चय** कहलाता है और B, A का **अधिसमुच्चय** कहलाता है जैसे Q, R का उचित उपसमुच्चय है तथा R, Q का अधिसमुच्चय है।

अन्तराल के रूप में R के उपसमुच्चय (Subset of R as an interval)

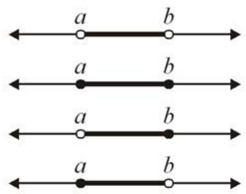
यदि $a, b \in R$ और $a < b$, तब वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{x : a < x < b\}$ एक विवृत अन्तराल कहलाता है और प्रतीक के रूप में इसे (a, b) द्वारा निरूपित किया जाता है तथा a और b के मध्य स्थित सभी वास्तविक संख्याएँ इस अन्तराल में होती हैं परन्तु a और b स्वयं इस अन्तराल में नहीं होते हैं। इसी प्रकार वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $\{x : a \le x \le b\}$ एक संवृत अन्तराल कहलाता है और प्रतीकात्मक रूप में इसे $[a, b]$ द्वारा निरूपित किया जाता है। a से लगाकर b तक की सभी वास्तविक संख्याएँ इस अन्तराल में होती है। इसी तरह निम्न अन्तराल भी परिभाषित किए जा सकते हैं। अतः

$(a, b) = \{x : a < x < b\}$

$[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$

$(a, b] = \{x : a < x \le b\}$

$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$



सार्वत्रिक समुच्चय (Universal set)

संख्या प्रणाली का अध्ययन करते समय हमें प्राकृत संख्याओं, परिमेय संख्याओं, अपरिमेय संख्याओं, सम प्राकृत संख्याओ या भाज्य प्राकृत संख्याओं में रूचि होती है तथा ये सभी समुच्चय वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय होते हैं।

परिभाषाः जब विचाराधीन सभी समुच्चय किसी एक ही समुच्चय के उपसमुच्चय होते हैं तो उस समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय कहते हैं।

सार्वत्रिक समुच्चय को U से दर्शाते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि सार्वत्रिक समुच्चय के अन्य सभी विचाराधीन समुच्चय, उपसमुच्चय होते हैं।

घात समुच्चय (Power set)

यदि A = {a,b} हो, ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$ सभी समुच्चय A के उपसमुच्चय होंगे तथा $\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय होगा जिसे हम A का घात समुच्चय कहेंगे।

परिभाषा : किसी समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय कहते हैं।

A के घात समुच्चय को **P(A)** से निरूपित करते है। अतः उपरोक्त उदाहरण में

$$P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

पुनः यदि $n(A) = m$ हो, तो $n(P(A)) = 2^m$ होगा। उपरोक्त समुच्चय A के लिये, n(A) = 2 अतः $n(P(A)) = 2^2 = 4$ हैं।

प्रश्नमाला 1.1

1. निम्न स्थानों मे $\in$ या $\notin$ को भर कर सही कथन बनाइए–

   (i) $3 \ldots \{1,2,3,4,5\}$ (ii) $2 \cdot 5 \ldots N$ (iii) $0 \ldots Q$

2. निम्न स्थानों में $\subset$ या $\not\subset$ को भर कर सही कथन बनाइए–

   (i) $\{2,3,4\} \ldots \{1,2,3,4,5\}$

   (ii) $\{a,e,o\} \ldots \{a,b,c\}$

   (iii) $\{x : x$ किसी समतल मे स्थित एक समबाहु त्रिभुज है $\} \ldots \{x : x$ किसी समतल मे स्थित एक त्रिभुज है $\}$

   (iv) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है $\} \ldots \{x : x$ एक विषम पूर्णांक है $\}$

3. निम्नलिखित कथनों की सत्यता की जाँच कीजिए–

   (i) $\{a, b\} \subset \{b, a, c\}$

   (ii) $\{a, e\} \subset \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$

   (iii) $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1,3,2,5\}$

   (iv) $\{x : x$ संख्या 6 से कम एक सम प्राकृत संख्या है $\} \not\subset \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है जो 36 को विभाजित करती है $\}$

4. निम्नलिखित समुच्चयों के घात समुच्चय लिखिए–

   (i) $\{a\}$ (iii) $\{1,2,3\}$ (ii) $\{a,b\}$ (iv) ϕ

5. निम्नलिखित को अन्तराल के रूप में लिखिए–

   (i) $\{x : x \in R, -3 < x < 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -4 \le x \le 8\}$

   (iii) $\{x : x \in R, 4 < x \le 9\}$ (iv) $\{x : x \in R, -6 \le x < -1\}$

6. निम्नलिखित अन्तरालों को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए–

   (i) $(-4,0)$ (iii) $[6,8]$ (ii) $[-3, 7)$ (iv) $(3, 10]$

7. यदि $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ और $C = \{2, 4, 6, 8\}$ हो, तो निम्नलिखित में से किस–किस समुच्चय को सार्वत्रिक समुच्चय लिया जा सकता है–

   (i) $\{0,1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

   (iii) $\{0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (iv) ϕ

1.05 समुच्चयों पर संक्रियाऐं (Operations on sets)

संख्याओं पर योग, अन्तर, गुणा और भाग की संक्रियाओं से हम परिचित हैं। दो संख्याओं पर इन संक्रियाओं से एक नयी संख्या प्राप्त होती है। अब हम दो समुच्चयों पर होने वाली निम्न संक्रियाओं का अध्ययन करेंगें

(i) समुच्चयों का संघ या सम्मिलन (ii) समुच्चयों का सर्वनिष्ठ

(iii) समुच्चयों का अन्तर (iv) समुच्चय का पूरक

(i) समुच्चयों का संघ या सम्मिलन (Union of sets)

समुच्चयों $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ **तथा** $B = \{3,5,7,9,11\}$ पर विचार कीजिए। यहाँ हम देखते हैं कि कुछ अवयव समान है तथा कुछ अलग–अलग है। यदि हम समुच्चय $C = \{1,2,3,4,5,6,7,9,11\}$ का निर्माण करे तो यह स्पष्ट होता है कि यह समुच्चय A तथा B दोनों के सभी अवयवों के सम्मिलन से निर्मित है तथा A व B का कोई भी अवयव इसके बाहर नहीं हैं। अतः यह एक विशेष प्रकार का समुच्चय है जिसे हम समुच्चयों का संघ कहते हैं इसे निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है।

परिभाषाः समुच्चय A तथा समुच्चय B का संघ समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें A तथा B के सभी अवयवों को सम्मिलित रूप से लेकर बनाया जाता हैं।

समुच्चय A तथा समुच्चय B के संघ समुच्चय को $A \cup B$ से निरूपित करते हैं तथा '**A संघ B**' पढ़ते हैं। अतः

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ या } x \in B\}$$

उदाहरणः यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ तथा $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ हो, तो

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$$

संघ की संक्रियाओं के गुणधर्मः

(i) $A \cup \phi = A$ (तत्समक नियम, ϕ संक्रिया $\cup$ का तत्समक अवयव है)

(ii) $A \cup B = B \cup A$ (क्रम विनिमय नियम)

(iii) $A \cup A = A$ (वर्गसम नियम)

(iv) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (साहचर्य नियम)

(v) $U \cup A = U$

(ii) समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of sets)

समुच्चयों के संघ में दिये समुच्चयों A तथा B पर विचार करने पर हमें ध्यान में आता है कि इन दोनों समुच्चयों में अवयव 3 तथा 5 दोनों समुच्चयों के सदस्य हैं अतः इनसे एक समुच्चय D = {3,5} का निर्माण किया जा सकता है इस प्रकार के समुच्चय को हम उपरोक्त समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय कहते हैं। इसको निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता हैं।

परिभाषाः समुच्चय A तथा समुच्चय B का सर्वनिष्ठ समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें A तथा B के सभी उभयनिष्ठ अवयव उपस्थित हों।

समुच्चय A तथा समुच्चय B के सर्वनिष्ठ समुच्चय को $A \cap B$ से निरूपित करते हैं तथा

इसे **'A सर्वनिष्ठ B'** पढ़ते हैं। अतः

$A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$

उपरोक्त उदाहरण से $A \cap B = \{3, 5\}$, दोनो समुच्चयों में 3 एवं 5 उभयनिष्ठ अवयव हैं।

यदि दो समुच्चयों A तथा B में एक भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं हो, तो ऐसे समुच्चयों को **असंयुक्त समुच्चय** कहते हैं। अर्थात् यदि A तथा B असंयुक्त समुच्चय हों, तो–

$A \cap B = \{\ \}$ या ϕ

सर्वनिष्ठ की संक्रियाओं के गुणधर्मः

(i) $A \cap \phi = \phi,\ U \cap A = A$ (ϕ व U के नियम से)

(ii) $A \cap B = B \cap A$ (कम विनिमय नियम)

(iii) $A \cap A = A$ (वर्गसम नियम)

(iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (साहचर्य नियम)

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (बंटन नियम)

(iii) समुच्चयों का अन्तर (Difference of sets)

समुच्चयों A = {1,2,3,4,5,6} तथा B = {3,5,7,9,11} पर विचार करने पर हम देखते हैं कि 1,2,4,6 समुच्चय A के ऐसे अवयव हैं जो समुच्चय B में नहीं हैं इन्हे A – B = { 1, 2, 4, 6 } से प्रदर्शित करते है इसी प्रकार B – A = {7, 9, 11} प्राप्त होता हैं।

परिभाषाः समुच्चय A का समुच्चय B से अन्तर, उन अवयवों का समुच्चय है जो समुच्चय A में है किन्तु समुच्चय B में नहीं है।

समुच्चय A का समुच्चय B से अन्तर प्रतिकात्मक रूप में **'A–B'** से दर्शाया जाता है तथा इसे **'A से B का अन्तर'** पढ़ते है। अर्थात A – B, A के अवयवों में से B के अवयवों को हटाने से प्राप्त होता है। अतः

$A - B = \{ x : x \in A$ और $x \notin B \}$

उपरोक्त समुच्चयों से स्पष्ट है कि $A - B \neq B - A$, जो दर्शाती है कि समुच्चयों मे अन्तर की संक्रिया कमविनिमय के नियम का पालन नहीं करती है।

(iv) समुच्चय का पूरक समुच्चय (Complement of a set)

यदि U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 } एक सार्वत्रिक समुच्चय को निरूपित करें तथा A = {2, 4, 6} हो, तो A के अवयवों को छोड़ने के पश्चात् शेष सभी अवयवों का एक समुच्चय प्राप्त होता हैं जिसे U – A लिखते हैं, क्योंकि इसमें A का कोई भी अवयव नहीं है अतः इसे U के सापेक्ष A का पूरक समुच्चय कहते हैं।

परिभाषाः किसी समुच्चय का पूरक समुच्चय, सार्वत्रिक समुच्चय के अवयवों में से उस समुच्चय के अवयवों को हटाने पर प्राप्त समुच्चय को कहते हैं।

A के पूरक समुच्चय को A^c या A' से दर्शाते हैं तथा **पूरक A** पढ़ते हैं। अतः $A' = U - A$

यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ तथा $A = \{2, 4, 6\}$ हो, तो $A' = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

1.06 समुच्चयों पर प्रारंभिक संक्रियाओं का वेन आरेख द्वारा निरूपण

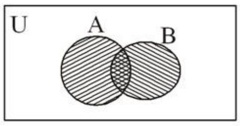
(Representation of initial operations on sets by venn diagram)

समुच्चयों पर प्रारंभिक संक्रियाओं को आरेख द्वारा सरलता से समझा जा सकता है जिन्हे **वेन आरेख** कहते हैं। इस विधि मे सार्वत्रिक समुच्चय को एक आयत के रूप में तथा अन्य समुच्चयों को वृतों के रूप मे दर्शाते हैं।

अनेक प्रश्नों को तार्किक रूप से हल करने में वेन आरेख काफी उपयोगी सिद्ध होते हैं। इन्हे समुच्चयों की संकियाओं के पश्चात् विस्तृत रूप से समझाया गया हैं।

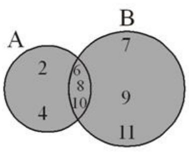
दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 4: यदि U, A, B निम्नानुसार प्रदर्शित हो, तो तथा विभिन्न आकारों के अनुसार बनने वाले समुच्चयों को

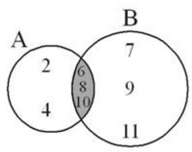


निम्नानुसार प्रदशित करेंगे–

उदाहरण 5: यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ हो, तो $A \cup B$ तथा $A \cap B$ को वेन आरेख द्वारा निम्न प्रकार दर्शायेंगे



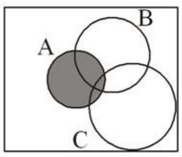
$A \cup B = \{2,4,6,7,8,9,10,11\}$



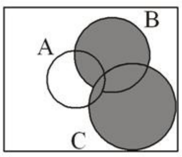
$A \cap B = \{6,8,10\}$

उदाहरण 6: यदि A, B तथा C कोई तीन समुच्चय हों, तो वेन आरेख द्वारा सिद्ध कीजिए कि –

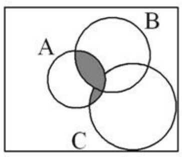
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$



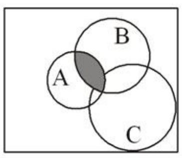
A



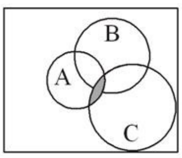
$B \cup C$



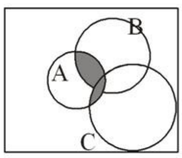
$A \cap (B \cup C)$



$A \cap B$



$A \cap C$



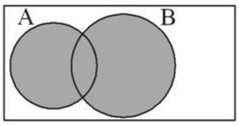
$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

अतः चित्रानुसार यह सिद्ध होता है कि, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

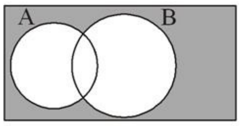
उदाहरण 7: यदि U सार्वत्रिक समुच्चय, A तथा B कोई दो समुच्चय हों, तो वेन आरेख द्वारा निम्न समुच्चयों को प्रदर्शित कीजिए–

(i) $(A \cup B)'$ (ii) $A' \cup B'$

हल: (i) $(A \cup B)'$

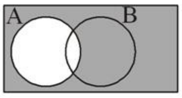


$(A \cup B)$

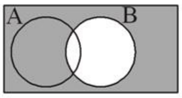


$(A \cup B)'$

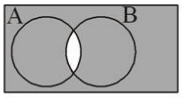
(ii) $A' \cup B'$



A'



B'



$A' \cup B'$

विविध प्रश्नमाला–1

1. समीकरण $x^2 + x - 2 = 0$ का हल समुच्चय रोस्टर रूप में है–

   (A) $\{1,2\}$ (C) $\{-1,2\}$ (B) $\{-1,-2\}$ (D) $\{1,-2\}$

2. $B = \{y : y$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है$\}$ का रोस्टर रूप है–

   (A) {a,e,i,o} (C) {a, e, o,u} (B) {a,o,u} (D) {a,e,i,o,u}

3. समुच्चय $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ का समुच्चय निर्माण रूप होगा–

   (A) $\{x : x$ एक विषम प्राकृत संख्या है $\}$ (B) $\{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है $\}$

   (C) $\{x : x$ एक प्राकृत संख्या का वर्ग है $\}$ (D) $\{x : x$ एक अभाज्य प्राकृत संख्या है $\}$

4. निम्नलिखित समुच्चयों में कौनसा अपरिमित है–

   (A) $\{x : x \in N$ और $(x-1)(x-2) = 0\}$ (B) $\{x : x \in N$ और $x^2 = 4\}$

   (C) $\{x : x \in N$ और $2x - 1 = 0\}$ (D) $\{x : x \in N$ और x एक अभाज्य संख्या है$\}$

5. यदि $A = \{0\}$, $B = \{x : x > 15$ और $x < 5\}$, $C = \{x : x - 5 = 0\}$, $D = \{x : x^2 = 25\}$,

   $E = \{x : x$ समीकरण $x^2 - 2x - 15 = 0$ का एक धन पूर्णांक मूल है$\}$ हो, तो समान समुच्चयों का युग्म है

   (A) A, B (C) B, C (B) C,D (D) C,E

6. समुच्चयों ϕ, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 5, 9\}$, $C = \{1, 5, 7, 9\}$ के लिए निम्न में से सत्य है–

   (A) $A \subset B$ (B) $B \subset C$ (C) $C \subset B$ (D) $A \subset C$

7. यदि $A = \{2,4,6,8\}$ और $B = \{1,4,7,8\}$ तो $A - B$ तथा $B - A$ क्रमशः होंगे–

   (A) $\{2,6\}; \{1,7\}$ (B) $\{1,7\}; \{4,8\}$ (C) $\{1,7\}; \{2,6\}$ (D) $\{4,8\}; \{1,7\}$

8. निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है?

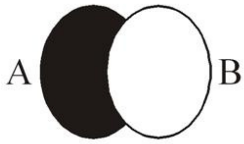
   (A) $A \cap B = \phi \Rightarrow A = \phi$ या $B = \phi$ (B) $A - B = \phi \Rightarrow A \subset B$

   (C) $A \cup B = \phi \Rightarrow A \subset B$ (D) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $A \cap B = \phi$ तो

   (A) $A - B = \phi$ (B) $A - B = A$ (C) $A \cup B = \phi$ (D) $A - B = B$

10. निम्न वेन आरेख का छायांकित क्षेत्र निरूपित करता है–



(A) $A \cup B$ (B) $A \cap B$ (C) $A - B$ (D) $B - A$

11. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ हो, तो $A - B$ का मान होगा–

(A) $\{1,3,5,8\}$ (B) $\{1,3,5\}$ (C) $\{1,2,3,4,5,6,8\}$ (D) $\{\ \ \}$

12. निम्नलिखित कथनों में से सत्य कथन है–

(A) $\{2, 3, 4, 5\}$ तथा $\{3, 6\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(B) $\{a, e, i, o, u\}$ तथा $\{a, b, c, d\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

(C) $\{2, 6, 10, 14\}$ तथा $\{3, 7, 11, 15\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

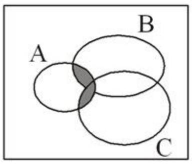
(D) $\{2, 7, 10\}$ तथा $\{3, 7, 11\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

13. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3\}$ और $B = \{3, 4, 5\}$ हो, तो सत्य है–

(A) $(A \cup B)' = \{2, 3, 4, 5\}$ (B) $B - A = \{4,5\}$

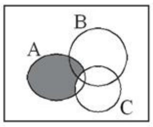
(C) $A - B = \{2,4,5\}$ (D) $(A \cup B) = \{3\}$

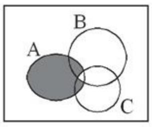
14. निम्न प्रदर्शित वेन आरेख का छायांकित क्षेत्र निरूपित करता है–

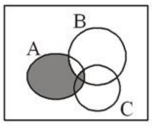


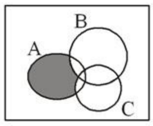
(A) $(A \cap B) \cap C$ (B) $(A \cup B) \cap C$ (C) $(A \cap B) \cup C$ (D) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

15. समुच्चय $A - (B \cap C)$ को निरूपित करने वाला वेन आरेख है–

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

16. निम्नलिखित में कौन से संग्रह समुच्चय है ? समझाइये।

(i) 8 से कम सम प्राकृत संख्याओं का संग्रह

(ii) भारत के बड़े नगरों का संग्रह

(iii) विभिन्न प्रकार की ज्यामितीय आकृतियों का संग्रह

(iv) संख्या 46 को विभाजित करने वाले सभी पूर्ण संख्याओं का संग्रह

(v) विश्व के सर्वश्रेष्ठ 20 क्रिकेट के बल्लेबाजों का संग्रह

(vi) सभी सम पूर्णांको का संग्रह

(vii) कवि कालिदास द्वारा रचित काव्यों का संग्रह

(viii) भारतीय संस्कृति में योगदान देने वाले महापुरूषों का संग्रह

17. निम्नलिखित समुच्चयों को रोष्टर रूप में लिखिए।

(i) $A = \{x : x \in N,\ 2 \le x \le 9\}$

(ii) $B = \{ x : x$ दो अंको की प्राकृत संख्या जिसके अंकों का योगफल 6 है$\}$

(iii) C = MATHEMATICS शब्द के सभी अक्षरों का समुच्चय

(iv) $D = \{ x : x$ एक अभाज्य संख्या है जो 50 से छोटी है $\}$

18. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ तथा $C = \{4, 6, 8, 10\}$ हो, तो रिक्त स्थानों में उपयुक्त चिह्न लगाइए।

(i) 4…A , 5…B (ii) 2…A, 3…B, 4…C (iii) B…A, A…C (iv) A – B …C

(v) A…B = B (vi) B – C … {2} (vii) $B \cap C = \{\ldots\}$ (viii) $B \cup C - A = \{\ldots\}$

19. प्रत्येक के दो–दो उदाहरण बताइए।

(i) रिक्त समुच्चय (ii) परिमित समुच्चय (iii) अपरिमित समुच्चय (iv) सार्वत्रिक समुच्चय

20. यदि $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{p, q, r\}$ तथा $C = \{a, b, p, q\}$ हो, तो निम्नलिखित की सत्यता की जॉच कीजिए।

(i) $A - B = C$ (ii) $B - C \neq A$ (iii) $B - A = \phi$

(iv) $(A \cup B) - C = \{c, d, r\}$ (v) $(A \cup B) \cap C = C$

21. यदि $A = \phi$ हो, तो $P(A)$ में कितने अवयव होंगे?

22. निम्नलिखित समुच्चयों को अन्तराल के रूप में लिखिए।

(i) $\{x : x \in R, a < x < b\}$ (ii) $\{x : x \in R, 3 < x \le 5\}$ (iii) $\{x : x \in R, 0 \le x < 8\}$ (iv) $\{x : x \in R, -1 \le x \le 5\}$

23. निम्नलिखित अन्तराल को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

(i) (2, 5) (ii) [0, 7) (iii) [2, 10] (iv) (–5, 0]

24. यदि $A = \{x : x \in N,\ 2 \le x \le 9\}$ तथा $B = \{ x : x$ दो अंको की प्राकृत संख्या जिसके अंकों का योगफल 8 है$\}$ तो निम्न समुच्चय ज्ञात कीजिए।

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $A - B$ (iv) $(A - B) \cup (B - A)$

25. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ तथा $C = \{4, 6, 8, 10\}$ हो, तो निम्न समुच्चयों का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $(A \cup B) \cap B$ (ii) $(A \cap B) \cup C$ (iii) $A' \cup B'$ (iv) $(A \cup B)'$

26. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, तथा $B = \{2, 3, 4\}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि–

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

27. वेन आरेख की सहायता से निम्न समुच्चयों को प्रदर्शित कीजिए।

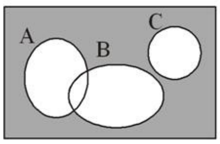
(i) $(A \cup B) \cap C$ (ii) $(A \cap B) \cup C$ (iii) $A' \cup B'$ (iv) $(A \cup B)'$

28. वेन आरेख की सहायता से सिद्ध कीजिए कि–

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते है।
2. समुच्चय को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षर एवं इसके सदस्य या अवयव को वर्णमाला के छोटे अक्षर से दर्शाते हैं। यदि a समुच्चय A का अवयव है, तो इसे $a \in A$ तथा a समुच्चय A का अवयव नहीं होने पर $a \notin A$ से लिखते हैं।
3. समुच्चय को निम्न विधियों द्वारा निरूपित किया जाता है–
   (i) सारणीबद्ध या रोस्टर रूप : अवयवों को अर्ध विराम द्वारा पृथक करते हुए बिना पुनरावृति के मझले कोष्ठक में लिखकर।
   (ii) समुच्चय निर्माण रूप : अवयवों के गुणधर्म को मझले कोष्टक में लिखकर।
4. विभिन्न प्रकार के समुच्चय :
   (i) रिक्त समुच्चय : वह समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं हो।
   (ii) परिमित और अपरिमित समुच्चय : जिस समुच्चय मे अवयवों की संख्या परिमित हो वह परिमित समुच्चय कहलाता है अन्यथा उसे अपरिमित समुच्चय कहेंगे। $n(A) = A$ में कुल अवयवों की संख्या।
   (iii) सार्वत्रिक समुच्चय (U) : जब विचाराधीन समुच्चय किसी एक ही समुच्चय के उपसमुच्चय हो तो वह समुच्चय, सार्वत्रिक समुच्चय कहलाता हैं।
5. समुच्चयों में क्रियाएँ :
   (i) समुच्चय A तथा B का **संघ** या सम्मिलन समुच्चय$(A \cup B)$: $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$
   (ii) समुच्चय A तथा B का **सर्वनिष्ठ समुच्चय** $(A \cap B)$: $A \cap B = \{x : x \in A$ तथा $x \in B\}$
   (iii) समुच्चय A का B से **अन्तर समुच्चय** $(A - B)$: $A - B = \{ x : x \in A$ और $x \notin B \}$
   (iv) समुच्चय A का **पूरक समुच्चय** (A') : $A' = U - A$
6. समुच्चय A, समुच्चय B का **उपसमुच्चय** ($A \subset B$) कहलाता है यदि प्रत्येक $a \in A$ के लिए $a \in B$
7. **A का घात समुच्चय P(A) :** $P(A) = \{S : S \subset A\}$ अर्थात A के सभी उपसमुच्चयों का संग्रह।
8. **वेन आरेख द्वारा समुच्चयों का प्रदर्शन :** सार्वत्रिक समुच्चय को एक बड़े आयत से दर्शाते हैं तथा अन्य समुच्चयों को उस आयत के अन्दर वृतों से,तथा यदि दो समुच्चयों में कोई अवयव उभयनिष्ठ है तो उन द्वारा प्रदर्शित वृतों को, प्रतिच्छेदित वृतों से दर्शाते हैं। निम्न वेन आरेख पर विचार कीजिए–



यहाँ आयत सार्वत्रिक समुच्चय दर्शाता है जिसके अन्य अवयव उपसमुच्चय हैं। समुच्चय A व B प्रतिच्छेदी वृतों से दर्शाए गए हैं स्पष्टतः दोनों मे कुछ अवयव उभयनिष्ठ है तथा समुच्चय C अलग से है अतः C का कोई भी अवयव A या B में नहीं है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 1.1

1. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\in$

2. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\subset$ (iv) $\not\subset$

3. (i) सत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य

4. (i) $\{\phi, \{a\}\}$ (ii) $\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
(iii) $\{\phi, \{a\}, \{a,b\}\}$ (iv) ϕ

5. (i) $(-3, 6)$ (ii) $[-4, 8]$ (iii) $(4, 9]$ (iv) $[-6, -1)$

6. (i) $\{x : x \in R, -4 < x < 0\}$ (ii) $\{x : x \in R, 6 \le x \le 8\}$
(iii) $\{x : x \in R, -3 \le x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R, 3 < x \le 10\}$

7. (ii) एवं (iii)

विविध प्रश्नमाला–1

1. D **2.** D **3.** C **4.** D **5.** D **6.** B
7. A **8.** B **9.** B **10.** C **11.** B **12.** C
13. B **14.** D **15.** B **16.** (i), (iv), (vi), (vii)

17. A = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), B = (15, 24, 33, 42, 51), C = (M, A, T, H, E, I, C, S)
D = (1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47)

18. (i) $\in, \notin$ (ii) $\in, \in, \in$ (iii) $\in, \notin$ (iv) $\neq$ (v) $\cap$
(vi) $\neq$ (vii) 4 (viii) $\{8, 10\}$

19. उदाहरण पुस्तक में दी गई परिभाषाओं के अनुसार

20. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) सत्य

21. 1

22. (i) (a, b) (ii) (3, 5] (iii) [0, 8) (iv) [–1, 5]

23. (i) $\{x : x \in R, 2 < x < 5\}$ (ii) $\{x : x \in R, 0 \le x < 7\}$
(iii) $\{x : x \in R, z \le x \le 10\}$ (iv) $\{x : x \in R, -5 < x \le 0\}$

24. (i) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71\}$
(ii) ϕ (iii) A (iv) $A \cup B$

25. (i) B (ii) $\{2, 3, 4, 6, 8, 10\}$ (iii) $\{1, 5, 7, 8, 9, 10\}$ (iv) $\{7, 8, 9, 10\}$

2

सम्बन्ध एवं फलन
(Relation and Function)

2.01 परिचय (Introduction):

सम्बन्ध आम बोलचाल की भाषा का शब्द है। अपने दैनिक जीवन में भी हम कई प्रकार के सम्बन्धों से भलीभाँति परिचित हैं।

उदाहरणार्थ :

(i) दिल्ली भारत की राजधानी है।
(ii) श्याम, सोहन का पुत्र है।
(iii) 5,15 का भाजक है।
(iv) त्रिभुज ABC, त्रिभुज DEF के समरूप है।
(v) समुच्चय B, समुच्चय A का उपसमुच्चय है।

उपर्युक्त उदाहरणों में दो स्थानों, व्यक्तियों, संख्याओं अथवा किसी समुच्चय के दो अवयवों के बीच किसी प्रकार का सम्बन्ध होने की बात कही गयी है। गणित में भी इस शब्द का अर्थ लगभग उसी प्रकार का होता है।

गणित के इस अध्याय में हम एक समुच्चय के अवयवों का सम्बन्ध अन्य समुच्चय के या स्वयं के अवयवों से स्थापित करने का प्रयास करेंगे।

परिभाषा : कथन (Statement): *कथन एक अर्थपूर्ण वाक्य है, जिसे सत्य अथवा असत्य में व्यक्त कर सकते है।*

उदाहरणार्थ :

(i) सूर्य, पूर्व दिशा में उदय होता है।
(ii) अमेरिका की राजधानी लंदन है।
(iii) 7 का वर्ग 49 है।
(iv) 90° के कोण को समकोण कहते हैं।

उपर्युक्त सभी वाक्य कथन है, जिनमें (i), (iii) तथा (v) सत्य हैं तथा (ii) असत्य हैं।

2.02 खुला वाक्य (Open sentence):

ऐसे कथन, जिनके सत्य अथवा असत्य होने का फैसला तब तक नहीं हो सकता है जब तक इनके सम्बन्ध में कोई अतिरिक्त जानकारी उपलब्ध न हो, खुले वाक्य कहलाते हैं।

उदाहरणार्थ :

(i) $x+5=20$ (ii) $-5<x<3$ (iii) x, भारत का एक शहर है।

(iv) $x^2+y^2=10$ (v) $x>2y+3$

ये सभी खुले वाक्य है। उदाहरण (i), (ii) तथा (iii) में केवल एक चर राशि तथा उदाहरण (iv) तथा (v) ये दो चर राशियाँ x तथा y का प्रयोग किया गया है। ऐसे खुले वाक्यों को जिनमें एक चर राशि x हो $P(x)$ से तथा ऐसे दो चर राशि x, y वाले खुले वाक्यों को $P(x, y)$ से निरूपित किया जाता है। दो से अधिक चर राशि वाले वाक्य भी संभव हैं।

खुले वाक्यों में जिस समुच्चय से चर राशि का चयन किया जाता है उसे प्रतिस्थापन समुच्चय (Replacement set) तथा चर के जिन मानों के लिये खुला वाक्य सत्य होना है उनके समुच्चय को हल समुच्चय (Solution set) कहते हैं।

2.03 क्रमित युग्म (Ordered pair):

साधारणतः समुच्चय के अवयवों में क्रम का कोई महत्व नहीं होता। उदाहरणार्थ यदि $A=\{a,b,c,d\}$ तथा $B=\{d,a,c,b\}$ तो A तथा B में कोई अन्तर नहीं है अर्थात् $A=B$. अतः स्पष्ट है कि किसी समुच्चय के अवयवों में क्रम परिवर्तन करने पर समुच्चय में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

परन्तु यदि किसी समुच्चय के अवयवों में क्रम का भी महत्व हो तो ऐसे समुच्चय को क्रमित समुच्चय (ordered set) कहते हैं। उदाहरणार्थ हम जानते हैं कि $235\neq 523$ जबकि दोनों संख्याओं में अंकों 2, 3 तथा 5 का ही प्रयोग किया गया है। अर्थात् अंकों का क्रम महत्वपूर्ण है।

दो अंकों के क्रमिक समुच्चय को क्रमित युग्म (ordered pair) कहते हैं। इसे $(a,b),(x,y)$ इत्यादि से निरूपित किया जाता है। स्पष्टतः $(a,b)\neq(b,a)$ तथा $(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c, b=d$. क्रमित युग्म (a,b) में a को प्रथम अवयव तथा b को द्वितीय अवयव कहा जाता है। क्रमित युग्म के दोनों अवयव भिन्न अथवा समान भी हो सकते हैं। उदाहरणार्थ $(5,7),(x,y),(3,3),(a,a)$ सभी क्रमित युग्म को निरूपित करते हैं।

टिप्पणी : यदि किसी क्रमित समुच्चय में अवयवों की संख्या n हो तो ऐसे समुच्चय को क्रमित n- टयूपल (ordered n-tupple) कहते हैं तथा इसे $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

2.04 दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन (Cartesian product of two sets):

दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन $A\times B$ उन सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है जिसमें प्रथम अवयव समुच्चय A से तथा द्वितीय अवयव समुच्चय B से लिया गया हो अर्थात्

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$$

उदाहरण : यदि $A=\{a,b,c\}$ तथा $B=\{x,y\}$ हो तो

$$A\times B=\{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$$

टिप्पणी :

(i) यदि $A=\phi$ अथवा $B=\phi$, तब $A\times B=\phi$.

(ii) यदि समुच्चय A में अवयवों की संख्या m तथा समुच्चय B में अवयवों की संख्या n हो तो $A\times B$ में $m\times n$ अवयव होंगे।

(iii) यदि A तथा B अरिक्त समुच्चय हों तथा उनमें से एक अथवा दोनों अपरिमित समुच्चय (Infinite set) हों तब $A\times B$ में अवयवों की संख्या अनन्त होगी अर्थात् $A\times B$ भी एक अपरिमित समुच्चय होगा।

2.05 सम्बन्ध (Relation):

माना कि A और B दो अरिक्त समुच्चय हैं। समुच्चय A से B में सम्बन्ध एक खुले वाक्य $P(x, y)$, जहाँ $x\in A, y\in B$ द्वारा परिभाषित किया जाता है अर्थात् $R=\{(x,y): x\in A, y\in B, P(x, y)\}\mid x, y$ के किन्हीं मानों के लिये यदि :

(i) $P(a,b)$ सत्य है तब हम कहते हैं कि सम्बन्ध R के अधीन समुच्चय A के अवयव a का सम्बन्ध समुच्चय B अवयव b से है। इसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं : aRb या $(a,b)\in R$.

(ii) $P(a,b)$ असत्य है तो इसे $a \not{R} b$ अथवा $(a,b)\not\in R$ से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण 1: यदि $A=\{1,2,3,5,7\}, B=\{1,4,6,9\}$ तथा $P(x, y): x$ का दुगना y है तब $R=\{(x,y): x\in A, y\in B, P(x, y)\}$ A से B में एक सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत $2R4, 3R6$ परन्तु $1\not{R}4, 3\not{R}9$ इत्यादि। इसे हम इस प्रकार भी व्यक्त कर सकते हैं :

$(2,4)\in R, (3,6)\in R$ परन्तु $(1,4)\not\in R, (3,9)\not\in R$ इत्यादि।

उदाहरण 2: यदि N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो तथा $P(x,y): x, y$ का भाजक है तो

$R=\{(x,y): x, y\in N, P(x, y)\}$ N में एक सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत $2R2, 2R4, 5R10, 2\not{R}3, 7\not{R}4$ इत्यादि।

अर्थात् $(2,2)\in R, (2,4)\in R, (5,10)\in R$ परन्तु $(2,3)\not\in R, (7,4)\not\in R$ इत्यादि।

उदाहरण 3: यदि $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B:\{2,3,4,5,6\}$ तथा $P(x,y):x,y$ से बड़ा है तब $R=\{(x,y):x\in A,\ y\in B,\ P(x,\ y)\}$ A से B में एक सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत $3R2, 4R3, 4R2, 5R3, 5R4$ परन्तु $2\not{R}4, 3\not{R}5$ इत्यादि।

अर्थात् $(3,2)\in R, (5,3)\in R$ परन्तु $(2,4)\notin R, (3,5)\notin R$ इत्यादि।

टिप्पणी : उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि :

(i) यह आवश्यक नहीं है कि A के प्रत्येक अवयव का सम्बन्ध B के किसी न किसी अवयव से हो। अर्थात् A में ऐसे अवयव हो सकते हैं जो B के किसी अवयव से संबंधित नहीं हो।

(ii) A के किसी अवयव का सम्बन्ध B के एक या अधिक अवयवों से हो सकता है।

(iii) A के एक से अधिक अवयवों का सम्बन्ध B के एक अवयव से हो सकता है।

2.06 क्रमित युग्मों के समूह के रूप में सम्बन्ध (Relation as a set of ordered pairs):

खुले वाक्य की सहायता से समुच्चय A से समुच्चय B में सम्बन्ध परिभाषित करते समय हमने देखा कि यदि $P(a,b)$ जहाँ $a\in A, b\in B$ यदि सत्य है तब $(a,b)\in R$ अर्थात् सम्बन्ध में जितने भी अवयव होंगे वे सभी $A\times B$ के अवयव होंगे। अतः स्पष्ट है कि $R\subseteq A\times B.$

विलोमतः $A\times B$ का कोई भी उपसमुच्चय (a, b) जैसे क्रमित युग्मों का समुच्चय होगा। अतः A से B में एक सम्बन्ध परिभाषित करेगा। अतः समुच्चय A से समुच्चय B में कोई सम्बन्ध निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है :

परिभाषा : समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई सम्बन्ध $R, A\times B$ का एक उपसमुच्चय है अर्थात् $R\subseteq A\times B.$

टिप्पणी : यदि A तथा B में अवयवों की संख्या क्रमशः m तथा n हो तो $A\times B$ में अवयवों की संख्या $m\times n$ होगी। अतः इसके अरिक्त उपसमुच्चयों की संख्या $2^{mn}-1$ होगी। अर्थात् A से B में परिभाषित होने वाले अरिक्त सम्बन्धों की संख्या भी $2^{mn}-1$ होगी।

2.07 सम्बन्ध का प्रांत तथा परिसर (Domain and range of a relation):

यदि R समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई सम्बन्ध हो तो R के क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों के समुच्चय को R का प्रान्त (Domain) तथा द्वितीय अवयवों के समुच्चय को R का परिसर (Range) कहते हैं। अर्थात् R का प्रान्त $\{a|(a,b)\in R\}$ तथा R का परिसर $\{b|(a,b)\in R\}$ स्पष्टतः R का प्रान्त, A का उपसमुच्चय तथा R का परिसर B का उपसमुच्चय है।

उदाहरण 1: यदि $A=\{1,2,3,4,5\}$ तथा $B=\{2,4,6,8,10\}$

माना $R=\{(a,b)|a\in A, b\in B, a,b \text{ का भाजक है}\}$

A से B में एक सम्बन्ध हो तब

$$R=\{(1,2),(1,4),(1,6),(1,8),(1,10),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(2,10),(3,6),(4,4),(4,8),(5,10)\}$$

अतः R का प्रान्त $=\{1,2,3,4,5\}=A$, R का परिसर $=\{2,4,6,8,10\}=B.$

उदाहरण 2: Z में परिभाषित एक सम्बन्ध

$$R=\{(x,y)|x,y\in z,\ x^2+y^2\le 4\}$$

तब R का प्रान्त $=\{-2,-1,0,1,2\}$ तथा R का परिसर $=\{-2,-1,0,1,2\}$

2.08 प्रतिलोम सम्बन्ध (Inverse relation):

माना R, समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित एक सम्बन्ध है। तब R का प्रतिलोम सम्बन्ध R^{-1}, समुच्चय B से समुच्चय A में निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in R\}$$

अर्थात् $(a,b) \in R \quad \Leftrightarrow \quad (b,a) \in R^{-1}$

या $aRb \quad \Leftrightarrow \quad bR^{-1}a$

परिभाषा से स्पष्ट है कि R^{-1} का प्रान्त $= R$ का परिसर तथा R^{-1} का परिसर $= R$ का प्रांत

उदाहरण 1: यदि $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,5,8\}$ तथा A से B में परिभाषित सम्बन्ध $R = \{(1,4), (2,5), (3,6)\}$ हो तब $R^{-1} = \{(4,1), (5,2), (6,3)\}$

पुनः R^{-1} का प्रान्त $= \{4,5,6\} = R$ का परिसर तथा R^{-1} का परिसर $= \{1,2,3\} = R$ का प्रान्त

उदाहरण 2: यदि N में सम्बन्ध "x, y से छोटा है" द्वारा परिभाषित हो तो $R = \{(x,y) | x, y \in N, x < y\}$ तो इसका प्रतिलोम सम्बन्ध $R^{-1} = \{(x,y) | x, y \in N, x > y\}$ जो "x, y से बड़ा है" द्वारा परिभाषित है।

2.09 तत्समक सम्बन्ध (Identity relation):

किसी समुच्चय A में तत्समक सम्बन्ध वह सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वयं से और केवल स्वंय से सम्बन्धित है। इसे I_A द्वारा व्यक्त किया जाता है। अतः $I_A = \{(a,a) | a \in A\}$.

उदाहरण : यदि $A = \{x, y, z\}$ तब $I_A = \{(x,x), (y,y), (z,z)\}$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: यदि $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{p,q,r,s\}$ तो कारण सहित बताइये कि निम्न में से कौन A से B में सम्बन्ध है :

(i) $R_1 = \{(a,q),(b,s),(c,r),(c,s)\}$ (ii) $R_2 = \{(b,q),(b,r),(b,s)\}$

(iii) $R_3 = \{(a,p),(b,q),(r,a),(d,s),(p,a)\}$ (iv) $R_4 = \{(d,p),(a,p),(b,s),(s,a)\}$

हल :

(i) स्पष्टतः $R_1 \subseteq A \times B \quad \therefore \quad R_1, A$ से B में एक सम्बन्ध है।

(ii) स्पष्टतः $R_2 \subseteq A \times B \quad \therefore \quad R_2$ भी A से B में एक सम्बन्ध है।

(iii) स्पष्टतः $(r,a) \in R_3$ परन्तु $(r,a) \not\subseteq A \times B$ तथा $(p,a) \in R_3$ परन्तु $(p,a) \not\subseteq A \times B$.

$\therefore \; R_3 \not\subseteq A \times B$ अतः R_3, A से B में सम्बन्ध नहीं है।

(iv) स्पष्टतः $(s,a) \in R_4$ परन्तु $(s,a) \not\subseteq A \times B$ अतः R_4 भी A से B में सम्बन्ध नहीं है।

उदाहरण 2: सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C मे एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है : $x \Leftrightarrow x, y$ का संयुग्मी है।

कारण सहित बताइए निम्न में से कौन कथन सत्य अथवा असत्य है :

(i) $2R2$ (ii) $i\,R\,i$ (iii) $-3R3$ (iv) $(1-i)R(1-i)$

(v) $(1-i)R(1+i)$ (vi) $(-1+i)R(1+i)$

हल : (i) $2 = 2 + i \cdot 0$ अतः 2 का संयुग्मी $= 2 - i \cdot 0 = 2$ $\therefore$ $2R2$ सत्य है।

(ii) $i = 0 + i \cdot 1$ अतः इसका संयुग्मी $= 0 - i \cdot 1 = -i$ अतः $i \not R i$ अतः iRi असत्य है।

(iii) $-3 = -3 + i \cdot 0$ अतः इसका संयुग्मी $= -3 - i \cdot 0 = -3$. अतः $-3 \not R 3$ अतः $-3R3$ असत्य है।

(iv) $(1-i)$ का संयुग्मी $(1+i)$ होता है अतः $(1-i) \not R (1-i)$ अतः $(1-i)R(1-i)$ असत्य है।

(v) $(1-i)$ का संयुग्मी $(1+i)$ है। अतः $(1-i)R(1+i)$ सत्य है।

(vi) $(-1+i)$ का संयुग्मी $(-1-i)$ है। अतः $(-1+i)R(1+i)$ असत्य है।

उदाहरण 3: A प्रथम दस प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है। यदि A में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित किया जाता है कि $xRy \Leftrightarrow x + 2y = 10$ तब

(i) R तथा R^{-1} को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में प्रदर्शित कीजिए।

(ii) R तथा R^{-1} के प्रान्त ज्ञात कीजिए।

(iii) R तथा R^{-1} के परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

परिभाषा के अनुसार $xRy \Leftrightarrow x + 2y = 10$

$$\Leftrightarrow y = \frac{10 - x}{2}$$

हम देखते हैं कि जब $x = 1, y = \frac{9}{2} \not\in A.$

अर्थात् 1 का सम्बन्ध A के किसी अवयव से नहीं है। उसी प्रकार हम पाते हैं कि परिभाषित सम्बन्ध के अन्तर्गत 3, 5, 7, 9 तथा 10 भी A के किसी अवयव से सम्बन्धित नहीं है।
पुनः हम देखते हैं कि

जब $x = 2, \quad y = \frac{10-2}{2} = 4 \in A \quad \Rightarrow \quad 2R4$

जब $x = 4, \quad y = \frac{10-4}{2} = 3 \in A \quad \Rightarrow \quad 4R3$

जब $x = 6, \quad y = \frac{10-6}{2} = 2 \in A \quad \Rightarrow \quad 6R2$

जब $x = 8, \quad y = \frac{10-8}{2} = 1 \in A \quad \Rightarrow \quad 8R1$

(i) $\therefore$ $R = \{(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)\}$ तथा $R^{-1} = \{(4,2), (3,4), (2,6), (1,8)\}$.

(ii) अतः R का प्रान्त $= \{2, 4, 6, 8\}$ तथा R^{-1} का प्रान्त $= \{4, 3, 2, 1\}$

(iii) अतः R का परिसर $= \{4, 3, 2, 1\}$ तथा R^{-1} का परिसर $= \{2, 4, 6, 8\}$

उदाहरण 4: समुच्चय $A = \{2, 4, 5\}$ से समुच्चय $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ में सम्बन्ध R, "x, y को विभाजित करता है," से परिभाषित है। R को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में व्यक्त कीजिये तथा इसका प्रांत और परिसर भी ज्ञात कीजिए।

हल : $2 \in A$ लेने पर हम देखते हैं कि यह समुच्चय B के अवयव 2, 4, 6 तथा 8 को विभाजित करता है। अतः $(2,2) \in R, (2,4) \in R, (2,6) \in R, (2,8) \in R$

इसी प्रकार $(4,4) \in R, (4,8) \in R$

परन्तु A का अवयव 5 लेने पर यह B के किसी भी अवयव को विभाजित नहीं करता है।

अतः $R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (4,4), (4,8)\}$

R का प्रान्त {2, 4} तथा R का परिसर = {2, 4, 6, 8}

उदाहरण 5: निम्न में प्रत्येक सम्बन्ध का प्रतिलोम सम्बन्ध ज्ञात कीजिए:

(i) $R = \{(x, y), x, y \in N, x + 2y = 8\}$

(ii) R, समुच्चय $A = \{8.9, 10, 11\}$ से समुच्चय $\{5, 6, 7, 8\}$ में $y = x - 2$ से परिभाषित सम्बन्ध है।

(iii) $R = \{(x, y), x, y \in N;$ x, y का भाजक है$\}$

हल : (i) $x + 2y = 8 \Rightarrow y = \dfrac{8-x}{2}$ $\because$ $y \in N$ अतः x का मान सदैव 8 से छोटा होना चाहिए।

$x = 1$ रखने पर $y = 7/2 \notin N$ अतः x का सम्बन्ध किसी प्राकृत संख्या से नहीं है।

$x = 2$ रखने पर $y = 3 \in N$ $\therefore$ $(2,3) \in R$

उसी प्रकार $(4, 2,) \in R$ तथा $(6,1) \in R$

अतः $R = \{(2,3), (4,2), (6,1)\}$ अतः $R^{-1} = \{(3,2), (2,4), (1,6)\}$

(ii) $x = 8 \in A$ लेने पर $y = 8 - 2 = 6 \in B$ $\therefore$ $(8,6) \in R$

$x = 9 \in A$ लेने पर $y = 9 - 2 = 7 \in B$ $\therefore$ $(9,7) \in R$

$x = 10 \in A$ लेने पर $y = 10 - 2 = 8 \in B$ $\therefore$ $(10,8) \in R$

$x = 11 \in A$ लेने पर $y = 11 - 2 = 9 \notin B$

$\therefore$ $R = \{(8,6), (9,7), (10,8)\}$ $\Rightarrow$ $R^{-1} = \{(6,8), (7,9), (8,10)\}$

(iii) N के अवयवों में यदि x, y का भाजक है तब y, x का गुणज होगा

$\therefore$ $R^{-1} = \{(x, y) | x, y \in N;$ 'x, y का गुणज है'$\}$

प्रश्नमाला 2.1

1. यदि $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$ तो निम्न में से कौन A से B में सम्बन्ध है? कारण सहित उत्तर दीजिए:

   (i) $\{(1,4), (3,5), (3,6)\}$ (ii) $\{(1,6), (2,6), (3,6)\}$

   (iii) $\{(1,5), (3,4), (5,1), (3,6)\}$ (iv) $\{(2,4), (2,6), (3,6), (4,2)\}$

   (v) $A \times B$

2. N में परिभाषित निम्न सम्बन्धों को नियम रूप में व्यक्त कीजिए:

   (i) $\{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9), \ldots\}$ (ii) $\{(2,3), (4,2), (6,1)\}$

   (iii) $\{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4), \ldots\}$

3. समुच्चय $A=\{2,3,4,5\}$ से समुच्चय $B=\{3,6,7,10\}$ में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x, y$ के सापेक्ष अभाज्य है। सम्बन्ध R को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में लिखिए तथा R के प्रान्त एवं परिसर भी ज्ञात कीजिए।

4. यदि पूर्णांकों के समुच्चय Z में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x^2+y^2=25$ तब R तथा R^{-1} को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में लिखिए तथा उनके प्रांत भी ज्ञात कीजिए।

5. यदि सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C से वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में एक सम्बन्ध ϕ इस प्रकार परिभाषित किया जाये कि $x\phi y \Leftrightarrow |x|=y$

   कारण सहित बताइए कि निम्नलिखित में से कौन से सत्य अथवा असत्य है :

   (i) $(1+i)\phi 3$ (ii) $3\phi(-3)$ (iii) $(2+3i)\phi 13$ (iv) $(1+i)\phi 1$

6. यदि समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5\}$ से समुच्चय $B=\{1,4,5\}$ में एक सम्बन्ध R "$x<y$" द्वारा परिभाषित किया जाए तो R को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में व्यक्त कीजिये तथा R^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

7. निम्न सम्बन्धों को क्रमित युग्मों के समुच्चयों के रूप में व्यक्त कीजिए :

   (i) R_1, समुच्चय $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ से समुच्चय $B=\{1,2,3\}$ में "$x=2y$" से परिभाषित सम्बन्ध है।

   (ii) R_2, समुच्चय $A=\{8,9,10,11\}$ से समुच्चय $B=\{5,6,7,8\}$ में "$y=x-2$" से परिभाषित सम्बन्ध है।

   (iii) R_3, समुच्चय $A=\{0,1,2,\ldots,10\}$ में $2x+3y=12$ परिभाषित सम्बन्ध है।

   (v) R_4, समुच्चय $A=\{5,6,7,8\}$ से समुच्चय $B=\{10,12,15,16,18\}$ में "x, y का भाजक है" से परिभाषित है।

8. निम्न में से प्रत्येक सम्बन्ध का प्रतिलोम ज्ञात कीजिएः

   (i) $R=\{(2,3),(2,4),(3,3),(3,2),(4,2)\}$ (ii) $R=\{(x,y)|x,y\in N; x<y\}$

   (iii) R, समुच्चय $A=\{0,1,2,\ldots,10\}$ में $2x+3y=12$ से परिभाषित है।

2.10 सम्बन्धों के प्रकार (Kinds of relations):

(i) स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध R के अन्तर्गत यदि A का प्रत्येक अवयव स्वयं से सम्बन्धित हो, तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध कहलाता है। अर्थात् R स्वतुल्य सम्बन्ध होगा यदि $(a,a)\in R, \ \forall a\in A.$

यदि समुच्चय R में एक भी ऐसा अवयव विद्यमान है जो स्वयं से सम्बन्धित नहीं है तो दिया गया सम्बन्ध स्वतुल्य नहीं होगा।

टिप्पणी : स्वतुल्य सम्बन्ध के लिए $(a,a)\in R$ परन्तु इसका अर्थ यह नहीं है कि अवयव a का सम्बन्ध a के अतिरिक्त दूसरे से न हो। अर्थात् a का सम्बन्ध स्वयं से होने के साथ A के अन्य अवयवों से भी हो सकता है। जबकि तत्समक सम्बन्ध में a का सम्बन्ध a तथा केवल a से होता है। अतः स्पष्ट है कि प्रत्येक तत्समक सम्बन्ध स्वतुल्य सम्बन्ध है परन्तु प्रत्येक स्वतुल्य सम्बन्ध तत्समक सम्बन्ध नहीं होता है।

उदाहरण 1: माना $A=\{a,b,c,d\}$ तथा $R=\{(a,a),(a,d),(b,a),(b,b),(c,d),(c,c)(d,d)\}$ A में परिभाषित कोई सम्बन्ध है तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि $(a,a)\in R,(b,b)\in R,(c,c)\in R$ तथा $(d,d)\in R$ परन्तु यदि A में कोई सम्बन्ध R_1 इस प्रकार परिभाषित हो कि

$$R_1=\{(a,a),(a,d),(b,c),(b,d),(c,c),(c,d),(d,b)\}$$

तब R_1 स्वतुल्य नहीं है क्योंकि $b\in A$ परन्तु $(b,b)\not\in R_1$ उसी प्रकार $d\in A$ परन्तु $(d,d)\not\in R_1$.

उदाहरण 2: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में यदि एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित किया जाये कि $xRy \Leftrightarrow x \geq y$ तो R एक स्वतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि $x \in N \Rightarrow x = x$ परन्तु यदि R इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x > y$ तब यह सम्बन्ध स्वतुल्य नहीं होगा क्योंकि N के किसी भी अवयव के लिये $x > x$ सत्य नहीं है।

उदाहरण 3: किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में एक सम्बन्ध R यदि इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x, y$ के समान्तर है तो एक स्वतुल्य सम्बन्ध होगा क्योंकि प्रत्येक रेखा स्वयं के समान्तर होती है। परन्तु यदि R इस प्रकार परिभाषित हो कि $xRy \Leftrightarrow x, y$ के लम्बवत है तब R स्वतुल्य नहीं होगा क्योंकि कोई भी सरल रेखा स्वयं के लम्बवत नहीं हो सकती।

(ii) सममित सम्बन्ध (Symmetric relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित किसी सम्बन्ध R के अर्न्तगत यदि अवयव a का सम्बन्ध b से होने पर b का भी वहीं सम्बन्ध a से हो तो ऐसे सम्बन्ध को सममित सम्बन्ध कहते हैं। अर्थात् सम्बन्ध R सममित होगा यदि $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \; \forall \; a,b \in A.$

स्पष्टतः समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध R सममित नहीं होगा यदि A में कम से कम दो अवयव a, b ऐसे हो कि $(a,b) \in R$ परन्तु $(b,a) \notin R.$

टिप्पणी : यदि किसी समुच्चय A में R एक सममित सम्बन्ध है तब $xRy \Leftrightarrow yRx.$

अर्थात् $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \Rightarrow (x,y) \in R^{-1}$

$\therefore \quad R \subseteq R^{-1}$ (1)

उसी प्रकार $(x,y) \in R^{-1} \Rightarrow (y,x) \in R \Rightarrow (x,y) \in R$ [R सममित है]

$\therefore \quad R^{-1} \subseteq R$ (2)

(1) तथा (2) से $R = R^{-1}$

उदाहरण 1: समुच्चय $A = \{a,b,c,d\}$ में दो सम्बन्ध R_1 तथा R_2 यदि निम्न प्रकार परिभाषित किए जाएँ कि

$$R_1 = \{(a,b),(b,d),(b,c)(b,a),(d,b),(c,b)\}$$

तथा $$R_2 = \{(a,c),(a,d),(b,d),(c,a),(d,b),(a,b),(b,a)\}$$

तब सम्बन्ध R_1 सममित है परन्तु सम्बन्ध R_2 सममित नहीं है क्योंकि $(a,d) \in R_2$ परन्तु $(d,a) \notin R_2$.

उदाहरण 2: त्रिभुजों के समुच्चय A में "सर्वांगसम $(\cong)$" का सम्बन्ध सममित है क्योंकि $\Delta_1 \cong \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2 \cong \Delta_1$.

उदाहरण 3: किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में "x, y के लम्बवत है" सम्बन्ध सममित है क्योंकि $\ell_1, \ell_2 \in A$ तथा $\ell_2 \perp \ell_1 \Rightarrow \ell_1 \perp \ell_2$.

(iii) प्रति–सममित सम्बन्ध (Anti-symmetric relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध R के अन्तर्गत अवयव a का b से सम्बन्ध तथा b का a से सम्बन्ध दोनों एक साथ तभी सत्य हो जब $a = b$ तब R प्रति–सममित सम्बन्ध कहलाता है। अर्थात् R प्रति–सममित होगा यदि

$$(a,b) \in R \text{ तथा } (b,a) \in R \Rightarrow a = b, \forall a,b, \in A$$

स्पष्टतः A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R प्रति–सममित नहीं होगा यदि A में कम से कम दो अवयव a, b विद्यमान हों जिनके लिए $(a,b) \in R$ तथा $(b,a) \in R$ परन्तु $a \neq b$

उदाहरण 1: समुच्चयों के किसी समुच्चय S में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $ARB \Leftrightarrow A, B$ का उपसमुच्चय है तब R एक प्रति–सममित सम्बन्ध होगा क्योंकि किन्हीं दो समुच्चयों A तथा B के लिये $A \subseteq B$ तथा $B \subseteq A \Rightarrow A = B$

उदाहरण 2: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में यदि कोई सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $x R y \Leftrightarrow x, y$ का भाजक है तो R एक प्रति–सममित सम्बन्ध है क्योंकि N में यदि x, y का भाजक है तथा y, x का भाजक है तो दोनों बातें एक साथ तभी सत्य होगी यदि $x = y$

उदाहरण 3: वास्तविक संख्याओं के समुच्चय A में यदि कोई सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित हो कि $x R y \Leftrightarrow x \geq y$ तब R एक प्रति–सममित सम्बन्ध होगा क्योंकि $x \geq y$ तथा $y \geq x \Rightarrow x = y$

(iv) संक्रामक सम्बन्ध (Transitive relation): किसी समुच्चय A में कोई सम्बन्ध R यदि इस प्रकार परिभाषित हो कि R के अर्न्तगत अवयव a का सम्बन्ध अवयव b से तथा b का सम्बन्ध अवयव c से होने पर a का सम्बन्ध c से हो तो ऐसे सम्बन्ध को संक्रामक सम्बन्ध कहते हैं। अर्थात् R एक संक्रामक सम्बन्ध होगा यदि $(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R, \ \forall \ a,b,c, \in A$

स्पष्टतः A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R संक्रामक नहीं होगा यदि A में कम से कम तीन अवयव a, b, c विद्यमान हो जिनके लिए $(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R$ परन्तु $(a,c) \notin R.$

उदाहरण 1: समुच्चय $A = \{a,b,c,d\}$ में $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,d),(b,c)\}$ एक संक्रामक सम्बन्ध है।

उदाहरण 2: किसी समतल में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय A में "x, y के समान्तर है" एक संक्रामक सम्बन्ध है क्योंकि $\ell_1, \ell_2 \ell_3 \in A$ तथा $\ell_1 \parallel \ell_2$ तथा $\ell_2 \parallel \ell_3 \Rightarrow \ell_1 \parallel \ell_3.$

उदाहरण 3: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में यदि एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित किया जाए कि $x R y \Leftrightarrow x$ तथा y दोनों विषम हैं तो R एक संक्रामक सम्बन्ध क्योंकि $x, y, z \in N$ तथा $x R y$ एवं $y R z \Rightarrow x, y$ तथा y, z सभी विषम है अर्थात् x, z दोनों विषम है अतः $x R z$

(v) तुल्यता सम्बन्ध (Equivalence relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध कहलाता है यदि

(i) R स्वतुल्य है अर्थात् $(a,a) \in R \ \forall a \in A$

(ii) R सममित है अर्थात् $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R, \ \forall a,b \in A$

(iii) R संक्रामक है अर्थात् $(a,b) \in R$ तथा $(b,c) \in R \ \Rightarrow (a,c) \in R, \ \forall a,b,c \in A$

उदाहरण 1: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में यदि कोई सम्बन्ध इस प्रकार परिभाषित हो कि $x R y \Leftrightarrow x = y$ तब R एक तुल्यता सम्बन्ध है क्योंकि किन्हीं $a,b,c, \in N$ के लिए

(i) $a = a$ $\quad \therefore a R a \ \forall a \in N$ $\quad$ अतः R स्वतुल्य है।

(ii) $a = b \Rightarrow b = a$ $\quad \therefore \ a R b \Rightarrow b R a$ $\quad$ अतः R सममित है।

(iii) $a = b$ तथा $b = c \Rightarrow a = c$

अतः $a R b$ तथा $b R c \Rightarrow a R c$ $\quad$ अतः R संक्रामक है।

उदाहरण 2: एक समतल में स्थित बिन्दुओं के समुच्चय A में एक सम्बन्ध R यदि इस प्रकार परिभाषित किया जाए कि $x R y \Leftrightarrow x$ तथा y मूल बिन्दु से समान दूरी पर हैं तब R एक तुल्यता सम्बन्ध होगा क्योंकि

(i) $x \in A \Rightarrow x$ तथा x की मूल बिन्दु से दूरी समान है।

अतः $x R x \ \forall x \in A$ अतः R एक स्वतुल्य सम्बन्ध है।

(ii) माना $x, y \in A$ तथा $x R y$ अर्थात् x तथा y भी मूल बिन्दु से समान दूरी पर है अतः y तथा x भी मूल बिन्दु से समान दूरी पर होंगे अर्थात् $y R x$

$\therefore x R y \Rightarrow y R x$ $\quad \therefore R$ सममित है।

(iii) माना $x, y, z \in A$ तथा $x R y$ एवं $y R z.$

अर्थात् x तथा y मूल बिन्दु से समान दूरी पर स्थित हैं एवं y तथा z मूल बिन्दु से समान दूरी पर स्थित हैं। अतः x तथा z भी मूल बिन्दु से समान दूरी पर स्थित हैं।

अर्थात् $x R z \ \therefore x R y$ तथा $y R z \Rightarrow x R z$ अतः R संक्रामक है।

अतः R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

(iv) आंशिक क्रम सम्बन्ध (Partial order relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध कहलाता है यदि :

(a) R स्वतुल्य है। (b) R प्रति सममित है। (c) R संक्रामक है।

यदि किसी समुच्चय A में कोई आंशिक क्रम सम्बन्ध परिभाषित हो तो समुच्चय A आंशिक क्रमित समुच्चय (Partially ordered set) कहलाता है।

उदाहरण 1: समुच्चयों के समूह में "x, y का उपसमुच्चय है" द्वारा परिभाषित सम्बन्ध एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है क्योंकि यह सम्बन्ध स्वतुल्य, प्रति–सममित तथा संक्रामक है।

उदाहरण 2: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में "x, y का भाजक है" द्वारा परिभाषित सम्बन्ध एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है क्योंकि यह सम्बन्ध स्वतुल्य, प्रति–सममित तथा संक्रामक है।

(vii) पूर्ण क्रम सम्बन्ध (Total order relation): किसी समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक पूर्ण क्रम सम्बन्ध कहलाता यदि :

(a) R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है।

(b) प्रत्येक $a, b \in A$ के लिए या तो $(a,b) \in R$ या $(b,a) \in R$ या $a = b$ सत्य हो।

उदाहरण 1: प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में "$x \leq y$" द्वारा परिभाषित सम्बन्ध एक पूर्ण क्रम सम्बन्ध है जिसके अन्तर्गत $x, y \in N$ के लिये $x \leq y$ या $y \leq x$ या $x = y$ में से एक सर्वदा सत्य है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 6: निम्न सम्बन्ध R और P की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए:

(i) N में, $a\,R\,b \Leftrightarrow b, a$ से विभाजित हो।

(ii) $\alpha\,P\,\beta \Leftrightarrow \alpha \perp \beta$ जहाँ α और β एक समतल की रेखाएँ हैं।

हल : (i) R की परिभाषा के अनुसार $a\,R\,b \Leftrightarrow a|b$.

स्वतुल्यता : R स्वतुल्य सम्बन्ध, क्योंकि प्रत्येक प्राकृत संख्या a के लिए $a|a$

सममितता : R सममित नहीं है क्योंकि किन्हीं $a, b \in N$ के लिये जब a, b को विभाजित करता है तब b, a को विभाजित नहीं कर सकता (जब तक $a = b$ न हो)।

संक्रामकता : R संक्रामक सम्बन्ध है क्योंकि किन्ही $a, b, c, \in N$ के लिए $a|b$ तथा $b|c \Rightarrow a|c$

(ii) P की परिभाषा के अनुसार $\alpha\,P\,\beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$.

स्वतुल्यता : P स्वतुल्य नहीं है क्योंकि किसी भी सरल रेखा α के लिए $\alpha \perp \alpha$ सत्य नहीं है।

सममितता : P सममित सम्बन्ध है क्योंकि किन्हीं दो सरल रेखाओं α, β के लिए $\alpha \perp \beta \Rightarrow \beta \perp \alpha$

संक्रामकता : P संक्रामक नहीं है क्योंकि समतलीय रेखाओं α, β, γ के लिए

$\alpha \perp \beta$ तथा $\beta \perp \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$.

उदाहरण 7: N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है। यदि $N \times N$ में कोई सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित हो कि $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$ जहाँ $a,b,c,d \in N$, तो सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

हल : (i) स्पष्टतः $(a,b)\,R\,(a,b)$ क्योंकि $a+b=b+a$ अतः R स्वतुल्य है।

(ii) माना $(a,b),(c,d) \in N \times N$ तब $(a,b)\,R\,(c,d) \Rightarrow a+d=b+c$

$\Rightarrow c+b=d+a$

$\Rightarrow (c,d)\,R\,(a,b)$ अतः R सममित है।

(iii) माना $(a,b),(c,d),(e,f)\in N\times N$ तथा $(a,b)\,R\,(c,d)$

तथा $(c,d)\,R\,(e,f)$

$\Rightarrow\ a+d=b+c$ तथा $c+f=d+e$

$\Rightarrow\ a+d+c+f=b+c+d+e\ \Rightarrow\ a+f=b+e\ \Rightarrow\ (a,b)\,R\,(e,f)$

अतः R संक्रामक है।

अतः R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

उदाहरण 8: माना $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. X पर तीन सम्बन्ध R_1,R_2,R_3 निम्न प्रकार परिभाषित है :

(i) $R_1=\{(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3),(x_2,x_3),(x_3,x_2)\}$

(ii) $R_2=\{(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3),(x_4,x_4),(x_2,x_3),(x_3,x_4),(x_2,x_4)\}$

(iii) $R_3=\{(x_1,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_3),(x_4,x_4),(x_2,x_3),(x_3,x_2),(x_3,x_4),(x_4,x_3)\}$

इन सम्बन्धों की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।

हल :

(i) स्पष्टतः R_1 सममित तथा संक्रामक है परन्तु स्वतुल्य नहीं है

क्योंकि $x_4\in X$ परन्तु $(x_4,x_4)\notin R_1$

(ii) स्पष्टतः R_2 स्वतुल्य तथा संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है

क्योंकि $(x_3,x_4)\in R_2$ परन्तु $(x_4,x_3)\notin R_2$, $(x_2,x_4)\in R_2$ परन्तु $(x_4,x_2)\notin R_2$

(iii) स्पष्टतः R_3 स्वतुल्य तथा सममित है परन्तु संक्रामक नहीं है

क्योंकि $(x_2,x_3)\in R_3$ तथा $(x_3,x_4)\in R_3$ परन्तु $(x_2,x_4)\notin R_3$

टिप्पणी : इस उदाहरण से स्पष्ट है कि स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता किसी सम्बन्ध के स्वतंत्र गुण है। अर्थात् किसी एक गुण के संतुष्ट होने पर दूसरे गुण का संतुष्ट होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरण 9: पूर्णांकों के समुच्चय I में एक सम्बन्ध $\equiv$ निम्न प्रकार परिभाषित है:

यदि $m,n\in I$ तब $m\equiv n$ (मॉड्यूलों k) $\Leftrightarrow$ $(m-n)$, K से विभाज्य है जहाँ K एक अशून्य निश्चित पूर्णांक है। सिद्ध कीजिए यह एक तुल्यता सम्बन्ध है।

हल :

(i) यदि $a\in I$ तब $a-a=0$ जो स्पष्टतः k से विभाज्य है। अतः $a\equiv a$ (माड k) $\forall a\in I$

अतः दिये गये सम्बन्ध के अन्तर्गत I का प्रत्येक अवयव स्वयं से सम्बन्धित है। अतः यह सम्बन्ध स्वतुल्य है।

(ii) माना $m,n\in I$ तथा $m\equiv n$ (माड k)

तब $(m-n)$, k से विभाज्य होगा अर्थात् $m-n=qk$

जहाँ k एक पूर्णांक है $\therefore n-m=(-q)k$ जहाँ $-q$ पूर्णांक है

अतः $n\equiv m$ (माड k)

अतः यह सम्बन्ध सममित है।

(iii) माना $m,n,p\in I$ जहाँ $m\equiv n$ (माड k) तथा $n\equiv p$ (माड k)

अतः $m-n=qk$ तथा $n-p=rk$ जहाँ $q,r\in I$

अब $m-p=(m-n)+(n-p)=qk+rk=(q+r)k$ जहाँ $(q+r)\in I$ अतः $m\equiv p$ (माड k)

अतः यह सम्बन्ध संक्रामक है।

अतः दिया गया सम्बन्ध एक तुल्यता सम्बन्ध है।

टिप्पणी : यदि $m\equiv n$ (माड k) हो तो इसे "m सर्वांगसम n माड्यूलो k" पढ़ते हैं।

उदाहरण 10: यदि समुच्चय A में R एक तुल्यता सम्बन्ध है तो सिद्ध कीजिए कि इसका प्रतिलोम सम्बन्ध R^{-1} भी एक तुल्यता सम्बन्ध होगा।

हल : क्योंकि R समुच्चय A में एक सम्बन्ध है।

$\therefore \quad R \subseteq A \times A \Rightarrow R^{-1} \subseteq A \times A$

अतः R^{-1} भी A में एक सम्बन्ध है। अब हम R^{-1} को तुल्यता सम्बन्ध सिद्ध करेंगे।

(i) स्वतुल्यता : यदि $a \in A \quad (a,a) \in R, \forall a \in A \quad [\because R \text{ स्वतुल्य हैं}]$

$\Rightarrow (a,a) \in R^{-1}, \forall a \in A \quad \therefore R^{-1}$ एक स्वतुल्य सम्बन्ध है।

(ii) सममितता : माना $(a,b) \in R^{-1}$ तब

$(a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R \Rightarrow (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R^{-1} \quad [\because R \text{ सममित हैं}]$

इस प्रकार $(a,b) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R^{-1}$

अतः R एक सममित सम्बन्ध है।

(iii) संक्रामकता : माना $a,b,c \in A$

तब $(a,b) \in R^{-1}$ तथा $(b,c) \in R^{-1} \Rightarrow (b,a) \in R$ तथा $(c,b) \in R$

$\Rightarrow (c,b) \in R$ तथा $(b,a) \in R \Rightarrow (c,b) \in R$ तथा $(b,a) \in R$

$\Rightarrow (c,a) \in R \ [\because R \text{ संक्रामक है}] \quad \Rightarrow (a,c) \in R^{-1}$

इस प्रकार $(a,b) \in R^{-1}$ तथा $(b,c) \in R^{-1} \Rightarrow (a,c) \in R^{-1}$

$\therefore R^{-1}$ एक संक्रामक सम्बन्ध है। अतः R^{-1} भी एक तुल्यता सम्बन्ध है।

उदाहरण 11: यदि किसी समुच्चय A में दो तुल्यता सम्बन्ध R तथा S परिभाषित हों तो सिद्ध कीजिए कि $R \cap S$ भी A में एक तुल्यता सम्बन्ध होगा।

हल : R तथा S समुच्चय A में परिभाषित सम्बन्ध है। $\therefore R \subseteq A \times A$ तथा $S \subseteq A \times A \Rightarrow R \cap S \subseteq A \times A$

अतः $R \cap S$ भी समुच्चय A में परिभाषित एक सम्बन्ध है।

अब हम $R \cap S$ की समुच्चय A में स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच करते हैं।

(i) स्वतुल्यता : मान a_1 समुच्चय A का कोई अवयव है

तब $a \in A \Rightarrow (a,a) \in R$ तथा $(a,a) \in S \quad [\because R \text{ तथा } S \text{ स्वतुल्य है}]$

$\Rightarrow (a,a) \in R \cap S$

अतः $(a,a) \in R \cap S, \forall a \in A \quad \therefore R \cap S$ समुच्चय A में एक स्वतुल्य सम्बन्ध है।

(ii) सममितता : माना a तथा b समुच्चय A के ऐसे अवयव हैं कि $(a,b) \in R \cap S$ तब

$(a,b) \in R \cap S \Rightarrow (a,b) \in R$ तथा $(a,b) \in S$

$\Rightarrow (b,a) \in R$ तथा $(b,a) \in S \quad [\because R \text{ तथा } S \text{ दोनों सममित है}]$

$\Rightarrow (b,a) \in R \cap S \quad \therefore R \cap S$ समुच्चय A में एक सममित सम्बन्ध है।

(iii) संक्रामकता : माना $a,b,c\, A$ के ऐसे अवयव है कि

$(a,b)\in R\cap S$ तथा $(b,c)\in R\cap S$

$\therefore$ $(a,b)\in R$ तथा $(a,b)\in S$ एवं $(b,c)\in R$ तथा $(b,c)\in S$

अब $(a,b)\in R$ तथा $(b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$ $[\because R$ संक्रामक है$]$

तथा $(a,b)\in S$ तथा $(b,c)\in S \Rightarrow (a,c)\in S$ $[\because S$ संक्रामक है$]$

इस प्रकार $(a,c)\in R$ तथा $(a,c)\in S \Rightarrow (a,c)\in R\cap S$

अर्थात् $(a,b)\in R\cap S$ तथा $(b,c)\in R\cap S \Rightarrow (a,c)\in R\cap S$

$\therefore R\cap S, A$ में संक्रामक सम्बन्ध है। $\therefore R\cap S$ समुच्चय A में एक तुल्यता सम्बन्ध है।

उदाहरण 12: पूर्ण संख्याओं के समुच्चय I में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $x\,R\,y \Leftrightarrow (x-y)$ एक सम पूर्णांक है। सिद्ध कीजिये कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

हल : (i) माना $x\in I$ तब $x-x=0$ जो कि एक सम पूर्णांक है।

अतः $x\,R\,x, \forall x\in I.$

अतः R एक स्वतुल्य सम्बन्ध है।

(ii) माना $x,y\in I$ तथा $x\,R\,y$ तब $(x-y)$ एक सम पूर्णांक है।

अतः $y-x=-(x-y)$ भी एक सम पूर्णांक है।

अतः $y\,R\,x$ इस प्रकार $x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$ $\therefore R$ एक सममित सम्बन्ध है।

(iii) माना $x,y,z\in I$ तथा $x\,R\,y$ एवं $y\,R\,z$

अर्थात् $(x-y)$ एक सम पूर्णांक है तथा $(y-z)$ भी एक सम पूर्णांक है।

अब $x-z=(x-y)+(y-z)=$ सम पूर्णांक + सम पूर्णांक = सम पूर्णांक

अतः $x\,R\,z.$ इस प्रकार $x\,R\,y$ तथा $y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$

अतः R एक संक्रामक सम्बन्ध है। $\therefore R$ एक तुल्यता सम्बन्ध है।

प्रश्नमाला 2.2

1. निम्न सम्बन्धों की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए :
   (i) $m R_1 n \Leftrightarrow m$ तथा n दोनों विषम है, $\forall m,n\in N$
   (ii) समुच्चय A के घात समुच्चय (Power set) $P(A)$ में $A\,R_2\,B \Leftrightarrow A\subseteq B, \forall A,B\in P(A)$
   (iii) त्रिविम समष्टि (Three dimensional Space) में स्थित सरल रेखाओं के समुच्चय S में $L_1R_3L_2 \Leftrightarrow L_1$ तथा L_2 समतलीय है, $\forall L_1,L_2\in S$
   (iv) $a\,R_4 b \Leftrightarrow b, a$ से विभाजित हो, $\forall a,b\in N$
2. अशून्य वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R_0 में सम्बन्ध P निम्न प्रकार परिभाषित है :
   (i) $x\,P\,y \Leftrightarrow x^2+y^2=1$ (ii) $x\,P\,y \Leftrightarrow x\,y=1$
   (iii) $x\,P\,y \Leftrightarrow (x+y)$ एक परिमेय संख्या है (iv) $x\,P\,y \Leftrightarrow x/y$ एक परिमेय संख्या है
   इन संबंधों की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।
3. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में एक सम्बन्ध R_1 निम्न प्रकार परिभाषित है :
   $$(a,b)\in R_1 \Leftrightarrow 1+ab>0, \forall a,b\in R$$

सिद्ध कीजिए कि R_1 स्वतुल्य एवं सममित है परन्तु संक्रामक नहीं है।

4. N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है। यदि $N \times N$ में कोई सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित हो कि $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad = bc \ \forall \ (a,b),(c,d) \in N \times N$ तो सिद्ध कीजिये कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

5. अशून्य परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q_0 में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $aRb \Leftrightarrow a = 1/b, \forall \ a,b \in Q_0$. क्या R एक तुल्यता सम्बन्ध है?

6. माना $X = \{(a,b) | a,b \in R\}$ जहाँ I पूर्णांकों का समुच्चय है। x पर एक सम्बन्ध R_1 निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$(a,b)R_1(c,d) \Leftrightarrow b-d = a-c$$

सिद्ध कीजिए कि R_1 एक तुल्यता सम्बन्ध है।

7. एक समतल में स्थित त्रिभुजों के समुच्चय T में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x,y$ के सदृश्य है। सिद्ध कीजिए R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

8. मान्य $A = \{1,2,3\}$ A में एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$$

R की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।

9. अशून्य सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C_0 में एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$z_1 \, R \, z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} \text{ वास्तविक है।}$$

सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

10. यदि R, समुच्चयों के समूह x में "A, B से असंयुक्त (Disjoint) है" द्वारा परिभाषित सम्बन्ध हो तो R की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।

11. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि aRb यदि a,b का भाजक है। सिद्ध कीजिये कि R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है परन्तु एक पूर्ण क्रम सम्बन्ध नहीं है।

12. बताइए कि N के निम्न उपसमुच्चय सम्बन्ध "x, y को विभाजित करता है" कि लिए पूर्णतया क्रमित समुच्चय है या नही :

(i) $\{2,4,6,8......\}$ (ii) $\{0,2,4,6......\}$ (iii) $\{3,9,5,15......\}$

(iv) $\{5,15,30\}$ (v) $\{1,2,3,4,\}$ (vi) $\{a,b,ab\}, \forall \ a,b \in R$

2.11 फलन (Functions)

अब तक हमने विभिन्न प्रकार के सम्बन्धों का विस्तृत अध्ययन किया है। यहाँ हम एक विशेष प्रकार के सम्बन्ध का अध्ययन करेंगे। जिन्हें फलन (Function) या प्रतिचित्रण (mapping) कहते हैं। गणित के अध्ययन में फलन का एक अत्यन्त महत्वपूर्ण स्थान है तथा यह एक अत्यन्त आधारभूत संकल्पना है।

समुच्चय A से समुच्चय B में सम्बन्ध परिभाषित करते समय हमने देखा है कि A में एक या एक से अधिक अवयव ऐसे हो सकते हैं जो B के किसी भी अवयव से सम्बन्धित न हों। यह भी संभव था कि A का कोई अवयव B के एक या अधिक अवयवों से सम्बन्धित हो। परन्तु यदि समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित किसी सम्बन्ध के अर्न्तगत यदि A का प्रत्येक अवयव B के एक और केवल एक अवयव से सम्बन्धित हो तो ऐसे सम्बन्ध को फलन अथवा प्रतिचित्रण कहते हैं। अतः फलन को हम निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं :

परिभाषा– *किसी समुच्चय A से समुच्चय में B परिभाषित फलन या प्रतिचित्रण एक ऐसा नियम या संगतता* (correspondence) *है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय* (unique) *अवयव से सम्बद्ध होता है।*

फलन या प्रतिचित्रण को हम निम्न प्रकार से निरूपित करते है : $f: A \to B$ अथवा $A \xrightarrow{f} B$ तथा इसे "f समुच्चय A से समुच्चय B में एक फलन है" अथवा "f, समुच्चय A का समुच्चय B में प्रतिचित्रण है" पढ़ते हैं। यदि फलन f के अन्तर्गत A का अवयव 'a' B के अवयव 'b' से सम्बद्ध हो तो b को a का f– प्रतिबिम्ब (f – image) या a पर फलन का मान कहते हैं तथा इसे $b = f(a)$ अथवा $f: a \to b$ द्वारा व्यक्त करते हैं। पुनः अवयव a को अवयव b का पूर्व–प्रतिबिम्ब (Pre-image) कहते हैं।

टिप्पणी : f एक फलन है जबकि $f(x)$, f फलन के अन्तर्गत x का प्रतिबिम्ब या फलन f का x पर मान है।

2.12 क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में फलन (Function as a set of ordered pairs):

फलन एक विशेष प्रकार के सम्बन्ध हैं तथा सम्बन्धों को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में व्यक्त किया जाता है। अतः समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित किसी फलन को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ प्रत्येक क्रमित युग्म का पहला सदस्य A का अवयव हो, दूसरा सदस्य B का अवयव हो, किन्हीं दो क्रमित युग्मों के प्रथम अवयव समान न हों तथा A का प्रत्येक अवयव किसी न किसी क्रमित युग्म का प्रथम अवयव अवश्य हो। इस प्रकार

$$f = \{(a,b) | b = f(a), a \in A, b \in B\}$$

तब f एक फलन होगा यदि

(i) किन्हीं दो क्रमित युग्मों का प्रथम अवयव समान न हो।

(ii) A का प्रत्येक अवयव किसी न किसी क्रमित युग्म का प्रथम अवयव हो।

टिप्पणी : उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित फलन f, $A \times B$ का एक ऐसा उपसमुच्चय है जिसमें A का प्रत्येक अवयव f के क्रमित युग्मों में एक और केवल एक में ही आता है।

उदाहरण 1: माना $A = \{0,1,2,3\}$ तथा $B = \{a,b,c,d\}$

तथा
$$f_1 = \{(0,a),(1,a),(2,c),(3,d)\}$$
$$f_2 = \{(0,b),(1,a),(2,c),(3,d),(0,d)\}$$
$$f_3 = \{(0,a),(1,a),(3,a)\}$$
$$f_4 = \{(0,d),(1,c),(2,c),(3,b)\}$$

तब हम देख सकते हैं कि f_1 तथा f_4, A से B में फलन हैं क्योंकि दोनों के अन्तर्गत A के प्रत्येक अवयव का सम्बन्ध B के एक और केवल एक अवयव से स्थापित किया गया है। परन्तु f_2 फलन नहीं है क्योंकि इसके अन्तर्गत A का अवयव $0, B$ के दो अवयवों b तथा d से सम्बन्धित है। f_3 भी फलन नहीं है क्योंकि इसके अन्तर्गत A के अवयव 2 का सम्बन्ध B के किसी अवयव से नहीं है।

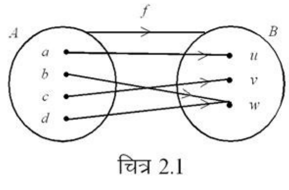
उदाहरण 2: यदि $A = \{a,b,c,d\}, B = \{u,v,w\}$ तथा f, A के अवयवों को B के अवयवों से निम्न प्रकार सम्बद्ध करता हो :

$$f(a) = u, f(b) = w, f(c) = v, f(d) = w$$

तब f, A से B में एक फलन है जिसे

$$f = \{(a,u),(b,w),(c,v),(d,w)\}$$

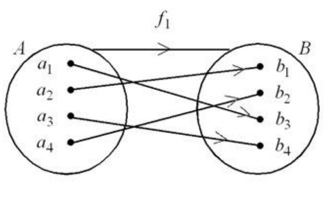
द्वारा भी व्यक्त कर सकते हैं। इसे चित्र 2.1 से भी निरूपित कर सकते हैं।



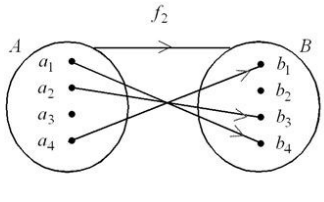
चित्र 2.1

उदाहरण 3: यदि $A = \{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $B = \{b_1,b_2,b_3,b_4\}$ तथा f_1, f_2, f_3 निम्न चित्रों के अनुसार A के अवयवों को B के अवयवों से सम्बद्ध करते हैं :

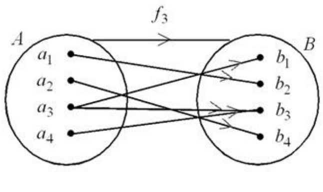
स्पष्ट है कि f_1 एक फलन है जबकि f_2 तथा f_3 फलन नहीं है क्योंकि f_2 के अन्तर्गत a_3 का B में कोई प्रतिबिम्ब नहीं है तथा f_3 के अन्तर्गत a_3 के B में दो प्रतिबिम्ब b_1 तथा b_3 हैं।



चित्र 2.2



चित्र 2.3



चित्र 2.4

उदाहरण 4: यदि $A=\{x,y,z\}$, $B=\{a,b,c\}$ तथा $f=\{(x,b),(y,c),(z,a),(x,c)\}$ तब f, A से B में फलन नहीं है क्योंकि f के दो क्रमित युग्मों (x,b) तथा (x,c) के प्रथम अवयव समान हैं।

उदाहरण 5: यदि $f:R\to R$ तथा $f(x)=\log x$ हो तब f फलन नहीं है क्योंकि $f(-3)=\log(-3)$ एक वास्तविक संख्या नहीं है। परन्तु यदि $f:R^+\to R, f(x)=\log x$ हो तब f एक फलन होगा।

उदाहरण 6: $f:R^+\to R$ तथा $f(x)=\pm\sqrt{x}$ हो तब भी f एक फलन नहीं है।

परन्तु यदि f को $f(x)=+\sqrt{x}$, या $f(x)=-\sqrt{x}$, द्वारा परिभाषित किया जाए तब f, R^+ से R में एक फलन होगा।

2.13 फलन के प्रान्त, सहप्रान्त तथा परिसर (Domain, co-domain and range of a function):

यदि f समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन है तो समुच्चय A को फलन f का प्रान्त तथा समुच्चय B को फलन f का सहप्रान्त कहते हैं। समुच्चय B के उन सभी अवयवों का समुच्चय जो A के अवयवों के प्रतिबिम्ब है, f का परिसर कहलाता है। इसे $f(A)$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। अर्थात् फलन f का परिसर B के उन अवयवों का समुच्चय है जिनके पूर्व–प्रतिबिम्ब A में विद्यमान हैं।

अतः $f(A)=\{f(a), a\in A\}$ स्पष्टतः $f(A)\subseteq B$

यदि फलन को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में व्यक्त किया गया हो तो f के क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों का समुच्चय f का प्रान्त तथा इन युग्मों के द्वितीय अवयवों का समुच्चय का f परिसर कहलाता है। अर्थात्

f का प्रान्त $\{a|(a,b)\in f\}$, f का परिसर $\{b|(a,b)\in f\}$

उदाहरण 1: यदि $A=\{1,2,3,4,\}, B=\{a,b,c,d\}$ तथा $f:A\to B$ क्रमित युग्मों के रूप में निम्न प्रकार परिभाषित हो :

$f=\{(1,a),(2,b),(3,b),(4,c)\}$ तब f का प्रान्त $=\{1,2,3,4,\}=A$

f का सहप्रान्त $=B$

तथा f का परिसर $=\{a,b,c\}$

उदाहरण 2: वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में यदि कोई फलन f इस प्रकार परिभाषित किया जाए कि $f(x)=x^2, \forall x\in R$

तब f का प्रान्त $=R$

f का सहप्रान्त $=R$

f का परिसर $=R^+\cup\{0\}$ जहाँ R^+ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। क्योंकि किसी भी वास्तविक संख्या का वर्ग शून्य अथवा धनात्मक संख्या ही होगा।

उदाहरण 3: यदि $A=\{1,2,3,4\}$ तथा $f:A\to N,\ f(x)=3x+2$ हो तो

$$f(1)=3.1+2=5$$
$$f(2)=3.2+2=8$$
$$f(3)=3.3+2=11$$
$$f(4)=3.4+2=14$$

$\therefore$ f का परिसर $=\{5,8,11,14\}$

उदाहरण 4: यदि $f:R\to R$ तथा $f(x)=sin x$ हो तब f का परिसर $\{x\in R|-1\le x\le 1\}$ क्योंकि हम जानते हैं कि x के सभी वास्तविक मान के लिए $\sin x$ का मान सदा -1 से 1 तक होता है।

उदाहरण 5: यदि $f:R\to R, f(x)=e^x$ हो तब f का परिसर धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R^+ होगा क्योंकि x के सभी वास्तविक मान के लिए e^x सदा एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

2.14 अचर फलन (Constant function):

एक ऐसा फलन जिसके अन्तर्गत उसके प्रान्त का प्रत्येक अवयव सहप्रान्त के एक ही अवयव से सम्बद्ध हो, अचर फलन कहलाता है। स्पष्ट है कि अचर फलन के परिसर में केवल एक ही अवयव होगा।

अतः $f:A\to B$ एक अचर फलन है $\Leftrightarrow f(x)=c, x\in A$ जहाँ c सहप्रान्त B का कोई अवयव है।

उदाहरण 1: $f:N\to R, f(x)=\dfrac{2}{3}, \forall x\in N$ एक अचर फलन है क्योंकि $f(N)=\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

2.15 तत्समक फलन (Identify function):

किसी समुच्चय A से A में परिभाषित ऐसा फलन जिसके अर्न्तगत A का प्रत्येक अवयव स्वयं और केवल स्वयं से सम्बद्ध हो, A का तत्समक फलन कहलाता है, तथा इसे I_A से निरूपित किया जाता है। अतः $I_A(x)=x, \forall x\in A.$

2.16 तुल्य फलन (Equal function):

दो फलन f तथा g तुल्य कहलाते है यदि :

(i) f का प्रान्त $=g$ का प्रान्त

(ii) f का सहप्रान्त $=g$ का सहप्रान्त

(iii) $f(x)=g(x), \forall x$

उदाहरण 1: यदि $A=\{1,2\}, B=\{3,6\}$ तथा $f:A\to B, f(x)=x^2+2$, $g:A\to B, g(x)=3x$ तब f तथा g के प्रान्त तथा सहप्रान्त समान है। यहाँ हम देखते हैं कि

$$f(1)=1^2+2=3=g(1),$$
$$f(2)=2^2+2=6=g(2)$$

अतः $f=g$

उदाहरण 2: यदि $f(x)=x^2$, जब $0\le x\le 1$ तथा $g(x)=x^2$, जब $2\le x\le 8$

यहाँ f तथा g तुल्य फलन नहीं है क्योंकि दोनों फलन के प्रान्त भिन्न है।

उदाहरण 3: यदि $f:R\to R$ इस प्रकार परिभाषित हो कि $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ जब $x\ne 2$ तथा $f(2)=5$ तथा $g:R\to R, g(x)=x+2, \forall x\in R$ तब f तथा g तुल्य फलन नहीं है क्योंकि $f(2)\ne g(2)$

2.17 बहुपद फलन (Polynomial function):

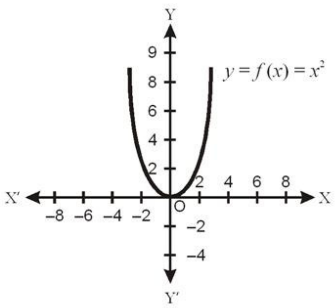
फलन $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, एक बहुपद फलन कहलाता है, यदि R के प्रत्येक x के लिए, $y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, जहाँ n एक ऋणेतर पूर्णांक है तथा $a_0,a_1,a_2,a_2,\ldots,a_n\in\boldsymbol{R}$.

उदाहरणार्थः फलन $y=f(x)=x^2,\ x\in\boldsymbol{R}$ द्वारा फलन $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, को परिभाषित कीजिए। इस परिभाषा का प्रयोग करके नीचे दी गई तालिका को पूरा कीजिए। इस फलन का प्रांत तथा परिसर क्या हैं? f का आलेख भी खींचिए।

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=f(x)=x^2$									

हलः पूरी की हुई तालिका नीचे दी गई है:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=f(x)=x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16



चित्र 2.05

f का प्रान्त $=\{x : x\in R\}$, f का परिसर $=\{x^2 : x\in R\}$, f का आलेख चित्र 2.05 में प्रदर्शित है।

2.18 परिमेय फलन (Rational function):

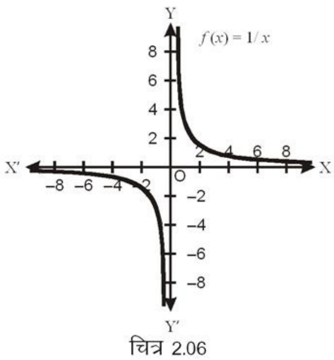
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$, प्रकार के फलन, जहाँ $f(x)$ तथा $g(x)$ एक प्रांत में, x के परिभाषित बहुपद फलन हैं, जिसमें $g(x)\neq 0$ **परिमेय फलन** कहलाते हैं।

उदाहरणार्थः एक वास्तविक फलन $f:\boldsymbol{R}-\{0\}\to\boldsymbol{R}$ की परिभाषा $f(x)=\dfrac{1}{x},\ x\in\boldsymbol{R}-\{0\}$ द्वारा कीजिए। इस परिभाषा का प्रयोग करके निम्नलिखित तालिका को पूर्ण कीजिए। इस फलन का प्रांत तथा परिसर क्या हैं?

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y=$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

हलः पूर्ण की गई तालिका इस प्रकार है:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0.25	0.5	1	1.5	2
$y=$	-0.5	-0.67	-1	-2	4	2	1	0.67	0.5



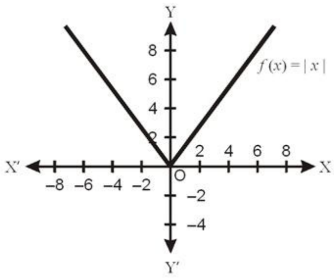
चित्र 2.06

इसका प्रांत, शून्य के अतिरिक्त समस्त वास्तविक संख्याएँ हैं तथा इसका परिसर भी शून्य के अतिरिक्त समस्त वास्तविक संख्याएँ हैं। f का आरेख चित्र 2.06 में प्रदर्शित है।

2.19 मापांक फलन (Modulus function):

$f(x) = |x|$ प्रत्येक $x \in \boldsymbol{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, **मापांक फलन** कहलाता हैं x के ऋण मानों के लिए, $f(x)$ का मान x, के मान के ऋण के बराबर होता है, अर्थात्

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



चित्र 2.07

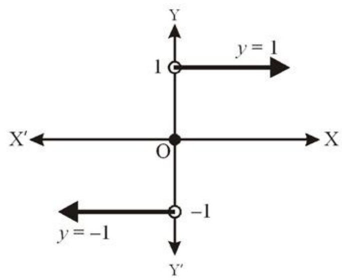
मापांक फलन का आरेख चित्र 2.07 में दिया है। मापांक फलन को **निरपेक्ष मान फलन** भी कहते हैं।

2.20 चिह्न फलन (Signum function):

प्रत्येक $x \in \boldsymbol{R}$, के लिए

$$f(x) = \begin{cases} 1\ ; & \text{यदि} \quad x > 0 \\ 0\ ; & \text{यदि} \quad x = 0 \\ -1; & \text{यदि} \quad x < 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ चिह्न फलन कहलाता है। चिह्न फलन का प्रांत **R** है। परिसर समुच्चय $\{-1, 0, 1\}$ है। चित्र 2.08 में चिह्न फलन का आरेख दर्शाया गया है।



चित्र 2.08

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ यदि $x \neq 0$ तथा 0 यदि $x = 0$

2.21 महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest integer function):

$f(x)=[x],\ x\in \boldsymbol{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\boldsymbol{R}\to \boldsymbol{R},\ x$ से कम या x के बराबर महत्तम पूर्णांक का मान ग्रहण (धारण) करता है ऐसा फलन **महत्तम पूर्णांक फलन** कहलाता है।

$[x]$, की परिभाषा से हम देख सकते हैं कि

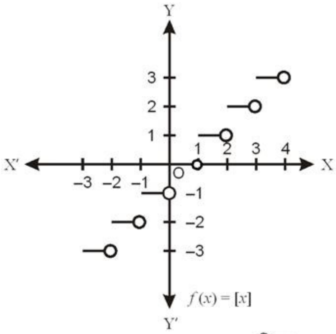
$[x]=-1$ यदि $-1\le x<0$

$[x]=0$ यदि $0\le x<1$

$[x]=1$ यदि $1\le x<2$

$[x]=2$ यदि $2\le x<3$

इस फलन का आरेख चित्र 2.09 में दर्शाया गया है।



$f(x)=[x]\le x$ चित्र 2.09

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 13: यदि $A=\{a,b,c\},\ B=\{1,2,3,4\}$ तो बताइए कि निम्न में से कौन A से B में फलन हैः

(i) $f_1=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ (ii) $f_2=\{(a,2),(b,3),(c,1),(b,4)\}$

(iii) $f_3=\{(a,4),(b,4),(c,1)\}$ (iv) $f_4=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4)\}$

(v) $f_5=\{(a,2),(b,2),(c,2)\}$

हल : (i) f_1 फलन है क्योंकि इसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक और केवल एक अवयव से सम्बद्ध है।

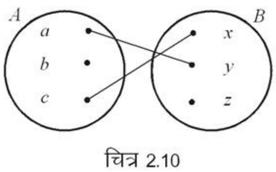
(ii) f_2 फलन नहीं है क्योंकि A का अवयव b, B के दो अवयवों 3 तथा 4 से सम्बद्ध हैं।

(iii) f_3 फलन है।

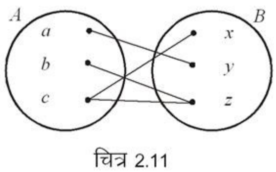
(iv) f_4 फलन नहीं है क्योंकि A का अवयव a, B के एक से अधिक अवयवों से सम्बद्ध है। साथ ही A के अवयव b तथा c, B के किसी अवयव से सम्बद्ध नहीं है।

(v) f_5 फलन है। यह A से B में एक अचर फलन है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक निश्चित अवयव 2 से सम्बद्ध है।

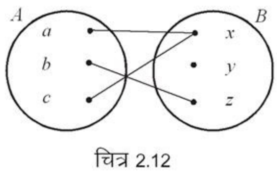
उदाहरण 14: कारण सहित बताइये कि निम्न चित्रों में से कौनसा चित्र A से B में फलन परिभाषित करता है जहाँ $A=\{a,b,c\},\ B=\{x,y,z\}$.



चित्र 2.10



चित्र 2.11



चित्र 2.12

हल : चित्र 2.10 में क्योंकि A में अवयव b का B में कोई प्रतिबिम्ब नहीं है अतः यह A से B में फलन परिभाषित नहीं करता है।

चित्र 2.11 में A के अवयव c के B में x तथा z दो प्रतिबिम्ब है। अतः यह भी A से B में फलन परिभाषित नहीं करता।

चित्र 2.12 में A का प्रत्येक अवयव B का में एक और केवल एक प्रतिबिम्ब है अतः यह A से B में एक फलन परिभाषित करता है।

उदाहरण 15: वह प्रान्त ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=2x^2-1$ तथा $g(x)=1-3x$ बराबर हों। वह प्रान्त भी ज्ञात कीजिए जिसमें से फलन बराबर नहीं है।

हल : f तथा g के अभीष्ट प्रान्त के लिए $f(x)=g(x)$

$\Rightarrow\quad 2x^2-1=1-3x \quad \Rightarrow 2x^2+3x-2=0 \quad \Rightarrow (2x-1)(x+2)=0 \quad \Rightarrow x=1/2,\ x=-2$

अतः प्रान्त $\left\{\frac{1}{2},-2\right\}$ के लिए फलन f तथा g तुल्य होंगे।

यदि फलन f तथा g वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R से R में परिभाषित हों तो दोनों तुल्य नहीं होंगे।

उदाहरण 16: वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R से R में परिभाषित निम्न फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए

(i) $f(x)=1-|x-2|$ (ii) $g(x)=1+3\cos 2x$ (iii) $h(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

हल : (i) $f(x)=1-|x-2|$

हल जानते हैं कि $0\le|x-2|<\infty, \forall x\in R$

$\Rightarrow \quad -\infty<-|x-2|\le 0, \forall x\in R$ [-1 से गुणा करने पर]

$\Rightarrow \quad -\infty<1-|x-2|\le 1, \forall x\in R$ [$+1$ जोड़ने पर]

$\Rightarrow \quad -\infty<f(x)\le 1, \forall x\in R$ अतः f का परिसर $=(-\infty,1]$

(ii) $g(x)=1+3\cos 2x$

हम जानते हैं कि $-1\le\cos 2x\le 1$, $\forall x\in R$

$\Rightarrow \quad -3\le 3\cos 2x\le 3, \forall x\in R$ [3 से गुणा करने पर]

$\Rightarrow \quad -2\le 1+3\cos 2x\le 4, \forall x\in R$ [1 जोड़ने पर]

$\Rightarrow \quad -2\le g(x)\le 4$

अतः g का परिसर $=[-2,4]$

(iii) $h(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

माना $y=h(x)$ तब $y=\dfrac{x}{1+x^2}\Rightarrow x^2y-x+y=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y}$, $y\ne 0$, $y=0$ तभी होगा जब $x=0$.

अब x वास्तविक होगा यदि $1-4y^2\ge 0$ अर्थात् यदि $4y^2-1\le 0$ $\Rightarrow y^2-\dfrac{1}{4}\le 0$

$\Rightarrow \quad \left(y-\dfrac{1}{2}\right)\left(y+\dfrac{1}{2}\right)\le 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad y\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

अर्थात् h का परिसर $=[-1/2,1/2]$

उदाहरण 17: निम्नलिखित सम्बन्धों को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में लिखिए और ज्ञात कीजिए कि इनमें से कौन से फलन है :

(i) $\{(x,y)|y=3x, x\in\{1,2,3\}, y\in\{3,6,9,12\}\}$

(ii) $\{(x,y)|y=x+2, x,y\in N\}$

(iii) $\{(x,y)|y>x+1, x\in\{1,2\}, y\in\{2,4,6\}\}$

(iv) $\{(x,y)|y=x^2, x,y\in N\}$

हल : (i) दिया गया है $y=3x$ अतः $x=1,2,3$ रखने पर $y=3,6,9$

अतः क्रमित युग्मों के रूप में सम्बन्ध $=\{(1,3),(2,6),(3,9)\}$ स्पष्टतः यह एक फलन है।

(ii) दिया गया है $y = x+2, x, y, \in N$

$x = 1, 2, 3, \ldots$ रखने पर $y = 3, 4, 5 \ldots$

अतः क्रमित युग्मों के रूप में सम्बन्ध $= \{(1,3), (2,4), (3,5), \ldots, (x, x+2), \ldots\}$ स्पष्टतः यह भी एक फलन है।

(iii) $y > x+1$ अतः $x = 1$ के लिये $y = 4, 6$ तथा $x = 2$ के लिये $y = 4, 6$

अतः क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में सम्बन्घ $= \{(1,4), (1,6), (2,4), (2,6)\}$

यह फलन नहीं है क्योंकि 1 तथा 2 दोनों दो अवयवों से सम्बद्ध है।

(iv) $y = x^2, x \in N$ अतः $x = 1, 2, 3, \ldots$ लेने पर $y = 1, 4, 9, \ldots$

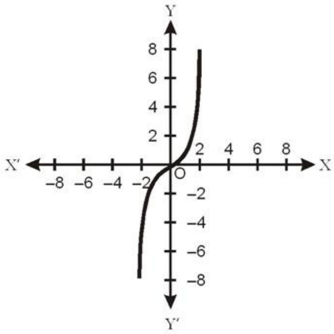
अतः क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में सम्बन्ध $= \{(1,1), (2,4), (3,9), \ldots (x, x^2), \ldots\}$

स्पष्टतः यह भी एक फलन है।

उदाहरण 18: $f(x) = x^3,\ x \in \boldsymbol{R}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ का आलेख खींचिए।

हलः यहाँ पर $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(-1) = -1,\ f(2) = 8,\ f(-2) = -8,\ f(3) = 27,\ f(-3) = -27$ इत्यादि।

$f = \{(x,\ x^3) : x \in \boldsymbol{R}\}$ f का आरेख चित्र 2.13 में खींचा गया है।



चित्र 2.13

प्रश्नमाला 2.3

1 कारण सहित बताइए कि निम्न सम्बन्धों में कौन से फलन है और कौन से नहीं:

(a) $\{(1,2), (2,3), (3,4), (2,1)\}$

(b) $\{(a,0), (b,0), (c,1), (d,1)\}$

(c) $\{(1,a), (2,b), (1,b), (2,a)\}$

(d) $\{(a,a), (b,b), (c,c)\}$

(e) $\{(a,b)\}$

(f) $\{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4)\}$

(g) $\{(1,4), (2,4), (3,4), (4,4)\}$

(h) $\{(x,y) | x, y \in R \wedge y^2 = x\}$

(i) $\{(x,y) | x, y \in R \wedge x^2 = y\}$

(j) $\{(x,y) | x, y \in R \wedge x = y^3\}$

(k) $\{(x,y) | x, y \in R \wedge y = x^3\}$

2. यदि $f: R \to R, f(x) = x^2$ हो तो ज्ञात कीजिए:

(i) f का परिसर (ii) $\{x | f(x) = 4\}$ (iii) $\{y | f(y) = -1\}$

3. माना $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ तथा फलन f, A से R में $f(x) = x^2 + 1$ द्वारा परिभाषित है, f का परिसर ज्ञात कीजिए।

4. माना $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ तथा $f: A \to Z$, जहाँ $f(x) = x^2 + 2x - 3$ तब ज्ञात कीजिये :

(i) f का परिसर (ii) $6, -3$ तथा 5 के पूर्व–प्रतिबिम्ब

5. यदि $f: R \to R$, जहाँ $f(x) = e^x$ तब ज्ञात कीजिए:

(a) R का f – प्रतिबिम्ब समुच्चय (b) $\{y | f(y) = 1\}$

(c) क्या $f(x+y) = f(x) f(y)$ सत्य है?

6. यदि $f: R^+ \to R$ जहाँ $f(x) = \log x$, जहाँ R^+ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तो ज्ञात कीजिए:

(a) $f(R^+)$ (b) $\{y | f(y) = -2\}$ (c) क्या $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ सत्य है ?

7. यदि $f = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{1+x^2} \right), x \in R \right\}$ R से R में एक फलन है तो f का परिसर ज्ञात कीजिए।

8. क्या $g = \{(1,1), (2,3), (3,5), (4,7)\}$ एक फलन है ?

यदि g को $g(x) = \alpha x + \beta$ सूत्र द्वारा व्यक्त किया जाये तो α तथा β के मान ज्ञात कीजिए।

9. अचर फलन तथा चिह्न फलन में अन्तर बताइए।

2.22 वास्तविक फलनों का बीजगणित (Algebra of real functions):

इस अनुच्छेद में, हम सीखेंगे कि किस प्रकार दो वास्तविक फलनों को जोड़ा जाता है, एक वास्तविक फलन को दूसरे में से घटाया जाता है, एक वास्तविक फलन को किसी अदिश (यहाँ आदिश का अभिप्राय वास्तविक संख्या से है) से गुणा किया जाता है, दो वास्तविक फलनों का गुणा किया जाता है तथा एक वास्तविक फलन को दूसरे से भाग दिया जाता है।

(i) दो वास्तविक फलनों का योग: मान लीजिए कि $f: X \to \mathbf{R}$ तथा $g: X \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \mathbf{R}$. तब हम $(f+g): X \to \mathbf{R}$ को, सभी $x \in X$ के लिए, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, द्वारा परिभाषित करते हैं।

(ii) एक वास्तविक फलन में से दूसरे को घटाना: मान लीजिए कि $f: X \to \mathbf{R}$ तथा $g: X \to \mathbf{R}$ कोई दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset \mathbf{R}$. तब हम $(f-g): X \to \mathbf{R}$ को, सभी $x \in X$ के लिए, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, द्वारा परिभाषित करते हैं।

(iii) एक अदिश से गुणा: मान लीजिए कि $f: X \to \mathbf{R}$ एक वास्तविक मान फलन है तथा α एक अदिश है। यहाँ अदिश से हमारा अभिप्राय किसी वास्तविक संख्या से है। तब गुणनफल αf, X से **R** में एक फलन है, जो $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in X$ से परिभाषित होता है।

(iv) दो वास्तविक फलनों का गुणन: दो वास्तविक फलनों $f: X \to \mathbf{R}$ तथा $g: X \to \mathbf{R}$ का गुणनफल (या गुणा) एक फलन $fg: X \to \mathbf{R}$ है, जो सभी $(fg)(x) = f(x) g(x)$, $x \in X$ द्वारा परिभाषित है। इसे **बिंदुशः गुणन** भी कहते हैं।

(v) दो वास्तविक फलनों का भागफल: मान लीजिए कि f तथा g, $X \to \mathbf{R}$ द्वारा परिभाषित, दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset R$. f का g से भागफल, जिसे f/g से निरूपित करते हैं, एक फलन है, जो सभी $x \in X$ जहाँ $g(x) \neq 0$, के लिए, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, द्वारा परिभाषित है।

2.23 फलनों के प्रकार (Kinds of functions):

यदि f समुच्चय A से समुच्चय B में एक फलन है तो फलन की परिभाषा के अनुसार f के अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक और केवल एक अवयव से सम्बद्ध होता है। इस प्रकार हम A के भिन्न भिन्न अवयवों को B के भिन्न भिन्न अवयव से सम्बद्ध कर सकते हैं। यह भी संभव है कि A के दो या अधिक के अवयव B के एक अवयव से सम्बद्ध हो।

जहाँ तक B के अवयवों के पूर्व–प्रतिबिम्ब का प्रश्न है, यह संभव है कि B के कुछ अवयवों का A में कोई पूर्व–प्रतिबिम्ब न हो। यह भी संभव है कि B के एक या अधिक अवयवों का A में एक या एक से अधिक पूर्व–प्रतिबिम्ब हों।

इन सभी संभावनाओं के आधार पर A से B में परिभाषित फलनों के विभिन्न प्रकार परिभाषित किए गए हैं।

(i) एकैकी फलन (One-one function or Injective function):

यदि $f : A \to B$ एक फलन हो तो f एकैकी फलन कहलाता है यदि f के अन्तर्गत A के भिन्न भिन्न अवयवों के B में भिन्न भिन्न प्रतिबिम्ब हों। अर्थात्

$f : A \to B$ एकैकी है यदि $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b), \forall a,b \in A$, दूसरे शब्दों में

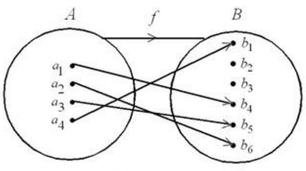
$f : A \to B$ एकैकी है यदि $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \forall a,b \in A$

उदाहरण 1: फलन f जो विश्व के प्रत्येक देश को उसकी राजधानी से सम्बद्ध करता है, एक एकैकी फलन है क्योंकि भिन्न भिन्न देश की राजधानियाँ भिन्न भिन्न हैं।

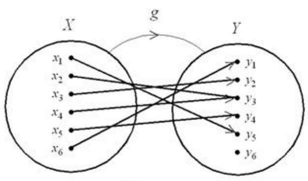
उदाहरण 2: यदि $A = \{1,2,3,4\}, B = \{2,5,8,11,13\}$ तथा $f : A \to B, f(x) = 3x - 1$

द्वारा परिभाषित हो तब $f(1) = 2,\ f(2) = 5, f(3) = 8, f(4) = 11$ इस प्रकार हम देखते हैं कि f के अन्तर्गत A के भिन्न भिन्न अवयवों के B में भिन्न भिन्न प्रतिबिम्ब हैं। अतः f एक एकैकी फलन है।

उदाहरण 3: यदि $f : A \to B$ तथा $g : X \to Y$ निम्न चित्रों से प्रदर्शित होने वाले दो फलन हो :



चित्र 2.14



चित्र 2.15

स्पष्टतः $f : A \to B$ एक एकैकी फलन है परन्तु $g : X \to Y$ एकैकी फलन नहीं है क्योंकि x के दो अवयवों x_2 तथा x_4 का Y में एक ही प्रतिबिम्ब y_3 है।

उदाहरण 4: फलन $f : N \to Z$ जहाँ $f(x) = x^2$ एक एकैकी फलन है क्योंकि $x, y \in N, x \neq y \Rightarrow x^2 \neq y^2 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ परन्तु $f : Z \to Z, f(x) = x^2$ एकैकी फलन नहीं है क्योंकि $3, -3 \in Z$ ऐसे अवयव हैं कि $3 \neq -3$ परन्तु $f(-3) = 9 = f(3)$ अर्थात् -3 तथा 3 का प्रतिबिम्ब एक ही अवयव 9 है।

टिप्पणी : यदि $f : A \to B$ कोई फलन हो तो $x = y \Rightarrow f(x) = f(y), A$ के सभी अवयवों x, y के लिए सत्य है परन्तु $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ केवल तभी सत्य होगा जब f एकैकी फलन है।

(ii) बहु–एकी फलन (Many-one function):

समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन f बहु–एकी फलन कहलाता है यदि f के अन्तर्गत A के दो या अधिक अवयवों का B में एक प्रतिबिम्ब है। अतः $f : A \to B$ बहु–एकी फलन है यदि A में कम से कम दो a तथा b ऐसे अवयव विद्यमान हैं कि $a \neq b$ परन्तु $f(a) = f(b)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि $f : A \to B$ एक एकैकी फलन नहीं है तो यह अवश्य ही बहु–एकी होगा।

उदाहरण 1: यदि $A=\{1,5,6,8\}$ तथा $B=\{2,3,4,7\}$ हो तथा $f:A\to B$ निम्न प्रकार परिभाषित हो:

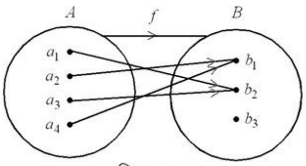
$$f(1)=3, f(5)=4, f(6)=3 \text{ तथा } f(8)=2$$

तब f बहु–एकी फलन है क्योंकि A के दो अवयवों 1 तथा 6 का B में एक ही प्रतिबिम्ब 3 है।

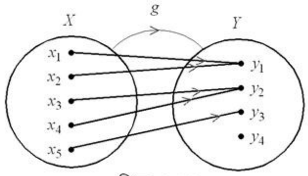
उदाहरण 2: फलन $f:Z\to Z, f(x)=|x|$ बहु–एकी फलन है क्योंकि किसी $a\in Z$ के लिए $a\neq -a$ परन्तु $f(a)=f(-a)$ $[\because |a|=|-a|]$.

उदाहरण 3: $f:R\to R,\ f(x)=\sin x$ एक बहु–एकी फलन है क्योंकि $\sin x$ एक **आवर्ती फलन (Periodic function)** है अर्थात् एक से अधिक कोणो के sine का मान समान हो सकता है।

उदाहरण 4: यदि $f:A\to B$ तथा $g:X\to Y$ निम्न चित्रों से प्रदर्शित हो :



चित्र 2.16



चित्र 2.17

तब f तथा g दोनों ही बहु–एकी फलन है।

(iii) आच्छादक फलन (Onto function or Surjective function):

समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन f आच्छादक कहलाता है यदि B का प्रत्येक अवयव A के किसी न किसी अवयव का प्रतिबिम्ब हो अर्थात् B के प्रत्येक अवयव का A में कम से कम एक पूर्व–प्रतिबिम्ब विद्यमान हो।

अतः $f:A\to B$ एक आच्छादक फलन होगा यदि $b\in B\Rightarrow \exists a\in A$ ताकि $f(a)=b.$

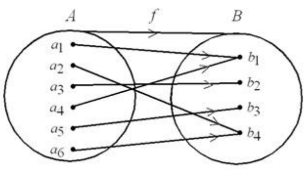
स्पष्टतः यदि f आच्छादक है तब $f(A)=B$ अर्थात् f का सहप्रान्त $=$ f का परिसर

टिप्पणी : यदि किसी फलन $f:A\to B$ के लिये f के सहप्रान्त तथा परिसर बराबर नहीं हो तो f आच्छादक नहीं होगा।

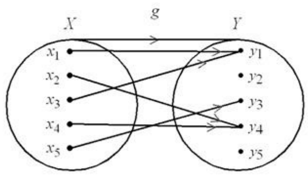
उदाहरण 1: फलन $f:Q\to Q, f(x)=2x$ एक आच्छादक फलन है क्योंकि सहप्रान्त Q के प्रत्येक अवयव x के लिये उसका पूर्व–प्रतिबिम्ब $x/2$ प्रान्त Q में विद्यमान है।

उदाहरण 2: यदि $A=\{-1,1,-2,2\}, B=\{1,4\}$ तथा $f:A\to B, f(x)=x^2$ तब f आच्छादक फलन है क्योंकि $f(A)=B$

उदाहरण 3: यदि $f:A\to B$ तथा $g:X\to Y$ निम्न चित्रों से प्रदर्शित हों :



चित्र 2.18



चित्र 2.19

तब फलन f एक आच्छादक फलन है जबकि g आच्छादक फलन नहीं है क्योंकि Y के दो अवयवों y_2 तथा y_5 का समुच्चय X में कोई पूर्व–प्रतिबिम्ब नहीं है।

उदाहरण 4: $f:R\to R, f(x)=x^2$ आच्छादक फलन नहीं है क्योंकि $f(R)=R^+\cup\{0\}\neq R$

(iv) अन्तर्क्षेपी फलन (Into function):

समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन f अन्तर्क्षेपी फलन कहलाता है यदि B में कम से कम एक ऐसा अवयव विद्यमान हो जो A के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब नहीं हो अर्थात् जिसका कोई पूर्व–प्रतिबिम्ब A में विद्यमान नहीं हो। अतः f अन्तर्क्षेपी है यदि $f(A) \neq B$

टिप्पणी : यदि कोई फलन $f: A \rightarrow B$ आच्छादक नहीं है तो वह अवश्य ही अन्तर्क्षेपी होगा।

उदाहरण 1: $f: R \rightarrow R, f(x) = |x|$ अन्तर्क्षेपी फलन है क्योंकि $f(R) = R^{+} \cup \{0\} \neq R$

उदाहरण 2: $f: R \rightarrow R, f(x) = e^{x}$ अन्तर्क्षेपी फलन है क्योंकि

$$f(R) = R^{+} \neq R \left[\because e^{x} > 0 \; \forall x \in R\right]$$

उदाहरण 3: $f: R \rightarrow R, f(x) = cos\, x$ एक अन्तर्क्षेपी फलन है क्योंकि

$$f(R) = \{x \in R | -1 \leq x \leq 1\} \neq R$$

(v) एकैकी आच्छादक फलन (One-one onto function or Bijective function):

समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन f एकैकी आच्छादक कहलाता है यदि f एकैकी के साथ साथ आच्छादक भी हो। अर्थात् $f: A \rightarrow B$ एक एकैकी आच्छादक फलन होगा यदि :

(a) f एकैकी है अर्थात् $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \forall a, b \in A$

(b) f आच्छादक है अर्थात् $\forall\, b \in B \Rightarrow \exists a \in A$ ताकि $f(a) = b$

उदाहरण 1: यदि Z_{+} धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय हो तथा E धनात्मक सम संख्याओं का समुच्चय हो तथा $f: Z_{+} \rightarrow E, f(x) = 2x$ द्वारा परिभाषित हो तब f एक एकैकी आच्छादक फलन है क्योंकिः $x, y \in Z_{+}$ तथा $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y$ अतः f एक एकैकी फलन है।

साथ ही f आच्छादक भी है क्योंकि $y \in E \Rightarrow \exists \frac{y}{2} \in z^{+}$ ताकि $f\left(\frac{y}{2}\right) = 2\frac{y}{2} = y$

उदाहरण 2: $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x + 3$ एक एकैकी आच्छादक फलन है क्योंकि $x, y \in R$ के लिये $f(x) = f(y) \Rightarrow 2x + 3 = 2y + 3 \Rightarrow x = y$ अतः f एकैकी है।

पुनः माना $y \in R$ (सहप्रान्त) यदि संभव हो तो माना कि y का पूर्व प्रतिबिम्ब x हो तब $f(x) = y$ अर्थात् $2x + 3 = y$ या $x = \frac{y-3}{2} \in R$ अर्थात् f आच्छादक है।

उदाहरण 3: यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $f: A \rightarrow A, f(x) = 5 - x$ हो तो $f = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$ स्पष्टतया f के अन्तर्गत A के भिन्न भिन्न अवयवों के प्रतिबिम्ब भिन्न भिन्न हैं। साथ ही $f(A) = A$ अतः f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण 4: यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{1, 4, 9, 16\}$ तथा $f: A \rightarrow B, f(x) = x^{2}$ तब स्पष्टतः f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 19: मान लीजिए कि $f(x) = x^{2}$ तथा $g(x) = 2x + 1$ दो वास्तविक फलन है। $(f+g)(x), (f-g)(x), (f/g)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हलः स्पष्टतः $(f+g)(x) = x^{2} + 2x + 1, (f-g)(x) = x^{2} - 2x - 1,$

$$(fg)(x) = x^{2}(2x+1) = 2x^{3} + x^{2}, \; (f/g)(x) = \frac{x^{2}}{2x+1}, \; x \neq \frac{1}{2}$$

उदाहरण 20: मान लीजिए कि $f(x)=\sqrt{x}$ तथा $g(x)=x$ ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं, तो $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(fg)(x)$ और $(f/g)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ हमें निम्नलिखित परिणाम मिलते है:

$$(f+g)(x)=\sqrt{x}+x,\ \ (f-g)(x)=\sqrt{x}-x,$$

$$(fg)x=\sqrt{x}(x)=x^{3/2} \text{ और } \left(\frac{f}{g}\right)(t)=\frac{\sqrt{x}}{x}=x^{-\frac{1}{2}},\ x\neq 0$$

उदाहरण 21: कारण सहित निम्न फलनों का एकैकी, बहु–एकी, अन्तर्क्षेपी अथवा आच्छादक के रूप में वर्गीकरण कीजिए:

(i) $f:N\to N,\ f(x)=x^2$ (ii) $f:Z\to Z,\ f(x)=2x+1$

(iii) $f:R\to R,\ f(x)=x^3+3$

हल : (i) माना $x_1,x_2\in N$ तब $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1=x_2$

अतः f एकैकी है।

पुनः $f(N)=\{1^2,2^2,3^2,4^2,...\}=\{1,4,9,16,...\}\neq N$ (सहप्रान्त)

अतः f अन्तर्क्षेपी फलन है।

अतः f एक एकैकी अन्तर्क्षेपी फलन है।

(ii) माना $x_1,x_2\in Z$ तब $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$ अतः f एक एकैकी फलन है। पुनः माना $y\in Z$ (सहप्रान्त) यदि संभव हो तो माना कि f के अन्तर्गत y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो। तब $f(x)=y$ या $2x+1=y\Rightarrow x=y-1/2$

अब यदि $y\in Z$ तब यह आवश्यक नहीं है कि $(y-1/2)\in Z$ अर्थात् Z (सहप्रान्त) में ऐसे कई अवयव हो सकते हैं जिनका कोई पूर्व–प्रतिबिम्ब Z (प्रान्त) में विद्यमान नहीं है। अतः f एक अन्तर्क्षेपी फलन है।

अतः f एक एकैकी अन्तर्क्षेपी फलन है।

(iii) यदि $x_1,x_2\in R$ तब $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^3+3=x_2^3+3\Rightarrow x_1^3=x_2^3\Rightarrow x_1=x_2$ अतः f एक एकैकी फलन है। पुनः माना $y\in R$ (सहप्रान्त) यदि संभव हो तो माना f के अन्तर्गत y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो तब $f(x)=y$ अर्थात् $x^3+3=y$ या $x=(y-3)^{1/3}$

अब $y\in R\Rightarrow (y-3)^{1/3}\in R$

अतः R (सहप्रान्त) के प्रत्येक अवयव का पूर्व–प्रतिबिम्ब R (प्रान्त) में विद्यमान है। अतः f एक आच्छादक फलन है। इस प्रकार f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण 22: यदि $X=\left\{x:\left|x\in \boldsymbol{R} \text{ तथा } -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right.\right\}$ तथा $Y=\{y|y\in \boldsymbol{R} \text{ तथा } -1\leq x\leq 1\}$ तब सिद्ध कीजिये कि $f:X\to Y,\ f(x)=\sin x$ द्वारा परिभाषित फलन एक एकैकी आच्छादक फलन है।

हल : माना $x_1,x_2\in X$ तब $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \sin x_1=\sin x_2\Rightarrow x_1=x_2$ $\left[\because -\frac{\pi}{2}\leq x_1,x_2\leq\frac{\pi}{2}\right]$

अतः f एक एकैकी फलन है।

पुनः माना $y\in Y$ माना f के अन्तर्गत y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो।

तब $f(x)=y \Rightarrow \sin x = y \Rightarrow x = \sin^{-1} y$ अब चूँकि $-1 \le y \le 1 \therefore \sin^{-1} y$ का एक मान $-\pi/2$ तथा $\pi/2$ के मध्य अवश्य स्थित होगा। अर्थात् $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

अर्थात् $x \in X$ अतः f एक आच्छादक फलन है।

इस प्रकार f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण 23: निम्न फलनों को एकैकी, बहु–एकी, अन्तर्क्षेपी अथवा आच्छादक के रूप में वर्गीकृत कीजियेः

(i) $f: R \to R, f(x) = 1 + x^2$

(ii) $f: N \to N, f(n) = \begin{cases} (n+1)/2 & \text{यदि } n \text{ विषम है} \\ n/2 & \text{यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$

(iii) $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ -1 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$

हल : (i) माना $x_1, x_2 \in R$ तब

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + x_1^2 = 1 + x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

अतः f एकैकी नहीं है। इसलिये f एक बहु–एकी फलन है।

पुनः माना $x \in R$ (सहप्रान्त) यदि संभव हो तो माना y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो।

तब $f(x) = y \Rightarrow x^2 + 1 = y \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$

यदि $y < 1$ तब हमें x का कोई वास्तविक मान प्राप्त नहीं होगा। अतः R के अनेक अवयवों के पूर्व–प्रतिबिम्ब R (प्रान्त) में विद्यमान नहीं है। अतः f एक अन्तर्क्षेपी फलन है।

इस प्रकार f एक बहु–एकी अन्तर्क्षेपी फलन है।

(ii) $3, 4 \in N$ फलन की परिभाषा के अनुसार

$$f(3) = \frac{3+1}{2} = 2, \quad f(4) = \frac{4}{2} = 2$$

अर्थात् $f(3) = f(4)$

अतः f एक बहु–एकी फलन है।

पुनः हम देखते हैं कि $f(1) = 1, f(3) = 2, \ldots .. f(2n-1) = n$ इत्यादि। अतः f का परिसर $= N$ अतः f एक आच्छादक फलन है।

इस प्रकार f एक बहु–एकी आच्छादक फलन है।

(iii) हम जानते हैं कि वास्तविक संख्याएँ या तो परिमेय या अपरिमेय होती है। फलन की परिभाषा के अनुसार सभी परिमेय संख्याओं का प्रतिबिम्ब 1 तथा सभी अपरिमेय संख्याओं का प्रतिबिम्ब –1 है। अतः f एक बहु–एकी फलन है। साथ ही f का परिसर $= \{-1, 1\} \ne R$ अतः f एक अन्तर्क्षेपी फलन है।

इस प्रकार f एक बहु–एकी अन्तर्क्षेपी फलन है।

उदाहरण 24: निम्न फलनों का एकैकी, बहु–एकी आच्छादक अथवा अन्तर्क्षेपी के रूप में वर्गीकरण कीजिए तथा उनके परिसर भी ज्ञात कीजिए :

(i) $f: C \to R, f(z) = |z|$

(ii) $f: R_0 \to R_0, f(x) = \frac{1}{x}$

(iii) $f: R \to R, f(x) = ax + b, \ a, \ b \in R, a \ne 0$

हलः (i) हम देखते हैं कि $z_1 = x+iy$ तथा $z_2 = x-iy\,(y \neq 0)$ प्रान्त C के भिन्न भिन्न अवयव है परन्तु

$$\left.\begin{aligned} f(z_1) &= |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \\ f(z_2) &= |x-iy| = \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad f(z_1) = f(z_2)$$

इस प्रकार f के प्रान्त के दो भिन्न अवयवों का एक प्रतिबिम्ब है। अतः f एक बहु–एकी फलन है।

पुनः f का परिसर $= \{|z| : z \in c\} = R^+ \cup \{0\} \neq R$ (सहप्रान्त)

$\therefore$ f आच्छादक फलन नहीं है।

इस प्रकार f एक बहु–एकी अन्तर्क्षेपी फलन है।

(ii) यदि $x_1, x_2 \in R_0$ तब $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ अतः f एक एकैकी फलन है।

पुनः माना $y \in R_0$ (सहप्रान्त) तब $1/y \in R_0$ (प्रान्त) ताकि $f(1/y) = y$

$\therefore$ f एक आच्छादक फलन है।

अतः f का परिसर = सहप्रान्त $= R_0$ तथा f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

(iii) माना $x_1, x_2 \in R$ तब $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ax_1 + b = ax_2 + b$

$\Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ $[\because a \neq 0]$ $\therefore f$ एक एकैकी फलन है।

पुनः माना $y \in R$ (सहप्रान्त) यदि संभव हो तो माना y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो।

तब $f(x) = y$ or $ax + b = y$ or $x = \dfrac{y-b}{a} \in R$ $\qquad [\because a \neq 0]$

अतः सहप्रान्त R के प्रत्येक अवयव का पूर्व–प्रतिबिम्ब R (प्रान्त) में विद्यमान है। अतः f एक आच्छादक फलन है। इस प्रकार f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

उदाहरण 25: यदि $A = R - \{2\}$ तथा $B = R - \{1\}$ तथा $f: A \to B, f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ द्वारा परिभाषित हो तो सिद्ध कीजिए कि f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

हल : यदि $x, y \in A$ तब $f(x) = f(y) \Rightarrow \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{y-1}{y-2}$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(y-2) = (x-2)(y-1)$$

$$\Rightarrow \quad xy - y - 2x + 2 = xy - x - 2y + 2$$

$$\Rightarrow \quad -y - 2x = -x - 2y \Rightarrow x = y$$

अतः f एकैकी है।

पुनः $y \in B$ माना यदि संभव हो तो माना y का पूर्व–प्रतिबिम्ब x हो तब

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = y \Rightarrow x - 1 = y(x-2) \Rightarrow x = \frac{1-2y}{1-y}$$

स्पष्टतः क्योंकि $y \neq 1$, x एक वास्तविक संख्या है। साथ ही $\dfrac{1-2y}{1-y} \neq 2$ क्योंकि $\dfrac{1-2y}{1-y} = 2$ लेने पर हमें $1 = 0$ प्राप्त होता है जो अर्थहीन है।

$\therefore$ B के प्रत्येक अवयव का A में पूर्व–प्रतिबिम्ब विद्यमान है। अतः f आच्छादक है।

इस प्रकार एक एकैकी आच्छादक फलन है।

प्रश्नमाला 2.4

1. कारण सहित निम्न फलनों का एकैकी, बहु–एकी, अन्तर्क्षेपी अथवा आच्छादक रूप में वर्गीकरण कीजिये :

(i) $f: Q \to Q,\ f(x) = 3x + 7$ (ii) $f: C \to R,\ f(x+iy) = x$

(iii) $f: R \to [-1, 1],\ f(x) = \sin x$ (iv) $f: N \to Z,\ f(x) = |x|$

2. यदि $A = \{x | -1 \le x \le 1\} = B$ तो A से B में परिभाषित निम्न फलनों के लिये बताइए कि कौन से एकैकी, आच्छादक अथवा एकैकी आच्छादक है :

(i) $f(x) = \frac{x}{2}$ (ii) $g(x) = |x|$ (iii) $h(x) = x^2$ (iv) $k(x) = sin\,\pi\, x$

3. यदि $f: C \to C,\ f(x+iy) = (x - iy)$ हो तो सिद्ध कीजिए कि f एक एकैकी आच्छादक फलन है।

4. निम्न प्रकार के फलनों का एक एक उदाहरण दीजिए :

(i) एकैकी अन्तर्क्षेपी (ii) बहु–एकी आच्छादक

(iii) आच्छादक पर एकैकी नहीं (iv) एकैकी पर आच्छादक नहीं

(v) न एकैकी न आच्छादक (vi) एकैकी आच्छादक

5. सिद्ध कीजिये कि $f: R \to R,\ f(x) = cos\, x$ एक बहु–एकी अर्न्तक्षेपी फलन है। f के प्रान्त तथा सहप्रान्त को इस प्रकार परिवर्तित कीजिए कि f हो जाए:

(i) एकैकी अन्तर्क्षेपी (ii) बहु–एकी आच्छादक (iii) एकैकी आच्छादक

6. यदि $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, $O = \{1, 3, 5, 7, ...\}, E = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ तथा f_1, f_2 निम्न प्रकार परिभाषित फलन हो :

$$f_1 : N \to O,\ f_1(x) = 2x - 1 \quad ; \quad f_2 : N \to E,\ f_2(x) = 2x$$

तो सिद्ध कीजिए कि f_1 तथा f_2 एकैकी आच्छादक है।

7. यदि फलन f वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R से R में निम्न प्रकार परिभाषित है तो कारण सहित उनका एकैकी , बहु–एकी, अन्तर्क्षेपी अथवा आच्छादक के रूप में वर्गीकरण कीजिए:

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = x^3$ (iii) $f(x) = x^3 + 3$ (iv) $f(x) = x^3 - x$

विविध प्रश्नमाला 2

1. यदि $A = \{a, b, c, d\}$ तथा $B = \{p, q, r, s\}$ तब A से B में सम्बन्ध है :

(A) $\{(a, p), (b, r), (c, r)\}$ (B) $\{(a, p), (b, q), (c, r), (s, d)\}$

(C) $\{(b, a), (q, b), (c, r)\}$ (D) $\{(c, s), (d, s), (r, a), (q, b)\}$

2. N में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि $x R y \Leftrightarrow x + 4y = 16,$ तो R का परिसर है:

(A) $\{1, 2, 4\}$ (B) $\{1, 3, 4\}$ (C) $\{1, 2, 3\}$ (D) $\{2, 3, 4\}$

3. N में सम्बन्ध $\{(1, 2), (2, 5), (3, 10), (4, 17), ...\}$ का नियम रूप है :

(A) $\{(x, y) | x, y \in N,\ y = 2x + 1\}$ (B) $\{(x, y) | x, y \in N,\ y = x^2 + 1\}$

(C) $\{(x, y) | x, y \in N,\ y = 3x - 1\}$ (D) $\{(x, y) | x, y \in N,\ y = x + 3\}$

4. यदि $A = \{2, 3, 4\}$ तथा $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. A से B में एक सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है कि "x, y को विभाजित करता है तब R^{-1} है" :

(A) $\{(4, 2), (6, 2), (8, 2), (3, 3), (6, 3), (4, 4), (8, 4)\}$ (B) $\{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 8)\}$

(C) $\{(3, 3), (4, 4), (8, 4)\}$ (D) $\{(4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$

5. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में सम्बन्ध "x, y से छोटा है" होगा :
(A) स्वतुल्य तथा संक्रामक (B) सममित तथा संक्रामक
(C) प्रति–सममित तथा संक्रामक (D) स्वतुल्य तथा प्रति–सममित

6. अशून्य पूर्णांकों के समुच्चय में एक सम्बन्ध इस प्रकार परिभाषित है कि $xRy \Leftrightarrow x^y = y^x$ तब R है:
(A) स्वतुल्य तथा सममित परन्तु संक्रामक नहीं (B) स्वतुल्य तथा प्रति–सममित परन्तु संक्रामक नहीं
(C) स्वतुल्य, प्रतिसममित तथा संक्रामक (D) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक

7. यदि सम्बन्ध R, "x, y का भाजक है" द्वारा परिभाषित हो तो बताइए कि N के निम्न उपसमुच्चयों में से कौन सा उपसमुच्चय एक पूर्ण क्रमित समुच्चय है :
(A) $\{36, 3, 9\}$ (B) $\{7, 77, 11\}$ (C) $\{3, 6, 9, 12, 24\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

8. पूर्णांकों के समुच्चय Z पर परिभाषित निम्न सम्बन्धों में से कौन सा सम्बन्ध तुल्यता सम्बन्ध नहीं है:
(A) $aR_1b \Leftrightarrow (a+b)$ एक सम पूर्णांक है (B) $aR_2b \Leftrightarrow (a-b)$ एक सम पूर्णांक है
(C) $aR_3b \Leftrightarrow a < b$ (D) $aR_4b \Leftrightarrow a = b$

9. समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ पर एक सम्बन्ध R परिभाषित है जहाँ $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3), (1,3)\}$ तब R है:
(A) स्वतुल्य परन्तु संक्रामक नहीं (B) स्वतुल्य परन्तु सममित नहीं
(C) सममित तथा संक्रामक (D) न सममित न स्वतुल्य

10. यदि $A = \{a, b, c\}$ तो में परिभाषित किए जाने वाले सभी संभव अरिक्त सम्बन्धों की संख्या है :
(A) 511 (B) 512 (C) 8 (D) 7

11. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तब निम्न में से कौन A में एक फलन है :
(A) $f_1 = \{(x, y) | y = x+1\}$ (B) $f_2 = \{(x, y) | x + y > 4\}$
(C) $f_3 = \{(x, y) | y < x\}$ (D) $f_4 = \{(x, y) | x + y = 5\}$

12. फलन $f : N \to N, f(x) = 2x + 3$ है।
(A) एकैकी आच्छादक (B) एकैकी अन्तर्क्षेपी (C) बहु–एकी आच्छादक (D) बहु–एकी अन्तर्क्षेपी

13. R से R में परिभाषित निम्न में से कौन सा फलन आच्छादक है।
(A) $f(x) = |x|$ (B) $f(x) = e^{-x}$ (C) $f(x) = x^3$ (D) $f(x) = \sin x$

14. R से R में परिभाषित निम्न में से कौन सा फलन एकैकी है।
(A) $f(x) = |x|$ (B) $f(x) = \cos x$ (C) $f(x) = e^x$ (D) $f(x) = x^2$

15. $f : R \to R, f(x) = x^2 + x$ है।
(A) एकैकी आच्छादक (B) एकैकी अन्तर्क्षेपी (C) बहु–एकी आच्छादक (D) बहु–एकी अन्तर्क्षेपी

16. निम्न में से कौन सा फलन आच्छादक है :
(A) $f : Z \to Z, f(x) = |x|$ (B) $f : N \to Z, f(x) = |x|$
(C) $f : R_0 \to R^+, f(x) = |x|$ (D) $f : C \to R, f(x) = |x|$

17. फलन $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$ का प्रान्त है :
(A) R^+ (B) R^- (C) R_0 (D) R

18. x वास्तविक संख्या हो तब $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ का परिसर है :

(A) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ (B) $(-2,2)$ (C) $(-1,1)$ (D) $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

19. फलन $f(x)=\cos\frac{x}{3}$ का परिसर है :

(A) $(0,\infty)$ (B) $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ (C) $[-1,1]$ (D) $[0,1]$

20. $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ से R में परिभाषित निम्न में से कौनसा फलन एकैकी आच्छादक है :

(A) $f(x)=\tan x$ (B) $f(x)=\cot x$ (C) $f(x)=\cos x$ (D) $f(x)=e^x+e^{-x}$

21. निम्न सम्बन्ध R के प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए :

$$R=\{(x+1,x+5)\mid x\in\{0,1,2,3,4,5\}\}$$

22. यदि $A=\{1,2\}$ तब A पर परिभाषित सभी अरिक्त सम्बन्धों को लिखिए।

23. निम्न सम्बन्धों के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए:

(i) $R_1=\{(x,y)\mid x,y\in N$ तथा $x+y=10\}$

(ii) $R_2=\{(x,y)\mid y=|x-1|,\ x\in Z$ तथा $|x|\le 3\}$

24. वास्तविक संख्याओं के समुच्च्य R में दो सम्बन्ध R_1 तथा R_2 निम्न प्रकार परिभाषित है :

(i) $aR_1b\Leftrightarrow a-b>0$ (ii) $aR_2b\Leftrightarrow |a|\le b$

R_1 तथा R_2 की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।

25. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$aRb \Leftrightarrow a^2-4ab+3b^2=0,\quad (a,b\in N)$$

सिद्ध कीजिए कि R स्वतुल्य है परन्तु सममित तथा संक्रामक नहीं है।

26. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में दो सम्बन्ध R_1 तथा R_2 निम्न प्रकार परिभाषित है :

(i) $aR_1b \Leftrightarrow |a|=|b|$ (ii) $aR_2b \Leftrightarrow |a|\le|b|$

सिद्ध कीजिए कि R_1 एक तुल्यता सम्बन्ध है पर R_2 एक तुल्यता सम्बन्ध नहीं है।

27. समुच्चय $A=\{1,2,3\}$ में एक सम्बन्ध R निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$R=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$$

R की स्वतुल्यता, सममितता तथा संक्रामकता की जाँच कीजिए।

28. फलन $1/\sqrt{(x+1)(x+2)}$ का प्रान्त ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **क्रमित युग्म :** दो अवयवों के क्रमित समुच्चय को क्रमित युग्म कहते हैं तथा इसे (a,b) द्वारा व्यक्त किया जाता है।
   $(a,b)\neq(b,a)$ तथा $(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c$ तथा $b=d$
2. दो समुच्चयों A तथा B के कार्तीय गुणन को $A\times B$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा
   $A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$.
3. समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई भी सम्बन्ध R, $A\times B$ का एक उपसमुच्चय होता है। **विलोमत :** $A\times B$ का प्रत्येक उपसमुच्चय A से B में एक सम्बन्ध परिभाषित करता है।
4. यदि समुच्चय A में अवयवों की संख्या m तथा समुच्चय B में अवयवों की संख्या n हो तो A से B में परिभाषित अरिक्त सम्बन्धों की संख्या $2^{mn}-1$ होगी।
5. R का प्रान्त $=\{a|(a,b)\in R\}$, R का परिसर $=\{b|(a,b)\in R\}$.
6. यदि R समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई सम्बन्ध हो तो R के प्रतिलोम सम्बन्ध को R^{-1} से निरूपित किया जाता है तथा $R^{-1}=\{(a,b)|(a,b)\in R\}$ अर्थात् $R^{-1}=(a,b)\in R\Leftrightarrow(a,b)\in R^{-1}$
7. R का परिसर का $=R^{-1}$ प्रान्त तथा R का प्रान्त $=R^{-1}$ का परिसर
8. **तत्समक सम्बन्ध :** समुच्चय A में परिभाषित एक ऐसा सम्बन्ध जिसके अन्तर्गत समुच्चय का प्रत्येक अवयव स्वंय और केवल स्वंय से सम्बन्धित हो, A में तत्समक सम्बन्ध कहलाता है तथा इसे I_A द्वारा निरूपित किया जाता है अर्थात् $I_A=\{(a,a)|a\in A$ तथा $(a,b)\not\in I_A\}$
9. **स्वतुल्य सम्बन्ध** : समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वंय से सम्बन्धित हो, स्वतुल्य सम्बन्ध कहलाता है। अर्थात् R स्वतुलय होगा यदि $a\in R\Rightarrow(a,a)\in R$.
10. **सममित सम्बन्ध** – समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R सममित कहलाता है यदि
    $(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R, \forall a,b\in A$
11. **संक्रामक सम्बन्ध** – समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R संक्रामक कहलाता है यदि $(a,b)\in R$ तथा $(b,c)\in R\Rightarrow(a,c)\in R, \forall a,b,c,\in A$.
12. **तुल्यता सम्बन्ध** – समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध कहलाता है यदि R स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक हो।
13. **प्रति–सममित सम्बन्ध** – समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R प्रति–सममित कहलाता है यदि $(a,b)\in R$ तथा $(b,c)\in R\Rightarrow a=b, \forall a,b\in A$
14. **आंशिक क्रम सम्बन्ध** – समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध होगा यदि R स्वतुल्य, प्रति –सममित तथा संक्रामक है।
15. **पूर्ण क्रम सम्बन्ध** – किसी समुच्चय A में परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक पूर्ण क्रम सम्बन्ध होगा यदि
    (i) R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है
    (ii) $a,b\in R\Rightarrow$ या तो $(a,b)\in R$ या $(b,a)\in R$ या $a=b$
16. **फलन** – समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित कोई फलन f एक नियम है जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध होता है।
17. **प्रांत एवं सहप्रान्त** – समुच्चय A फलन का प्रान्त तथा समुच्चय B सहप्रान्त कहलाता है।
18. **पूर्ण प्रतिबिम्ब** – यदि फलन f के अर्न्तगत समुच्चय A का अवयव 'a' समुच्चय B के अवयव 'b' से सम्बद्ध है तो b को a का प्रतिबिम्ब तथा a को b का पूर्व प्रतिबिम्ब कहते हैं।
19. **परिसर** – f के अर्न्तगत A के अवयवों के प्रतिबिम्बों का समुच्चय फलन f का परिसर कहलाता है।
20. **अचर फलन** – एक ऐसा फलन जिसके अन्तर्गत उसके प्रांत का प्रत्येक अवयव सहप्रांत के एक ही अवयव से सम्बद्ध हो, अचर फलन कहलाता है।

21. **तत्समक फलन** – किसी समुच्चय A से A में परिभाषित ऐसा फलन जिसके अन्तर्गत A का प्रत्येक अवयव स्वयं और केवल स्वयं से सम्बद्ध हो, A का तत्समक फलन कहलाता है।

22. **तुल्य फलन** – दो फलन f तथा g तुल्य कहलाते है यदि
(i) f का प्रान्त $= g$ का प्रान्त (ii) f का सहप्रान्त $= g$ का सहप्रान्त
(iii) $f(x) = g(x) \;\forall\; x$

23. **बहुपद फलन** – फलन $f : R \to R$ एक बहुपदीय फलन कहलाता है यदि R के प्रत्येक x के लिए $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, जहाँ n एक ऋणेत्तर पूर्णांक है तथा $a_0, a_1, a_2, ...a_n \in R$

24. **परिमेय फलन** – $f(x)/g(x)$ के प्रकार के फलन, जहाँ $f(x)$ तथा $g(x)$ एक प्रांत में, x के परिभाषित बहुपदीय फलन हैं, जिसमें $g(x) \neq 0$ परिमेय फलन कहलाते है।

25. **मापांक फलन** – $f(x) = |x|$ प्रत्येक $x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$, मापाँक फलन कहलाता है।
अर्थात् $f(x) = \begin{cases} x & ; \;\forall\; x \geq 0 \\ -x & ; \;\forall\; x < 0 \end{cases}$

26. **चिह्न फलन** – प्रत्येक $x \in R$ के लिए $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{ यदि } x > 0 \\ 0 & ; \text{ यदि } x = 0 \\ -1 & ; \text{ यदि } x < 0 \end{cases}$
द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ चिह्न फलन कहलाता है।

27. **महत्तम पूर्णांक फलन** – $f(x) = [x]$, $x \in R$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$, x से कम या x के बराबर महत्तम पूर्णांक का मान ग्रहण करता है $[x] \leq x$ ऐसा फलन महत्तम पूर्णांक फलन कहलाता है।

28. **एकैकी फलनः** फलन $f : A \to B$ एकैकी होगा यदि $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b, \forall a, b \in A$

29. **बहुएकी फलनः** यदि फलन एकैकी नहीं है तो स्वतः ही बहु–एकी होगा।

30. **आच्छादक फलनः** $f : A \to B$ आच्छादक होगा यदि $b \in B \Rightarrow \exists\, a \in A$ ताकि $f(a) = b$ अर्थात् इस स्थिति में f का सहप्रात $= f$ का परिसर

31. **अन्तर्क्षेपी फलनः** यदि फलन f आच्छादक नहीं है तो स्वतः ही अन्तर्क्षेपी होगा। पुनः यदि कोई फलन एकैकी तथा आच्छादक दोनों हो तो ऐसे फलन को एकैकी आच्छादक फलन कहते हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 2.1

1. (i), (ii) तथा (v) सम्बन्ध हैं।

2. (i) $\{(x,y)|x,y\in N,\ y=2x+1\}$ (ii) $\{(x,y)|x,y\in N,\ x+2y=8\}$ (iii) $\{(x,y)|x,y\in N,\ y=x-1\}$

3. $R=\{(2,3),(2,7),(3,7),(3,10),(4,3),(4,7),(5,3),(5,6),(5,7)\}$

R का प्रान्त $=\{2,3,4,5\}$, R का परिसर $=\{3,6,7,10\}$

4. $R=\{(0,5),(0,-5),(3,4),(-3,4),(3,-4),(-3,-4),(4,3),(4,-3),(-4,3),(-4,-3),(5,0),(-5,0)\}$
$R^{-1}=\{(5,0),(-5,0),(4,3),(4,-3),(-4,3),(-4,-3),(3,4),(3,-4),(-3,4),(-3,-4),(0,5),(0,-5)\}$

R का प्रान्त $=\{0,3,-3,4,-4,5,-5\}=R^{-1}$ का प्रान्त

5. (i) असत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

6. (i) $R=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$
(ii) $R^{-1}=\{(4,1),(5,1),(4,2),(5,2)(4,3),(5,3),(5,4)\}$

7. (i) $R_1=\{(2,1),(4,2),(6,3)\}$ (ii) $R_2=\{(8,6),(9,7),(10,8)\}$
(iii) $R_3=\{(0,4),(3,2),(6,0)\}$ (iv) $R_4=\{(5,10),(5,15),(6,12),(6,18),(8,16)\}$

8. (i) $R^{-1}=\{(3,2),(4,2),(3,3),(2,3),(2,4)\}$ (ii) $R^{-1}=\{(x,y)|x,y\in N,\ x>y\}$
(iii) $R^{-1}=\{(4,0),(2,3),(0,6)\}$

प्रश्नमाला 2.2

1. (i) R_1 सममित तथा संक्रामक परन्तु स्वतुल्य नहीं। (ii) R_2 स्वतुल्य एवं संक्रामक परन्तु सममित नहीं।
(iii) R_3 स्वतुल्य एवं सममित परन्तु संक्रामक नहीं। (iv) स्वतुल्य तथा संक्रामक परन्तु सममित नहीं।

2. (i) केवल सममित (ii) केवल सममित (iii) केवल सममित (iv) स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक

5. नहीं 8. स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक 10. केवल सममित

12. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) नहीं (iv) हाँ (v) नहीं (vi) नहीं

प्रश्नमाला 2.3

1. (a) नही (b) फलन है (c) नहीं (d) फलन है (e) फलन है (f) नहीं (g) फलन है
(h) नहीं (i) फलन है (j) फलन है (k) फलन है

2. (i) $\{x\in R|0\le x<\infty\}$ (ii) $\{2,-2\}$ (iii) ϕ

3. f का परिसर $=\{1,2,5\}$ 4. (i) $f(A)=\{-4,-3,0,5\}$ (ii) ϕ, $\{0,2\}$, -2

5. (a) R का f प्रतिबिम्ब समुच्चय $=R^+$ (b) $\{0\}$ (c) सत्य है।

6. (a) R (b) $\{e^{-2}\}$ (c) सत्य है।

7. f का परिसर $=\{y=f(x)|0\le y<1\}$ 8. हाँ, $\alpha=2,\ \beta=-1$

प्रश्नमाला 2.4

1. (i) एकैकी आच्छादक (ii) बहु–एकी आच्छादक
(iii) बहु–एकी आच्छादक (iv) एकैकी अन्तर्क्षेपी

2. (i) f एकैकी अन्तर्क्षेपी है (ii) g बहु–एकी अन्तर्क्षेपी है
(iii) h बहु–एकी अन्तर्क्षेपी है (iv) बहु–एकी आच्छादक

4. (i) $f: N \to N, f(x) = 2x$ (ii) $f: R_0 \to R^+, f(x) = x^2$

(iii) $f: z_0 \to N, f(x) = |x|$ (iv) $f: Z \to Z, f(x) = 2x$

(v) $f: R \to R, f(x) = x^2$ (vi) $f: Z \to Z, f(x) = -x$

5. (i) $f:[0,\pi] \to R$ (ii) $f: R \to [-1,1]$ (iii) $f:[0,\pi] \to [-1,1]$

7. (i) बहु–एकी अन्तर्क्षेपी (ii) एकैकी आच्छादक

(iii) एकैकी आच्छादक (iv) बहु–एकी आच्छादक

विविध प्रश्नमाला 2

1. A	**2.** C	**3.** B	**4.** A	**5.** C	**6.** D
7. A	**8.** C	**9.** B	**10.** A	**11.** D	**12.** B
13. C	**14.** C	**15.** D	**16.** C	**17.** B	**18.** A
19. C	**20.** A	21. प्रान्त $=\{0,1,2,3,4,5,6\}$,	परिसर $=\{5,6,7,8,9,10\}$		

22. $\{(1,1)\}, \{(2,2)\}, \{(1,2)\}, \{(2,1)\},$

$\{(1,1),(1,2)\}, \{(1,1),(2,1)\}, \{(2,2),(1,2)\}, \{(2,2),(2,1)\}, \{(1,2),(2,1)\}, \{(1,1),(2,2)\}$

$\{(1,1),(2,2),(1,2)\}, \{(1,1),(2,2),(2,1)\}, \{(1,1),(1,2),(2,1)\}, \{(2,2),(1,2),(2,1)\},$

$\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

23. (i) प्रान्त $=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, परिसर $=\{9,8,7,6,5,4,3,2,1\}$

(ii) प्रान्त $=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, परिसर $=\{4,3,1,0,2\}$

24. (i) R_1 केवल संक्रामक है। (ii) R_2 केवल संक्रामक है। 27. स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक

28. $(-\infty,-2) \cup (-1,\infty)$

3

त्रिकोणमितीय फलन
(Trigonometrical Functions)

3.01 प्रस्तावना (Introduction)

त्रिकोणमिति की जानकारी प्राचीन भारतीयों को थी। आर्यभट्ट (476 ई.), ब्रह्मगुप्त (598 ई.) भास्कर प्रथम (600 ई.) तथा भास्कर द्वितीय (1114 ई.) ने प्रमुख परिणामों को प्राप्त किया था। यह सम्पूर्ण ज्ञान भारत से मध्यपूर्व और पुनः वहाँ से यूरोप गया। यूनानियों ने भी त्रिकोणमिति का अध्ययन आरम्भ किया परन्तु उनकी कार्य विधि इतनी अनुपयुक्त थी, कि भारतीय विधि के ज्ञात हो जाने पर यह सम्पूर्ण विश्व द्वारा अपनाई गयी।

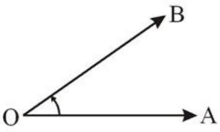
भारत में आधुनिक त्रिकोणमितीय फलन जैसे किसी कोण की ज्या (sine) और फलन के परिचय का पूर्व विवरण 'सिद्धान्त' (संस्कृत भाषा में लिखा गया ज्योतिषीय कार्य) में दिया गया है जिसका योगदान गणित के इतिहास में प्रमुख है।

भास्कर प्रथम (600 ई.) ने 90° से अधिक, कोणों के sine के मान के लिए सूत्र दिया था। सोलहवीं शताब्दी का मलयालम भाषा में कार्य युक्ति भाषा में $\sin(A+B)$ के प्रसार की एक उपपत्ति है। $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ$, आदि के sine तथा cosine के विशुद्ध मान भास्कर द्वितीय द्वारा दिए गए है। भारतीय ज्या और कोटिज्या ही यूरोपीय भाषा में साइन (sine) एवं कोसाइन (cosine) बन गये। पाईथोगोरस से लगभग 2 शताब्दी पूर्व ही भारतीय पाईथोगोरस प्रमेय को जानते थे। बौधायन और कात्यायन ऋषियों ने इस प्रमेय की प्रमाणपूर्वक व्याख्या की है। साथ ही इनके अनुप्रयोग का विवरण भी मिलता है।

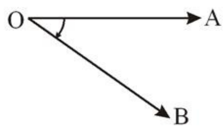
इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय फलनों की परिभाषा, इनके प्रान्त एवं परिसर तथा उनके आलेख, कोण θ के सम्बद्ध कोणों $(-\theta), \left(\frac{\pi}{2}\pm\theta\right), (\pi\pm\theta), \left(\frac{3\pi}{2}\pm\theta\right), (2\pi\pm\theta)$ इत्यादि के त्रिकोणमितीय फलनों को कोण θ के त्रिकोणमितीय फलनों में व्यक्त करना, संयुक्त कोणों (A+B), (A–B), (A+B+C) आदि के त्रिकोणमितीय फलनों को A,B,C आदि के त्रिकोणमितीय फलनों में व्यक्त करना, त्रिकोणमितीय समीकरणों के व्यापक हल के बारे में पढ़ेंगे। ज्या तथा कोज्या सूत्रों के प्रमाण तथा इनके सामान्य अनुप्रयोगों का अध्ययन करेंगे।

3.02 कोण (Angle):

एक किरण निम्नानुसार अपनी प्रारम्भिक स्थिति OA से घूमकर नयी स्थिति OB में आ जाती है, तो इस घुमाव को कोण से जाना जाता है। यह यदि घडी की विपरीत दिशा में हो तो इसे धनात्मक तथा घड़ी की दिशा में हो तो ऋणात्मक कोण कहलाता है।



चित्र 3.01



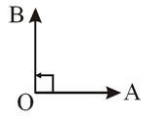
चित्र 3.02

चित्र 3.01 में कोण धनात्मक तथा चित्र 3.02 में कोण ऋणात्मक है। बिन्दु O को कोण का शीर्ष तथा भुजा OA को प्रारम्भिक भुजा तथा भुजा OB को कोण की अंतिम भुजा कहा जाता है।

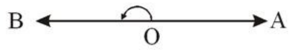
कोण को मापने की निम्न दो विधियाँ प्रचलित हैं–

(i) डिग्री माप (Degree measure) (ii) रेडियन माप (Radian measure)

डिग्री माप : यदि अंतिम भुजा की स्थिति प्रारम्भिक भुजा के लम्बवत् हो, तो यह 90° का कोण होता है तथा इस कोण को एक समकोण कहते हैं। इस प्रकार यदि अंतिम भुजा प्रारम्भिक भुजा से दो समकोण तक घूम जाएँ तो दोनों भुजाएँ एक सरल रेखा में हो जाती हैं अतः दो समकोण को ऋजु कोण या सरल कोण भी कहते हैं। यदि अंतिम भुजा घूमकर प्रारम्भिक अवस्था में आ जाए तो बनने वाला कोण 360° का होगा अर्थात् चार समकोण के बराबर।



चित्र 3.03

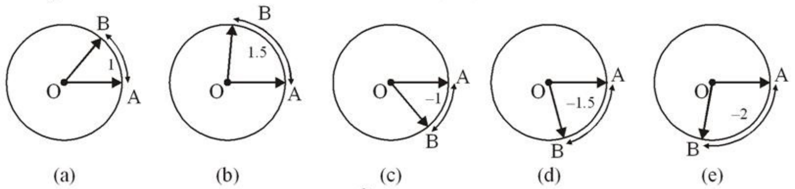


चित्र 3.04

चित्र 3.05

यदि एक समकोण के 90 भाग किए जाएँ तो एक भाग 1° के कोण को प्रदर्शित करेगा तथा 1° के पुनः 60 भाग करें तो एक भाग 1 मिनट के कोण को बताएगा। पुनः एक मिनट के 60 वें भाग को एक सैकण्ड कहते हैं।

रेडियन माप : इसमें इकाई त्रिज्या के वृत के केन्द्र पर एक इकाई लम्बाई के चाप द्वारा बने कोण को एक रेडियन माप कहते हैं। निम्न आकृतियों में विभिन्न नाप के कोण रेडियन में दिखाए गए है–



चित्र 3.06

क्योंकि इकाई त्रिज्या के वृत की परिधि 2π होती है अतः प्रारम्भिक भुजा की एक पूर्ण परिक्रमा केन्द्र पर 2π रेडियन का कोण अन्तरित करती है। अर्थात् 2π रेडियन बराबर होगा 360° या चार समकोण। अतः एक समकोण का मान $\pi/2$ रेडियन के बराबर होगा।

टिप्पणीः यहाँ वृत का इकाई त्रिज्या का होना आवश्यक नहीं है। यदि वृत की त्रिज्या r इकाई की है, तो r लम्बाई का चाप वृत के केन्द्र पर एक रेडियन का कोण अन्तरित करेगा। स्पष्टतः ℓ लम्बाई का चाप वृत के केन्द्र पर ℓ / r रेडियन का कोण अन्तरित करेगा।

डिग्री तथा रेडियन के मध्य सम्बन्ध : त्रिज्या के पूर्ण परिभ्रमण पर वृत के केन्द्र पर बनने वाला कोण 2π रेडियन का है जो कि 360° के बराबर होता है। अतः

2π रेडियन = 360 डिग्री या π रेडियन = 180 डिग्री

यदि कोण का माप डिग्री में D तथा रेडियन में R हो तो इनके मध्य निम्न सम्बन्ध होगाः

$$\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi} \quad \text{या} \quad \frac{D}{90^\circ} = \frac{2R}{\pi}$$

यदि $\pi = 22/7$ मान लिया जाए तो 1 रेडियन = $57^\circ 16'$ निकटतम मान

$1^\circ = \pi / 180$ रेडियन $= 0.01746$ रेडियन (निकटतम)

सारणी 3.01

डिग्री	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
रेडियन	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: $50^\circ 30'$ को रेडियन रूप में बदलिए।

हलः क्योंकि $180^\circ = \pi$ रेडियन

$$\text{अतः } 50^\circ 30' = 50\frac{1}{2} \text{ डिग्री} = \left(\frac{\pi}{180}\right) \times \left(\frac{101}{2}\right) \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{101\pi}{360} \text{ रेडियन}$$

उदाहरण 2: 6 रेडियन को डिग्री माप में बदलिए।

हल: क्योंकि π रेडियन $=180°$

अतः 6 रेडियन $=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)\times 6$ डिग्री $=\dfrac{1080\times 7}{22}=343\dfrac{7}{11}$ डिग्री

$$=343°+\frac{7\times 60}{11}\text{ मिनट} \qquad [\because\ 1°=60']$$

$$=343°+38'+\frac{2}{11}\text{ मिनट}$$

$$=343°+38'+10.9'' \qquad [\because\ 1'=60'']$$

$=343°38'11''$ निकटतम मान

प्रश्नमाला 3.1

1. निम्नलिखित डिग्री माप के संगत रेडियन माप ज्ञात कीजिए:
   (i) $25°$ (ii) $-47°30'$ (iii) $520°$
2. निम्नलिखित रेडियन माप के संगत डिग्री माप ज्ञात कीजिए ($\pi=22/7$ का प्रयोग करे):
   (i) $11/16$ (ii) -4 (iii) $5\pi/3$
3. एक पहिया एक मिनट में $360°$ परिक्रमण करता है तो एक सेकण्ड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?
4. एक वृत, जिसकी त्रिज्या 100 सेमी है, की 22 सेमी लम्बाई की चाप वृत के केन्द्र पर कितने डिग्री माप का कोण बनाएगी ($\pi=22/7$ का प्रयोग कीजिए)
5. एक वृत, जिसका व्यास 40 सेमी है, की एक जीवा 20 सेमी लम्बाई की है तो इसके संगत छोटे चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
6. यदि दो वृत्तों के समान लम्बाई वाले चाप अपने केन्द्रों पर क्रमशः $60°$ तथा $75°$ के कोण बनाते हों, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।
7. 75 सेमी लम्बाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लम्बाई निम्नलिखित है:
   (i) 10 सेमी (ii) 21 सेमी

3.03 त्रिकोणमितीय फलनों के चिह्न (Signs of trigonometric functions)

माना कि O एक इकाई त्रिज्या वाले वृत का केन्द्र है। P (a,b) इस पर कोई बिन्दु हैं।

कोण $AOP=x$ रेडियन अर्थात् चाप की लम्बाई $AP=x$

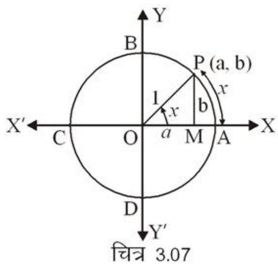
अतः $\sin x=b$ एवं $\cos x=a$

चूँकि ΔOMP समकोण त्रिभुज है अतः

$$OM^2+MP^2=OP^2$$

या $$a^2+b^2=1$$

या $$\cos^2 x+\sin^2 x=1$$



चित्र 3.07

क्योंकि एक पूर्ण परिक्रमा में वृत के केन्द्र पर 2π रेडियन का कोण अन्तरित होता है अतः $\pi/2$ गुणज वाले सभी कोणों को चतुर्थांशीय कोण (quadrantal angles) कहते हैं।

त्रिभुज के विभिन्न चतुर्थांश में बने होने पर स्थितियाँ निम्नानुसार होगी।

प्रथम पाद में : इस चतुर्थांश में आधार एवं लम्ब दोनों ही धनात्मक है अतः सभी त्रिकोणमितीय फलन प्रथम चतुर्थांश में धनात्मक होंगे। आधार का अधिकतम मान $x=0$ पर त्रिज्या के बराबर तथा न्यूनतम मान $x=\pi/2$ पर शून्य होगा, परिणामतः $\cos x$ का मान अधिकतम 1 से घटता हुआ शून्य तक आता है। इसी प्रकार $\sin x$ का मान शून्य से बढ़ता हुआ अधिकतम 1 हो जाता है। अतः $\tan x$ का मान $x=0$ पर शून्य से बढ़ता हुआ $x=\pi/2$ पर अनन्त तक बढ़ता है। $x=\pi/4$ पर यह मान 1 के बराबर होता है। इसी प्रकार विभिन्न त्रिकोणमितीय फलनों के मान अन्य चतुर्थांशों में निम्न सारणी में दर्शाये अनुसार रहेंगे।

सारणी : 3.02

	I चतुर्थांश	II चतुर्थांश	III चतुर्थांश	IV चतुर्थांश
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–
$\operatorname{cosec} x$	+	+	–	–
$\sec x$	+	–	–	+
$\cot x$	+	–	+	–

3.04 त्रिकोणमितीय फलनों के प्रान्त तथा परिसर
(Domain and range of trignometrical functions)

sine तथा cosine की परिभाषा अनुसार हम जानते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या x के लिए $-1 \le \sin x \le 1$ तथा $-1 \le \cos x \le 1$

अतः $y = \sin x$ तथा $y = \cos x$ फलनों के प्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R है तथा परिसर अन्तराल $[-1,\ 1]$ अर्थात् $-1 \le y \le 1$ है। पुनः हम जानते हैं कि $y = \operatorname{cosec} x = 1/\sin x$ का प्रान्त समुच्चय $\{x : x \in R, x \ne n\pi$ तथा $n \in Z\}$ तथा परिसर समुच्चय $\{y : y \in R, y \le -1$ या $1 \le y\}$. इसी प्रकार $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ का प्रान्त समुच्चय $\{x : x \in R, x \ne (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ तथा $n \in Z\}$ तथा परिसर समुच्चय $\{y : y \in R, y \le -1$ या $1 \le y\}$ है। पुनः $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

अतः इसका प्रान्त समुच्चय $\{x : x \in R, x \ne (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ तथा $n \in Z\}$ तथा परिसर समुच्चय सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है जबकि $y = \cot x$ का प्रान्त समुच्चय $\{x : x \in R, x \ne n\pi$ तथा $n \in Z\}$ तथा परिसर समुच्चय सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

(उपर्युक्त तथ्यों को निम्न सारणी द्वारा समझा जा सकता है।

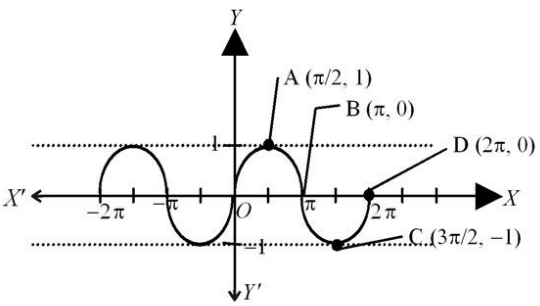
सारणी 3.03

	I चतुर्थांश	II चतुर्थांश	III चतुर्थांश	IV चतुर्थांश
sin	0 से 1 की ओर बढ़ता है	1 से 0 की ओर घटता है	0 से –1 की ओर घटता है	–1 से 0 की ओर बढ़ता है
cos	1 से 0 की ओर घटता है	0 से –1 की ओर घटता है	–1 से 0 की ओर बढ़ता है	0 से 1 की ओर बढ़ता है
tan	0 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से 0 की ओर बढ़ता है	0 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से 0 की ओर बढ़ता है
cot	∞ से 0 की ओर घटता है	0 से $-\infty$ की ओर घटता है	∞ से 0 की ओर घटता है	0 से $-\infty$ की ओर घटता है
sec	1 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से –1 की ओर बढ़ता है	–1 से $-\infty$ की ओर घटता है	∞ से 1 की ओर घटता है
cosec	∞ से 1 की ओर घटता है	1 से ∞ की ओर बढ़ता है	$-\infty$ से –1 की ओर बढ़ता है	–1 से $-\infty$ की ओर घटता है

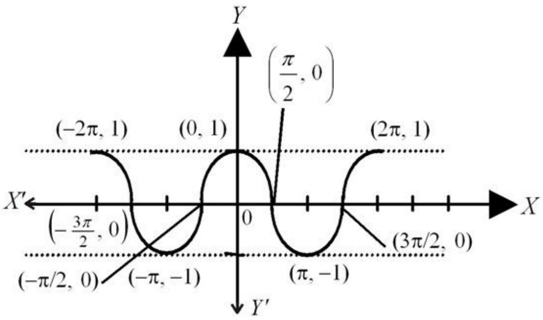
टिप्पणी : उपर्युक्त सारणी में, यह कथन कि अंतराल $0 < x < \pi/2$ में $\tan x$ का मान 0 से ∞ (अनंत) तक बढ़ता है का अर्थ है कि जैसे–जैसे x का मान $\pi/2$ की ओर बढ़ता है वैसे–वैसे $\tan x$ का मान बहुत अधिक हो जाता है। इसी प्रकार, जब हम यह कह सकते हैं कि चतुर्थ चतुर्थांश में $\operatorname{cosec} x$ का मान –1 से $-\infty$ (ऋणात्मक अनंत) तक में घटता है तो इसका अर्थ है कि जब $x \in (3\pi/2,\ 2\pi)$ तब जैसे–जैसे $x, 2\pi$ की ओर अग्रसर होता है, $\operatorname{cosec} x$ बहुत अधिक ऋणात्मक मान लेता है। साधारणतः चिह्न ∞ तथा $-\infty$ फलनों तथा चरों के विशेष प्रकार के व्यवहार को बताते हैं।)

3.05 त्रिकोणमितीय फलनों के आलेख (Graph of trignometrical functions)

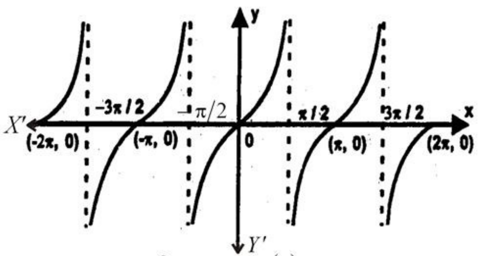
हमने देखा कि $\sin x$ तथा $\cos x$ के मानों का अंतराल 2π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। जैसे, $\operatorname{cosec} x$ तथा $\sec x$ के मानों की भी अंतराल 2π के बाद पुनरावृत्ति होती है। हम अगले अनुच्छेद में $\tan(\pi + x) = \tan x$ देखते हैं। जैसे, $\tan x$ के मानों में अंतराल π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है, क्योंकि $\cot x, \tan x$ का पूरक है, इसके मानों में भी अंतराल π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। त्रिकोणमितीय फलनों में इस ज्ञान (गुणधर्म) तथा व्यवहार का उपयोग करने पर, हम फलनों का आलेख खींच सकते हैं। इन फलनों का आलेख नीचे दिए गए हैं।



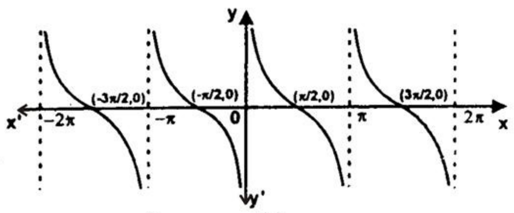
चित्र 3.08 : $f(x) = \sin x$



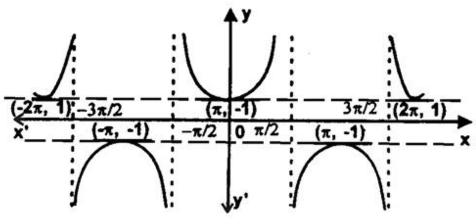
चित्र 3.09 : $f(x) = \cos x$



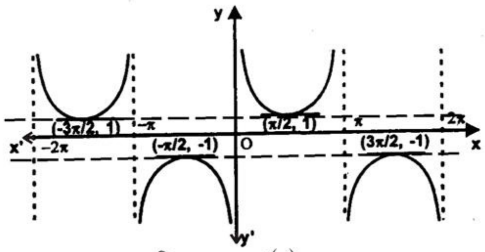
चित्र 3.10 : $f(x) = \tan x$



चित्र 3.11 : $f(x) = \operatorname{cosec} x$



चित्र 3.12 : $f(x) = \sec x$



चित्र 3.13 : $f(x) = \cot x$

उदाहरण 3: यदि $\sin x = -4/5$ हो तथा x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिए

हल: क्योंकि $\sin x = -4/5$ अतः $\operatorname{cosec} x = -5/4$

अब $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ या $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25}$

अतः $\cos x = \pm 3/5$ परन्तु x तृतीय चतुर्थांश में है अतः $\cos x$ का मान ऋणात्मक होगा,

$\therefore$ $\cos x = -3/5$ इसी से $\sec x = -5/3$ पुनः $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{4}{3}$ तथा $\cot x = \dfrac{3}{4}$

उदाहरण 4: $\sin\dfrac{31\pi}{3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं कि $\sin x$ के मानों में अंतराल 2π के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। इसलिए

$$\sin\frac{31\pi}{3}=\sin\left(10\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

उदाहरण 5: $\operatorname{cosec}(-1410^\circ)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं कि $\operatorname{cosec} x$ के मानों में अन्तराल 2π या 360° के पश्चात् पुनरावृत्ति होती है। इसलिए

$$\operatorname{cosec}(-1410^\circ)=\operatorname{cosec}(-1410^\circ+4\times360^\circ)=\operatorname{cosec}(-1410^\circ+1440^\circ)=\operatorname{cosec}(30^\circ)=2$$

प्रश्नमाला 3.2

निम्नलिखित प्रश्नों में पाँच अन्य त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\cos x=-1/2,\ x$ तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।
2. $\cot x=3/4,\ x$ तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।
3. $\sec x=13/5,\ x$ चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

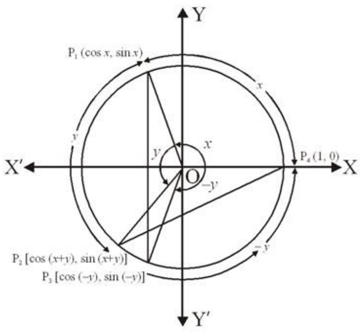
मान ज्ञात कीजिए।

4. $\sin 765^\circ$
5. $\tan 19\pi/3$
6. $\sin\left(-\dfrac{11\pi}{3}\right)$
7. $\cot\left(-\dfrac{15\pi}{4}\right)$

3.06 दो कोणों के योग और अंतर के त्रिकोणमितीय फलन

(Trigonometrical functions of sum and difference of two angles)

इस भाग में हम दो कोणों के योग एवं अंतर के लिए त्रिकोणमितीय फलनों तथा उनसे सम्बन्धित व्यंजकों को व्युत्पन्न करेंगे। इस संबंध में इन मूल परिणामों को हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ कहेंगे। हम देखते हैं कि



चित्र 3.14

1. $\sin(-x)=-\sin x$
2. $\cos(-x)=\cos x$
3. $\tan(-x)=-\tan x$

अब हम कुछ और परिणाम सिद्ध करेंगे :

4. $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

इकाई वृत्त चित्र 3.14 पर विचार कीजिए, जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर हो। माना कि कोण P_4OP_1, x तथा कोण P_1OP_2, y हैं तो कोण $P_4OP_2, (x+y)$ होगा। पुनः माना कोण $P_4OP_3, (-y)$ हैं। अतः P_1, P_2, P_3 तथा P_4 के निर्देशांक $P_1(\cos x,\sin x), P_2[\cos(x+y),\sin(x+y)],\ \ P_3[\cos(-y),\sin(-y)]$ और $P_4(1,0)$ होंगे।

त्रिभुजों P_1OP_3 तथा P_2OP_4 पर विचार कीजिए। सर्वांगसम हैं। इसलिए P_1P_3 और P_2P_4 बराबर हैं। दूरी सूत्र का उपयोग करने पर

$$\begin{aligned}
P_1P_3^2&=\left[\cos x-\cos(-y)\right]^2+\left[\sin x-\sin(-y)\right]^2\\
&=(\cos x-\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2\\
&=\cos^2 x+\cos^2 y-2\cos x\cos y+\sin^2 x+\sin^2 y+2\sin x\sin y\\
&=2-2(\cos x\cos y-\sin x\sin y) \qquad [\sin^2 x+\cos^2 x=1 \text{ इत्यादि}]
\end{aligned}$$

पुनः $P_2P_4^2 = \left[1-\cos\left(x+y\right)\right]^2 + \left[0-\sin\left(x+y\right)\right]^2$

$$= 1-2\cos(x+y)+\cos^2(x+y)+\sin^2(x+y) = 2-2\cos(x+y)$$

क्योंकि $P_1P_3 = P_2P_4 \Rightarrow P_1P_3^2 = P_2P_4^2$

$\therefore \quad 2-2(\cos x\cos y - \sin x\sin y) = 2-2\cos(x+y)$

अतः $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

5. $\cos(x-y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$

सर्वसमिका 4 में y के स्थान पर –y रखने पर

$\cos(x+(-y)) = \cos x\cos(-y) - \sin x\sin(-y)$

या $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$

6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

सर्वसमिका 5 में x के स्थान पर $\pi/2$ तथा y के स्थान पर x रखने पर

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x + \sin\frac{\pi}{2}\sin x = \sin x$$

7. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

सर्वसमिका 6 का उपयोग करने पर हम पाते हैं

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = \cos x.$$

8. $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

हम जानते हैं कि $\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin y$$

$$= \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

9. $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

यदि हम सर्वसमिका 8 में y के स्थान पर $-y$ रखें तो उपरोक्त परिणाम प्राप्त होता है।

10. x और y के उपर्युक्त मानों को सर्वसमिकाओं 4, 5, 8 और 9 में रखने पर हम निम्नलिखित परिणाम प्राप्त कर सकते हैं:

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$
$\cos(\pi-x) = -\cos x$	$\sin(\pi-x) = \sin x$
$\cos(\pi+x) = -\cos x$	$\sin(\pi+x) = -\sin x$
$\cos(2\pi-x) = \cos x$	$\sin(2\pi-x) = -\sin x$

इसी प्रकार के संगत परिणाम $\tan x, \cot x, \sec x$ एवं $\operatorname{cosec} x$ के लिए $\sin x$ और $\cos x$ के फलनों के परिणामों से आसानी से निकाले जा सकते हैं।

11. x, y और $(x+y)$ में से कोई $\pi/2$ का विषम गुणांक नहीं हैं तो,

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

क्योंकि x, y तथा $(x+y)$ में से कोई $\pi/2$ का विषम गुणांक नहीं है, इसलिए $\cos x, \cos y$ तथा $\cos(x+y)$ शून्य नहीं है। अब

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

अंश और हर में $\cos x \cos y$, से विभाजित करने पर –

$$\tan(x+y) = \frac{\dfrac{\sin x\cos y}{\cos x\cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y} - \dfrac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

12. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

यदि सर्वसमिका 11 में y के स्थान पर –y रखने पर $\tan(x-y) = \tan[x+(-y)]$

$$= \frac{\tan x + \tan-(y)}{1 - \tan x \tan(-y)} = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

13. यदि x, y तथा $(x+y)$ में से कोई भी कोण π, का गुणांक नहीं हैं, तो

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$$

क्योंकि x,y तथा $(x+y)$ कोणों में से कोई भी π, का गुणांक नहीं है, इसलिए $\sin x \sin y$ तथा $\sin(x+y)$ शून्य नहीं है। अब $\cot(x+y) = \dfrac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \dfrac{\cos x\cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$

अंश और हर को $\sin x \sin y$, से विभाजित करने पर $\cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x}$

14. $\cot(x-y) = \dfrac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$ जहाँ x,y तथा $x-y$; π के गुणांक नहीं है।

यदि सर्वसमिका 13 में y के स्थान पर $-y$ रखते हैं तो हम उपरोक्त परिणाम प्राप्त करते हैं।

15. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

हम जानते हैं कि $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

y के स्थान पर x रखने पर

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

पुनः $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x.$

अतः $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

अंश और हर को $\cos^2 x$ से विभाजित करने पर–

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}, \quad x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ जहां } n \text{ पूर्णांक है।}$$

16. $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

हम जानते है कि $\qquad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

y के स्थान पर x रखने पर, $\qquad \sin 2x = 2\sin x \cos x.$

पुनः $\qquad \sin 2x = \dfrac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

प्रत्येक पद को $\cos^2 x$ से विभाजित करने पर,

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

17. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}, \quad 2x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ जहाँ n पूर्णांक है।

हम जानते हैं कि $\qquad \tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \tan y}$

y के स्थान पर x रखने पर, $\qquad \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

18. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\because \quad \sin 3x = \sin(2x+x)$

$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

$= 2\sin x \cos x \cos x + (1-2\sin^2 x)\sin x = 2\sin x(1-\sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

19. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\because \quad \cos 3x = \cos(2x+x)$

$= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$

$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\cos x(1-\cos^2 x)$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

20. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}, \qquad 3x \neq n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ जहाँ n पूर्णांक है।

$$\because \quad \tan 3x = \tan(2x+x) = \frac{\tan 2x + \tan x}{1-\tan 2x \tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x.\tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1-\tan^2 x - 2\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

21. (i) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(ii) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

(iv) $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

हम जानते हैं कि

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \qquad (1)$$

और $$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y \qquad (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने एवं घटाने पर,

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y \qquad (3)$$

और $$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y \qquad (4)$$

पुनः $$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad (5)$$

और $$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y \qquad (6)$$

(5) और (6) को जोड़ने एवं घटाने पर

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y \qquad (7)$$

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y \qquad (8)$$

माना कि $x+y=\theta$ तथा $x-y=\phi$, इसलिए

$$x=\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) \text{ तथा } y=\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

(3), (4), (7) तथा (8) में x और y के मान रखने पर

$$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

$$\sin\theta-\sin\phi=2\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

क्योंकि θ तथा ϕ को कोई वास्तविक संख्या मान सकते हैं। हम θ के स्थान पर x तथा ϕ के स्थान पर y रखने पर :

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$,

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$; $\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

टिप्पणी : सर्वसमिका 21 से हम निम्न परिणाम प्राप्त करते हैं:

22. (i) $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$

(ii) $-2\sin x\sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$

(iii) $2\sin x\cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$

(iv) $2\cos x\sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$

23. **दो से अधिक कोणों के योग :** दो से अधिक कोणों के योग के त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात करने के लिए हम योग को दो भागों में विभाजित करके दो कोणों के सूत्र का उपयोग करेंगे।

(i)
$$\begin{aligned}\sin(A+B+C) &= \sin[(A+B)+C]\\ &= \sin(A+B)\cos C + \cos(A+B)\sin C\\ &= [\sin A\cos B + \cos A\sin B]\cos C + [\cos A\cos B - \sin A\sin B]\sin C\\ &= \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C + \cos A\cos B\sin C - \sin A\sin B\sin C\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\cos(A+B+C) &= \cos[(A+B)+C]\\ &= \cos(A+B)\cos C - \sin(A+B)\sin C\\ &= [\cos A\cos B - \sin A\sin B]\cos C - [\sin A\cos B + \cos A\sin B]\sin C\\ &= \cos A\cos B\cos C - \sin A\sin B\cos C - \sin A\cos B\sin C - \cos A\sin B\sin C\end{aligned}$$

(iii) इसी प्रकार

$$\tan(A+B+C) = \frac{\sin(A+B+C)}{\cos(A+B+C)}$$ अंश एवं हर में $\cos A\cos B\cos C$ का भाग देने पर

$$= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 6: सिद्ध कीजिए: $3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4} = 1$

हल: बायाँ पक्ष $= 3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3} - 4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}$

$= 3\times\frac{1}{2}\times 2 - 4\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\times 1 = 3 - 4\sin\frac{\pi}{6} = 3 - 4\times 1/2 = 1 =$ दायाँ पक्ष इतिसिद्धम्

उदाहरण 7: $\cos 15^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ\cos 30^\circ + \sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[\sqrt{3}+1]$ इतिसिद्धम्

उदाहरण 8: सिद्ध कीजिए:

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}.$$

हल : यहाँ बायाँ पक्ष $= \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\sin x\cos y + \cos x\sin y}{\sin x\cos y - \cos x\sin y}$

अंश और हर को $\cos x\cos y$ से विभाजित करने पर,

बायाँ पक्ष $= \frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} =$ दायाँ पक्ष इतिसिद्धम्

उदाहरण 9: दिखाइए $\tan x \tan 2x \tan 3x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$

हल: हम जानते हैं कि $$3x = 2x + x$$

इसलिए $$\tan 3x = \tan(2x + x)$$

या $$\tan 3x = \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$$

या $$\tan 3x - \tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 2x + \tan x$$

या $$\tan 3x - \tan 2x - \tan x = \tan 3x \tan 2x \tan x$$

या $$\tan 3x \tan 2x \tan x = \tan 3x - \tan 2x - \tan x$$ इतिसिद्धम्

उदाहरण 10: सिद्ध कीजिए $\dfrac{\cos 7x + \cos 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \cot x$

हल : सर्वसमिकाओं $21(i)$ तथा $21(iv)$ का उपयोग करने पर,

बायाँ पक्ष $= \dfrac{2\cos\dfrac{7x+5x}{2}\cos\dfrac{7x-5x}{2}}{2\cos\dfrac{7x+5x}{2}\sin\dfrac{7x-5x}{2}} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cot x =$ दायाँ पक्ष इतिसिद्धम्

उदाहरण 11: सिद्ध कीजिए कि–

$\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = 3/16$

हल : बायाँ पक्ष $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \dfrac{1}{2}\sin 60°(2\sin 20° \sin 40°)\sin 80°$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}[\cos 20° - \cos 60°]\sin 80°$$

[क्योंकि $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$]

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\cos 20° \sin 80° - \left(\frac{1}{2}\right)\sin 80°\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}(2\cos 20° \sin 80°) - \left(\frac{1}{2}\right)\sin 80°\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin 100° + \sin 60° - \sin 80°]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\sin\left(180° - 80°\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 80°\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\sin 80° + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 80°\right]$$

$= 3/16$ इतिसिद्धम्

उदाहरण 12: सिद्ध कीजिए कि:

$$2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}=0$$

हल : बायाँ पक्ष $2\cos\frac{\pi}{13}\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{13}+\frac{9\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{13}-\frac{9\pi}{13}\right)+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$=\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13} \qquad [\cos(-\theta)=\cos\theta]$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{13}\right)+\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{13}\right)+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$=-\cos\frac{3\pi}{13}-\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}$$

$$=0$$

इतिसिद्धम्

उदाहरण 13: यदि $A+B+C=180^\circ$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि:

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

हल: $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=2\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad [\text{क्योंकि } A+B+C=180^\circ]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\frac{C}{2}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\left\{90^\circ-\left(\frac{A+B}{2}\right)\right\}\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right]$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

इतिसिद्धम्

प्रश्नमाला 3.3

सिद्ध कीजिए :

1. $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\tan^2\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$

2. $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$

3. $\cot^2\frac{\pi}{6}+\operatorname{cosec}\frac{5\pi}{6}+3\tan^2\frac{\pi}{6}=6$

4. $2\sin^2\frac{3\pi}{4}+2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\sec^2\frac{\pi}{3}=10$

5. मान ज्ञात कीजिए: (i) $\sin 75^\circ$ (ii) $\tan 15^\circ$

सिद्ध कीजिए:

6. $\tan 225^\circ \cot 405^\circ + \tan 765^\circ \cot 675^\circ = 0$

7. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$

8. $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$

9. $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$

10. $\dfrac{\cos(\pi+x)\cos(-x)}{\sin(\pi-x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\cot^2 x$

11. $\sin(n+1)x\sin(n+2)x+\cos(n+1)x\cos(n+2)x=\cos x$

12. $\sin^2 6x-\sin^2 4x=\sin 2x\sin 10x$

13. $\sin 2x+2\sin 4x+\sin 6x=4\cos^2 x\sin 4x$

14. $\cot 4x(\sin 5x+\sin 3x)=\cot x(\sin 5x-\sin 3x)$

15. $\dfrac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}=\tan x$

16. $\dfrac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\dfrac{x-y}{2}$

17. $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x$

18. $\dfrac{\cos 4x+\cos 3x+\cos 2x}{\sin 4x+\sin 3x+\sin 2x}=\cot 3x$

19. $\tan 4x=\dfrac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$

20. $\cos 4x=1-8\sin^2 x\cos^2 x$

21. $\cos 6x=32\cos^6 x-48\cos^4 x+18\cos^2 x-1$

22. $[1+\cot\theta-\sec(\theta+\pi/2)][1+\cot\theta+\sec(\theta+\pi/2)]=2\cot\theta$

3.07 त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometrical equations)

एक अज्ञात चर राशि (माना x) में त्रिकोणमितीय फलनों वाले समीकरण को त्रिकोणमितीय समीकरण कहते हैं। इस अनुच्छेद में, हम ऐसे ही समीकरणों के हल ज्ञात करेंगे। त्रिकोणमितीय समीकरण के ऐसे हल जहाँ $0 \le x < 2\pi$ होता है, **मुख्य हल** (Principal solutions) कहलाते हैं। पूर्णांक 'n' से युक्त व्यंजक जो किसी त्रिकोणमितीय समीकरण के सभी हल व्यक्त करता है, उसे व्यापक हल (General solution) कहते हैं। हम पूर्णांकों के समुच्चय को 'Z' से प्रदर्शित करेंगे।

निम्नलिखित उदाहरण त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करने में सहायक होंगे :

उदाहरण 14: समीकरण $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ का मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते है कि $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

इसलिए, मुख्य हल $x=\dfrac{\pi}{3}$ तथा $\dfrac{2\pi}{3}$ है।

उदाहरण 15: समीकरण $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ का मुख्य हल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. इस प्रकार $\tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

तथा $\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ तथा $-\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

अतः $\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

इसलिए, मुख्य हल $5\pi/6$ तथा $11\pi/6$ हैं।

अब, हम त्रिकोणमितीय समीकरणों का व्यापक हल ज्ञात करेंगे। हम देखते हैं कि $\sin x = 0$ तो $x = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

$\cos x = 0$ तो $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रमेय 1: किन्हीं वास्तविक संख्याओं x तथा y के लिए

$\sin x = \sin y$ तो $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ से प्राप्त होता है।

प्रमाण यदि $\sin x = \sin y$, तो

$\sin x - \sin y = 0$ या $2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

अर्थात् $\cos\frac{x+y}{2} = 0$ या $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

इसलिए $\frac{x+y}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ या $\frac{x-y}{2} = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $x = (2n+1)\pi - y$ या $x = 2n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अतः $x = (2n+1)\pi + (-1)^{2n+1} y$ या $x = 2n\pi + (-1)^{2n} y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उपर्युक्त दोनों परिणामों को मिलाने पर, $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रमेय 2: किन्हीं वास्तविक संख्याओ x तथा y के लिए, $\cos x = \cos y$ से $x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ से प्राप्त होता है।

प्रमाण: यदि $\cos x = \cos y$, तो

$\cos x - \cos y = 0$ अर्थात् $-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 0$

इस प्रकार $\sin\frac{x+y}{2} = 0$ या $\sin\frac{x-y}{2} = 0$

इसलिए $\frac{x+y}{2} = n\pi$ या $\frac{x-y}{2} = n\pi$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $x = 2n\pi - y$ या $x = 2n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अतः $x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

प्रमेय 3: सिद्ध कीजिए कि यदि x तथा y का $\pi/2$ विषम गुणज नहीं है तो $\tan x = \tan y$ से $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ प्राप्त होता है।

प्रमाणः यदि $\tan x = \tan y$, तो $\tan x - \tan y = 0$

या $$\frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = 0$$

या $$\sin(x - y) = 0$$

इसलिए $x - y = n\pi$ अर्थात् $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 16: समीकरण, $2\sin\theta + 1 = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ है $2\sin\theta + 1 = 0$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

अतः व्यापक हल

$\theta = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{6}$, जहाँ $n \in Z$ होगा।

अब हम व्यापक हल ज्ञात करने हेतु निम्न परिणाम सिद्ध करेंगे :

उदाहरण 17: $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{4\pi}{3}$

अतः $\sin x = \sin\dfrac{4\pi}{3}$

इसलिए $x = n\pi + (-1)^n \dfrac{4\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ [1 से]

टिप्पणी : $4\pi/3$, x का एक ऐसा मान है जिसके संगत $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ है। x का कोई भी अन्य मान लेकर समीकरण हल किया जा सकता है, जिसके लिए $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ हो, यह सभी विधियों से प्राप्त हल एक ही होंगे यद्यपि वे प्रत्यक्षतःविभिन्न दिखाई पड़ सकते हैं।

उदाहरण 18: $\cos x = 1/2$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हैं $\cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$

इसलिए $x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$. [प्रमेय 2 से]

उदाहरण 19: $\tan 2x = -\cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ का व्यापक ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $\tan 2x = -\cot\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

या $\tan 2x = \tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$

इसलिए $2x = n\pi + x + \frac{5\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ [प्रमेय 3 से]

या $x = n\pi + \frac{5\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 20: व्यापक हल ज्ञात कीजिए $\sin 2x - \sin 4x + \sin 6x = 0$

हलः समीकरण को लिख सकते हैं,

$\sin 6x + \sin 2x - \sin 4x = 0$

या $2\sin 4x \cos 2x - \sin 4x = 0$

अर्थात् $\sin 4x(2\cos 2x - 1) = 0$

इसलिए $\sin 4x = 0$ या $\cos 2x = 1/2$

अर्थात् $\sin 4x = \sin 0$ या $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$

अतः $4x = n\pi$ या $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

अर्थात् $x = \frac{n\pi}{4}$ या $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 21: हल कीजिए $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

हल : समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं

$2\left(1 - \sin^2 x\right) + 3\sin x = 0$

या $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

या $(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

अतः $\sin x = -1/2$ या $\sin x = 2$

परन्तु $\sin x = 2$ असंभव है $[\because -1 \le \sin x \le 1]$

इसलिए $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{7\pi}{6}$

अतः हल : $x = n\pi + (-1)^n \left(7\pi/6\right)$ है, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

उदाहरण 22: समीकरण $\sin^2\theta - \cos\theta = 1/4$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये समीकरण से

$4\sin^2\theta - 4\cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $4\left(1 - \cos^2\theta\right) - 4\cos\theta - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0$

$\Rightarrow$ $\left(2\cos\theta + 3\right)\left(2\cos\theta - 1\right) = 0$

यदि $2\cos\theta + 3 = 0 \Rightarrow \cos\theta = -3/2$ जो कि असत्य है। अतः

$2\cos\theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \cos\theta = 1/2 = \cos\pi/3$

अतः दिये गए समीकरण का व्यापक हल $\theta = 2n\pi \pm \pi/3$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$ होगा।

उदाहरण 23: समीकरण $\cos 3\theta - \sin\theta = \cos 5\theta$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हलः दिए गए समीकरण से

$$\cos 3\theta - \cos 5\theta = \sin\theta$$

$\Rightarrow \quad -2\sin\left(\frac{3\theta+5\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{3\theta-5\theta}{2}\right)-\sin\theta=0 \qquad [\because \sin(-\theta)=-\sin\theta]$

$\Rightarrow \quad 2\sin 4\theta\sin\theta-\sin\theta=0$

$\Rightarrow \quad (2\sin 4\theta-1)\sin\theta=0$

$\Rightarrow \quad 2\sin 4\theta-1=0$ या $\sin\theta=0$

$\Rightarrow \quad \sin 4\theta=1/2=\sin\pi/6$ या $\sin\theta=\sin 0$

$\Rightarrow \quad 4\theta=n\pi+(-1)^n\pi/6$ या $\theta=n\pi$

अतः दिये गये समीकरण का व्यापक हल $\theta=n\pi; \frac{n\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}$, जहाँ $n\in\mathbf{Z}$ होगा।

प्रश्नमाला 3.4

निम्नलिखित समीकरणों के मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिएः

1. $\tan x=\sqrt{3}$
2. $\sec x=2$
3. $\cot x=-\sqrt{3}$
4. $\operatorname{cosec} x=-2$

निम्नलिखित समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

5. $\cos 4x=\cos 2x$
6. $\cos 3x+\cos x-\cos 2x=0$
7. $\sin 2x+\cos x=0$
8. $\sec^2 2x=1-\tan 2x$
9. $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0$

विविध उदाहरण

उदाहरण 24: यदि $\sin x=\frac{3}{5}, \cos y=-\frac{12}{13}$ है, जहाँ x तथा y दोनों द्वितीय चतुर्थांश में स्थित हों तो $\sin(x+y)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \tag{1}$$

अब $\quad \cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad \cos x=\pm\frac{4}{5}$

क्योंकि x द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, अतः $\cos x$ ऋणात्मक होगा $\therefore$ $\cos x=-4/5$ है।

अब पुनः $\sin^2 y=1-\cos^2 y=1-\frac{144}{169}=\frac{25}{169} \quad \Rightarrow \quad \sin y=\pm 5/13$

क्योंकि y द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, $\sin y$ धनात्मक होगा $\therefore$ $\sin y=5/13$ है। $\sin x, \sin y, \cos x$ तथा $\cos y$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\sin(x+y)=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13}=-\frac{36}{65}-\frac{20}{65}=-\frac{56}{65}$$

उदाहरण 25: सिद्ध कीजिए: $\cos 2x \cos\frac{x}{2} - \cos 3x \cos\frac{9x}{2} = \sin 5x \sin\frac{5x}{2}$

हल : बायाँ पक्ष $= \frac{1}{2}\left[2\cos 2x \cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{9x}{2}\cos 3x\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}+3x\right)-\cos\left(\frac{9x}{2}-3x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{15x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{5x}{2}-\cos\frac{15x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}+\frac{15x}{2}}{2}\right\}\sin\left\{\frac{\frac{5x}{2}-\frac{15x}{2}}{2}\right\}\right]$$

$$= -\sin 5x \sin\left(-\frac{5x}{2}\right) = \sin 5x \sin\frac{5x}{2} =$$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 26:. $\tan\frac{\pi}{8}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $x = \pi/8$ हो तो $2x = \pi/4$

अब $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ से $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\tan(\pi/8)}{1-\tan^2(\pi/8)}$

मान लीजिए $y = \tan\frac{\pi}{8}$ तो $1 = \frac{2y}{1-y^2}$

या $y^2 + 2y - 1 = 0$

इसलिए $y = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$

क्योंकि $\pi/8$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, $y = \tan(\pi/8)$ धनात्मक है। अतः $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$

उदाहरण 27: यदि $\tan x = 3/4, \pi < x < 3\pi/2,$ तो $\sin(x/2), \cos(x/2)$ तथा $\tan(x/2)$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $\pi < x < 3\pi/2$ है इसलिए $\cos x$ ऋणात्मक है।

पुनः $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$.

इसलिए $\sin\frac{x}{2}$ धनात्मक होगा तथा $\cos\frac{x}{2}$ ऋणात्मक होगा।

अब $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x = 1 + (9/16) = 25/16$

इसलिए $\cos^2 x = 16/25$ या $\cos x = -4/5$ $\left[\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right]$

अब $2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ $\left[\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2}\right]$

इसलिए $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{9}{10}$ या $\sin \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ $\left[\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4}\right]$

पुनः $2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

इसलिए $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{10}$ या $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ $\left[\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4}\right]$

अतः $\tan \frac{x}{2} = \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(\frac{-\sqrt{10}}{1}\right) = -3$

उदाहरण 28: सिद्ध कीजिए: $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

हल : हम पाते हैं,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos \frac{2\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x + 2\cos 2x \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[3 + \cos 2x - 2\cos 2x \cos \frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[3 + \cos 2x - \cos 2x] = \frac{3}{2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

विविध प्रश्नमाला–3

1. एक समकोण होता है–

(A) एक रेडियन के बराबर (B) 90 डिग्री के बराबर (C) एक डिग्री के बराबर (D) 90 रेडियन के बराबर

2. तृतीय चतुर्थांश में निम्न त्रिकोणमितीय फलन धनात्मक होता है–

(A) $\sin\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\cos\theta$ (D) $\sec\theta$

3. $\operatorname{cosec}(-\theta)$ बराबर है

(A) $\sin\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\cos\theta$ (D) $-\operatorname{cosec}\theta$

4. $\tan(90^\circ-\theta)$ बराबर है

(A) $-\tan\theta$ (B) $\cot\theta$ (C) $\tan\theta$ (D) $-\cot\theta$

5. $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ हो, तो θ का मान होगा

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $-\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{3\pi}{4}$

6. यदि n एक सम पूर्णांक हो, तो $\sin(2n\pi\pm\theta)$ का मान होगा

(A) $\pm\cos\theta$ (B) $\pm\tan\theta$ (C) $\pm\sin\theta$ (D) $\pm\cot\theta$

7. $\cot 15^\circ$ का मान होगा

(A) $2+\sqrt{3}$ (B) $-2+\sqrt{3}$ (C) $2-\sqrt{3}$ (D) $-2-\sqrt{3}$

8. $\cos 15^\circ$ का मान होगा

(A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (B) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

9. $2\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$ का मान होगा

(A) 1 (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}-1$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

10. $\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$ का मान होगा

(A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (B) 0 (C) $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

11. यदि $\sin A=\frac{3}{5}$ हो, तो $\sin 2A$ का मान होगा

(A) 4 / 25 (B) 5 / 25 (C) 24 / 25 (D) 4 / 5

12. यदि $\sin A=3/4$ हो, तो $\sin 3A$ का मान होगा

(A) 9 /16 (B) –9 / 16 (C) 9 / 32 (D) 7 / 16

13. यदि $\tan A=1/5$ हो, तो $\tan 3A$ का मान होगा

(A) 47 / 25 (B) 37 / 55 (C) 37 / 11 (D) 47 / 55

14. यदि $A+B=\pi/4$ हो, तो $(1+\tan A)(1+\tan B)$ का मान होगा

(A) 3 (B) 2 (C) 4 (D) 1

15. समीकरण $\sec^2\theta=2$ में θ का व्यापक मान होगा

(A) $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ (B) $n\pi\pm\frac{\pi}{2}$ (C) $n\pi\pm(-1)^n\frac{\pi}{4}$ (D) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

16. सिद्ध कीजिए कि–

(i) $\cos\theta+\sin(270^\circ+\theta)-\sin(270^\circ-\theta)+\cos(180^\circ+\theta)=0$

(ii) $\sec\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\sec\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\tan\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)=-1$

17. $\sin\left\{n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ n एक पूर्णांक हो।

18. यदि $\sin A+\sin B=a$ तथा $\cos A+\cos B=b$ हो, तो सिद्ध कीजिए–

(i) $\sin(A+B)=(2ab)/(a^2+b^2)$ (ii) $\cos(A+B)=(b^2-a^2)/(a^2+b^2)$

19. यदि $A+B+C=180^\circ$ हो, तो सिद्ध कीजिए

(i) $\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C=1-4\sin A\sin B\cos C$

(ii) $\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

20. यदि $A+B+C=2\pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए

$\cos^2 B+\cos^2 C-\sin^2 A=2\cos A\cos B\cos C$

21. निम्न समीकरण का हल ज्ञात कीजिए

$2\tan\theta-\cot\theta+1=0$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r, चाप की लम्बाई ℓ तथा केन्द्र पर अंतरित कोण θ रेडियन हैं, तो $\ell=r\theta$
2. इकाई त्रिज्या के वृत्त के केन्द्र पर एक इकाई लम्बाई के चाप द्वारा बने कोण को एक रेडियन कहते हैं।
3. रेडियन माप $=\frac{\pi}{180}\times$ डिग्री माप
4. डिग्री माप $=\frac{180}{\pi}\times$ रेडियन माप
5. $\cos^2 x+\sin^2 x=1$
6. $1+\tan^2 x=\sec^2 x$
7. $1+\cot^2 x=\operatorname{cosec}^2 x$
8. $\cos(2n\pi+x)=\cos x$
9. $\sin(2n\pi+x)=\cos x$
10. $\sin(-x)=-\sin x$
11. $\cos(-x)=\cos x$
12. $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
13. $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
14. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$
15. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$
16. $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

17. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

18. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos(2\pi - x) = \cos x \qquad \sin(2\pi - x) = -\sin x$

19. यदि x, y और $(x \pm y)$ में से कोई कोण $\pi/2$ का विषम गुणांक नहीं हैं, तो

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \text{ तथा } \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

20. यदि x, y और $(x \pm y)$ में से कोई कोण π का विषम गुणांक नहीं हैं, तो

$$\cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot y + \cot x} \text{ तथा } \cot(x-y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$$

21. $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}, \quad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

22. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

23. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x, \ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

24. $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

25. (i) $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (ii) $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

(iii) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (iv) $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

26. (i) $2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$ (ii) $-2\sin x \sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$

(iii) $2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ (iv) $2\cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$

27. $\sin x = 0$ हो तो $x = n\pi$, जहाँ $n \in \boldsymbol{Z}$

28. $\cos x = 0$ हो तो $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n \in \boldsymbol{Z}$

29. $\sin x = \sin y$ हो तो $x = n\pi + (-1)^n y$, जहाँ $n \in \boldsymbol{Z}$

30. $\cos x = \cos y$, हो तो $x = 2n\pi \pm y$, जहाँ $n \in \boldsymbol{Z}$

31. $\tan x = \tan y$ हो तो $x = n\pi + y$, जहाँ $n \in \boldsymbol{Z}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 3.1

1. (i) $\frac{5\pi}{36}$; (ii) $-\frac{19\pi}{72}$; (iii) $\frac{26\pi}{9}$ 2. (i) $39^\circ 22' 30''$; (ii) $-229^\circ 5' 29''$; (iii) 300°

3. 12π 4. $12^\circ 36'$ 5. $\frac{20\pi}{3}$ 6. 5 : 4 7. (i) $\frac{2}{15}$; (ii) $\frac{7}{25}$

प्रश्नमाला 3.2

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{cosec} x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \sec x = -2, \tan x = \sqrt{3}, \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\sin x = -\frac{4}{5}, \operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}, \cos x = -\frac{3}{5}, \sec x = -\frac{5}{3}, \sec x = -\frac{5}{3}, \tan x = \frac{4}{3}$

3. $\sin x = -\frac{12}{13}, \operatorname{cosec} x = -\frac{13}{12}, \cos x = \frac{5}{13}, \tan x = -\frac{12}{5}, \cot x = -\frac{5}{12}$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 5. $\sqrt{3}$ 6. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 7.1

प्रश्नमाला 3.3

5. (i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $2-\sqrt{3}$

प्रश्नमाला 3.4

1. $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$ 2. $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$

3. $\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi +, \frac{5\pi}{6}, n \in \boldsymbol{Z}$ 4. $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \boldsymbol{Z}$

5. $x = \frac{n\pi}{3}$ or $x = n\pi, n \in \boldsymbol{Z}$ 6. $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ or $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$

7. $x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ or $(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \boldsymbol{Z}$

8. $x = \frac{n\pi}{2}$ or $\frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, n \in \boldsymbol{Z}$ 9. $x = \frac{n\pi}{3}$ or $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \boldsymbol{Z}$

विविध प्रश्नमाला–3

1. B **2.** B **3.** D **4.** B **5.** A **6.** C
7. A **8.** A **9.** D **10.** D **11.** C **12.** A
13. B **14.** B **15.** A **17.** $1/\sqrt{2}$

21. $n\pi + \tan^{-1}\frac{1}{2}, n\pi + \frac{3\pi}{4}$ जहाँ $n \in \mathbf{Z}$

4

गणितीय आगमन का सिद्धान्त
(Principle of Mathematical Induction)

4.01 परिचय (Introduction)

हम गणित के व्यापक परिणामों की सहायता से विशेष गणितीय परिणाम प्राप्त करते हैं जैसे

व्यापक कथनः किसी संख्या के अंको के योग 3 से भाजित है तो संख्या 3 से भाजित होती है।

विशेष कथनः 210, 3 से भाजित है।

$\because$ संख्या 210 के अंको का योग $=2+1+0=3$ यह 3 से भाजित है।

$\therefore$ अतः संख्या 210 भी 3 से भाजित है।

इस उदाहरण में एक व्यापक गणितीय परिणाम की सहायता से एक विशिष्ट गणितीय परिणाम को निगमित किया गया है। इस तरह किसी गणितीय परिणाम को प्राप्त करना गणितीय निगमन है।

इसके विपरित हम निम्न विशेष गणितीय परिणामों की विवेचना करते हैं:

$$1=\frac{1.2}{2}$$

$$1+2=\frac{2.3}{2}$$

$$1+2+3=\frac{3.4}{2}$$

$$1+2+3+4=\frac{4.5}{2}$$

उपरोक्त विशेष परिणामों की विवेचना से हम एक व्यापक गणितीय परिणाम की ओर प्रेरित होते हैं कि

$$1+2+...+n=\frac{n.(n+1)}{2}, \text{ जहाँ } n\in N$$

या

प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग $\dfrac{n(n+1)}{2}$ होता है।

आगमन विशेष स्थिति के गणितीय परिणामों को व्यापक परिणाम में परिवर्तन करने का प्रक्रम है। परन्तु उपर्युक्त विधि से प्राप्त गणितीय परिणाम हमेशा सत्य हो, आवश्यक नहीं है क्योंकि ये परिणाम कुछ विशेष स्थितियों से प्रेरित परिणाम है। जैसे n^2+n+41 में $n=1,2,...,39$ रखने पर अभाज्य संख्याएँ प्राप्त होती परन्तु $n=40$ रखने पर अभाज्य संख्या प्राप्त नहीं होती हैं। अतः कुछ परिणामों को आधार मानकर व्यापक परिणाम नहीं निकाला जा सकता। अतः व्यापक परिणाम स्थापित करने के लिए एक निश्चित प्रक्रिया का अनुसरण करना आवश्यक होता है। यह निश्चित प्रक्रम जिसे गणितीय आगमन सिद्धान्त कहते हैं, निम्नानुसार हैः

गणितीय आगमन का सिद्धान्त

इस सिद्धान्त के अनुसार कोई कथन $P(n)$, n के सभी प्राकृत मानों के लिए सत्य है यदि

(i) P(1) सत्य है, अर्थात् दिया कथन $n=1$ के लिए सत्य है। तथा

(ii) P(m) सत्य है, तो P(m+1) भी सत्य होगा।

अर्थात् दिया गया कथन एक प्राकृत संख्या $n=m$ के लिए सत्य है तो यह $n=m+1$ के लिए भी कथन सत्य होगा।

सिद्धान्त का प्रथम चरण मात्र तथ्य का कथन है। इस चरण में हम दर्शाते हैं कि दिया गया कथन $n=1$ के लिए सत्य है। परन्तु यदि दिया गया कथन $n \ge i$ के लिए सत्य है तो हम इस चरण में $n=1$ के स्थान पर $n=i$ के लिए कथन सत्य है, दर्शाएँगे।

सिद्धान्त का द्वितीय चरण आगमन चरण (induction step) है। इस चरण में हम कथन को एक प्राकृत संख्या $n=m$ के लिए सत्य मान लेते हैं तथा यह सिद्ध करते हैं कि कथन $n=m+1$ के लिए भी सत्य है। उदाहणार्थ

(i) $P(n)=3^{2n}-1$, जहाँ $n \in N$, 8 से भाज्य है। (ii) $P(n)=2+4+...+2n=n(n+1)$, जहाँ $n \in N$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ जहाँ } n \in N .$$

हल: हमें सिद्ध करना है कि

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \text{ जहाँ } n \in N \tag{1}$$

(1) में $n=1$ रखने पर, वामपक्ष $=1^2=1$ तथा दक्षिण पक्ष $=\frac{1.2.3}{6}=1$

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=1$ के लिए सत्य है।

माना कि उपर्युक्त कथन (1), $n=m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$1^2+2^2+...+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \tag{2}$$

अब हमें सिद्ध करना है कि कथन (1) $n=m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$$1^2+2^2+...+m^2+(m+1)^2=\frac{m+1\{(m+1)+1\}\{2(m+1)+1\}}{6} \tag{3}$$

(3) का वाम पक्ष $=1^2+2^2+...+m^2+(m+1)^2$

$$=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2 \qquad \text{[(2) के प्रयोग से]}$$

$$=\frac{m(m+1)(2m+1)+6(m+1)^2}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(2m^2+7m+6)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

$$=\frac{(m+1)\{(m+1)+1\}\{2(m+1)+1\}}{6}$$

= दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=m+1$ के लिए भी सत्य है। फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया गया कथन प्रत्येक प्राकृत संख्या के लिए सत्य हैं।

उदाहरण 2. गणितीय आगमन सिद्धांत से सिद्ध कीजिए:

$$1.2+2.3+...+n.(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \text{ जहाँ } n \in N.$$

हल: हमें सिद्ध करना है कि

$$1.2+2.3+...+n.(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \text{ जहाँ } n \in N. \quad (1)$$

(1) में $n=1$ रखने पर, वाम पक्ष $=1.2=2$

तथा दक्षिण पक्ष $=\frac{1.2.3}{3}=2$

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=1$ के लिए सत्य है।

माना कि उपर्युक्त कथन (1), $n=m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$1.2+2.3+...+m(m+1)=\frac{m(m+1)(m+2)}{3} \quad (2)$$

अब हमें सिद्ध करना है कि यह कथन $n=m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$$1.2+2.3+...+m(m+1)+(m+1)(m+2)=\frac{(m+1)\{(m+1)+1\}\{(m+1)+2\}}{3} \quad (3)$$

(3) का वाम पक्ष $=1.2+2.3+...+m(m+1)+(m+1)(m+2)$

$=\frac{m(m+1)(m+2)}{3}+(m+1)(m+2)$ [(2) के प्रयोग से]

$=(m+1)(m+2)\left(\frac{m}{3}+1\right)$

$=\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3}$

$=\frac{(m+1)\{(m+1)+1\}\{(m+1)+2\}}{3}$

= दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=m+1$ के लिए भी सत्य है। फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया गया कथन प्रत्येक n के लिए सत्य है।

उदाहरण 3. गणितीय आगमन सिद्धांत से सिद्ध कीजिए:

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+...+\frac{1}{(3n-1).(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}, n \in N$$

हल: हमें सिद्ध करना है कि

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+...+\frac{1}{(3n-1).(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}, n \in \mathrm{N} \quad (1)$$

(1) में $n=1$ रखने पर, वाम पक्ष $=\frac{1}{2.5}=\frac{1}{10}$ तथा दक्षिण पक्ष $=\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}$

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=1$ के लिए सत्य है।

माना कि उपर्युक्त कथन (1), $n = m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\ldots+\frac{1}{(3m-1).(3m+2)}=\frac{m}{6m+4} \tag{2}$$

अब हमें सिद्ध करना है कि यह कथन $n = m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\ldots+\frac{1}{(3m-1)(3m+2)}+\frac{1}{(3m+2)(3m+5)}=\frac{m+1}{6(m+1)+4} \tag{3}$$

(3) का वाम पक्ष

$$=\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\ldots+\frac{1}{(3m-1).(3m+2)}+\frac{1}{(3m+2).(3m+5)}$$

$$=\frac{m}{6m+4}+\frac{1}{(3m+2).(3m+5)} \qquad \text{[(2) के प्रयोग से]}$$

$$=\frac{1}{(3m+2)}\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{3m+5}\right)=\frac{1}{(3m+2)}\left\{\frac{3m^2+5m+2}{2(3m+5)}\right\}$$

$$=\frac{1}{3m+2}\frac{(3m+2)(m+1)}{2(3m+5)}=\frac{(m+1)}{2(3m+5)}=\frac{m+1}{6m+10}$$

$$=\frac{m+1}{6(m+1)+4}$$

= दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n = m+1$ के लिए भी सत्य है। फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया गया कथन प्रत्येक n के लिए सत्य है।

उदाहरण 4. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिएः

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1, \text{ जहाँ } n \in N .$$

हल : हमें सिद्ध करना है कि

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1, \text{ जहाँ } n \in N . \tag{1}$$

कथन (1) में $n = 1$ रखने पर

वाम पक्ष $= 1+1 = 2$

दक्षिण पक्ष $= 1+1 = 2$

अतः कथन (1), $n = 1$ के लिए सत्य है।

माना कि कथन (1), $n = m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m}\right)=m+1 \tag{2}$$

अब हमें सिद्ध करना है कि कथन (1), $n = m+1$ के लिए भी सत्य है, अर्थात्

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=(m+1)+1 \tag{3}$$

(3) का वाम पक्ष

$$\left\{\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{m}\right)\right\}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)=(m+1)\left(1+\frac{1}{m+1}\right)$$ [(2) के प्रयोग से]

$$=(m+1)\frac{m+2}{m+1}=(m+1)+1= \text{दक्षिण पक्ष}$$

अतः कथन (1), $n=m+1$ के लिए भी सत्य है जबकि कथन (1), $n=m$ के लिए सत्य हो। फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से कथन (1) प्रत्येक n के लिए सत्य है।

उदाहरण 5. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि $n^2>2n$, जहाँ $n\geq 3$

हल : हमें सिद्ध करना है कि

$$n^2>2n,\quad n\geq 3 \tag{1}$$

$\because$ कथन (1) को $n\geq 3$ के लिए सिद्ध करना है अतः प्रथम हम दर्शाएँगे कि कथन (1) में $n=3$ के लिए सत्य है।

कथन (1) में $n=3$ रखने पर

वाम पक्ष $=3^2=9$

दक्षिण पक्ष $=2\times 3=6$

$\therefore$ वाम पक्ष > दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=3$ के लिए सत्य है।

अब माना कि कथन (1), $n=m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$m^2>2m \tag{2}$$

हम सिद्ध करेंगे कि यह कथन $n=m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$$(m+1)^2>2(m+1) \tag{3}$$

(3) का वाम पक्ष $=(m+1)^2=m^2+2m+1$

$>2m+2m+1=2(m+1)+2m-1$ [(2) के प्रयोग से]

$>2(m+1)$

$\therefore$ वाम पक्ष > दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=m+1$ के लिए भी सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से कथन (1), प्रत्येक $n\geq 3$ के लिए सत्य है।

उदाहरण 6. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि

x^n-y^n, $x-y$ से भाज्य है, जहाँ $n\in N$.

हल : हमें सिद्ध करना है कि

x^n-y^n, $x-y$ से भाज्य है, जहाँ $n\in N$, अर्थात्

$x^n-y^n=k(x-y)$, जहाँ $n\in N$ तथा k, x और y में एक बहुपद है। (1)

(1) में $n=1$ रखने पर, वाम पक्ष $=x^1-y^1$

$=1(x-y)$

$=k(x-y)$ [यहाँ $k=1\in Z$]

= दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n=1$ के लिए सत्य है।

माना कि उपर्युक्त कथन, $n = m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$x^m - y^m = k_1(x-y)$, जहाँ k_1, x तथा y में एक $(m-1)$ घात का बहुपद है। (2)

अब हमें सिद्ध करना है कि यह कथन $n = m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$x^{m+1} - y^{m+1} = k_2(x-y)$, जहाँ k_2, x तथा y में m घात का एक बहुपद है। (3)

(3) का वाम पक्ष $= x^{m+1} - y^{m+1}$

$$= x^{m+1} - x^m y + x^m y - y^{m+1} = x^m(x-y) + y(x^m - y^m)$$

$$= x^m(x-y) + y.k_1(x-y) = (x^m + k_1 y)(x-y) \qquad [(2) \text{ के प्रयोग से}]$$

$= k_2(x-y)$, जहाँ k_2, x तथा y में घात का बहुपद है।

= दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n = m+1$ के लिए भी सत्य है।

फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया गया कथन प्रत्येक n के लिए सत्य है।

उदाहरण 7. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए:

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}, n \in N.$$

हल : हमें सिद्ध करना है कि

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}, n \in \mathrm{N}. \qquad (1)$$

(1) में $n = 1$ रखने पर, वाम पक्ष $= \sin\theta$ तथा दक्षिण पक्ष $= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta$

$\therefore$ वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

अतः कथन (1), $n = 1$के लिए सत्य है।

माना कि उपर्युक्त कथन $n = m$ के लिए सत्य है, अर्थात्

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2m-1)\theta = \frac{\sin^2 m\theta}{\sin\theta} \qquad (2)$$

अब हमें सिद्ध करना है कि यह कथन $n = m+1$ के लिए भी सत्य होगा, अर्थात्

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2m-1)\theta + \sin(2m+1)\theta = \frac{\sin^2(m+1)\theta}{\sin\theta} \qquad (3)$$

(3) का वाम पक्ष

$$= \sin\theta + \ldots + \sin(2m-1)\theta + \sin(2m+1)\theta$$

$$= \frac{\sin^2 m\theta}{\sin\theta} + \sin(2m+1)\theta = \frac{1}{\sin\theta}\left\{\sin^2 m\theta + \sin\theta.\sin(2m+1)\theta\right\} \qquad [(2) \text{ के प्रयोग से}]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\sin^2 m\theta + \frac{1}{2}\left\{\cos 2m\theta - \cos(2m+2)\theta\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\sin^2 m\theta + \frac{1}{2}\left\{1 - 2\sin^2 m\theta - 1 + 2\sin^2(m+1)\theta\right\}\right]$$

$$= \frac{\sin^2(m+1)\theta}{\sin\theta} = \text{दक्षिण पक्ष}$$

अतः कथन (1), $n = m+1$ के लिए भी सत्य है।

फलतः गणितीय आगमन सिद्धान्त से दिया गया कथन प्रत्येक n के लिए सत्य है।

उदाहरण 8. गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि

$10^{2n-1}+1, 11$ से भाज्य है, जहाँ $n \in N$.

हल : माना दिया गया कथन $P(n)$ है, अर्थात् $P(n): 10^{2n-1}+1, 11$ से भाज्य है।

$n = 1$ के लिए

$P(1): 10^{2-1}+1 = 11$ जो कि 11 से भाज्य है।

अर्थात् कथन $P(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

माना दिया गया कथन $P(n), n = m$ के लिए सत्य है अर्थात्

$$10^{2m-1}+1 = 11k,\ k \in N \tag{1}$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि कथन $P(n),\ n = m+1$ के लिए भी सत्य है जबकि $P(m)$ सत्य हो।

$$\begin{aligned}10^{2(m+1)-1}+1 &= 10^{2m+2-1}+1\\ &= 10^2 10^{2m-1}+10^2-99\\ &= 100\left(10^{2m-1}+1\right)-99\\ &= 100\times 11k-99 \qquad [(1) \text{ के प्रयोग से}]\\ &= 11(100k-9)\end{aligned}$$

अर्थात् $10^{2(m+1)-1}+1,\ 11$ से भाज्य है।

इस प्रकार, कथन $P(m+1)$ सत्य है जबकि $P(m)$ सत्य है इसलिए गणितीय आगमन सिद्धान्त से $P(n)$ प्रत्येक धन पूर्णांक के लिए सत्य है।

अर्थात् $10^{2n-1}+1, 11$ से भाज्य हैं जबकि $n \in N$

प्रश्नमाला 4.1

1. यदि कथन $P(n): (n+3) < 2^{n+3}$ है, तो $P(4)$ लिखिए।
2. यदि कथन $P(n): 1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ है, तो $P(4)$ की सत्यता की जाँच कीजिए।
3. $1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots$ का nवाँ पद लिखिए।
4. $1.4.7+2.5.8+3.6.9+\ldots$ का nवाँ पद लिखिए।

सभी $n \in N$ के लिए गणितीय आगमन सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए:

5. $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$
6. $1+4+\ldots+(3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$
7. $1.3+3.5+\ldots+(2n-1)(2n+1) = \dfrac{n\left(4n^2+6n-1\right)}{3}$
8. $1.3+2.4+\ldots+n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

9. $1.2.3+2.3.4+...+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

10. $\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+...\dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{n}{3(2n+3)}$

11. $1^3+2^3+...+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

12. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+...+\dfrac{1}{1+2+...+n}=\dfrac{2n}{n+1}$

13. $1+5+5^2+...+5^{n-1}=\dfrac{5^n-1}{4}$

14. $\left(1+\dfrac{3}{1}\right)\left(1+\dfrac{5}{4}\right)\left(1+\dfrac{7}{9}\right)...\left(1+\dfrac{2n+1}{n^2}\right)=(n+1)^2$

15. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{1}{2^n}$

16. $1.3+2.3^2+...+n3^n=\dfrac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$

17. $2^n>n$

18. $(1+x)^n\geq 1+nx,\ x>0$

19. $1+2+...+n<\dfrac{1}{8}(2n+1)^2$

20. $x^{2n}-y^{2n}$, $(x+y)$ से भाज्य है।

21. $2^{3n}-1$, 7 से भाज्य है।

22. $10^n+3.4^{n+2}+5$, 9 से भाज्य है।

23. 41^n-14^n, 27 से भाज्य है।

24. $(2n+7)<(n+3)^2$

25. $1^2+2^2+...+n^2>\dfrac{n^3}{3}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 4.1

1. $7<2^7$ 2. सत्य है 3. $1+3+...+(2n-1)$ 4. $n(n+3)(n+6)$

5

सम्मिश्र संख्याएँ
(Complex Numbers)

5.01 परिचय (Introduction)

जैन गणितज्ञ श्री महावीराचार्य ने 850 ई. यह संकेत दिया कि ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूल नहीं होते। 1637 ई. में रेने डिकार्टिज ने संख्याओं को वास्तविक एवं काल्पनिक नाम दिए। ऑयलर ने 1748 ई. में $\sqrt{-1}$ को i से व्यक्त किया। गॉऊस ने 1832 में $a+b\sqrt{-1}$ को सम्मिश्र संख्या कहा।

द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के वास्तविक हल

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ (श्री धराचार्य सूत्र)

से प्राप्त कर सकते हैं। इसमें यदि विविक्तिकर $b^2-4ac\geq 0$ हो तो हल वास्तविक प्राप्त होते हैं परन्तु विविक्तिकर $b^2-4ac<0$ की स्थिति में हम उपरोक्त समीकरण के वास्तविक हल निकालने में असमर्थ होते हैं, क्योंकि इस स्थिति में $\sqrt{b^2-4ac}$ (एक ऋणात्मक संख्या का वर्गमूल) वास्तविक संख्या नहीं है। इस प्रकार की समस्या का समाधान करने हेतु वास्तविक संख्या प्रणाली का विस्तार कर एक ऐसी संख्या प्रणाली विकसित की गई जिसमें ऋणात्मक संख्याओं के वर्ग मूल भी सम्मिलित है। ऐसी संख्याएँ सम्मिश्र संख्या कहलाती हैं।

हम जानते हैं कि समान चिह्न वाली दो वास्तविक संख्याओं का गुणनफल धनात्मक होता है, किन्तु यदि $\sqrt{-1}$ को $\sqrt{-1}$ से गुणा करें तो गुणनफल ऋणात्मक आता है। गणितज्ञों ने ऐसी सभी संख्याओं को काल्पनिक संख्याएँ (Imaginary quantities) कहा है।

परिभाषाः "उस प्रत्येक संख्या को जिसका वर्ग ऋणात्मक संख्या हो, अधिकल्पित या काल्पनिक संख्या कहते हैं।"

उदाहरणार्थ : $\sqrt{-2}, \sqrt{-13}, \sqrt{-15}$ इत्यादि काल्पनिक संख्याएँ हैं।

आयोटा $\left(i=\sqrt{-1}\right)$ एक काल्पनिक संख्या है तथा इसके निम्नलिखित गुणधर्म हैं:

(i) $i=\sqrt{-1}, i^2=-1, i^3=i^2\cdot i=-i, i^4=\left(i^2\right)\left(i^2\right)=(-1)(-1)=1$

(ii) $1/i=-i$

(iii) $i^{4m}=\left(i^4\right)^m=(1)^m=1$

अर्थात् यदि i की कोई घात 4 की गुणज हो तो उसका मान सदैव 1 होता है।

5.02 सम्मिश्र संख्याएं (Complex numbers)

यदि $a, b\in R$ तो $a+ib$ या $a-ib$ रूप वाले व्यंजक सम्मिश्र संख्याएँ कहलाती हैं। जिसे प्रायः z से व्यक्त किया जाता है यथा $z=a+ib$, जहाँ $i=\sqrt{-1}$ (मानक रूप), यहाँ a वास्तविक भाग तथा b काल्पनिक भाग कहलाता है।

क्रमित युग्म के रूप में सम्मिश्र राशि : हेमिल्टन (1805–1865) ने सम्मिश्र राशि को एक क्रमित युग्म के रूप में परिभाषित किया जिसके अनुसार सम्मिश्र राशि $z=a+ib$ को (a,b) से निरूपित किया जाता है, जहाँ $a,b\in R$.

सम्मिश्र राशि z के वास्तविक तथा काल्पनिक भाग को क्रमशः $\mathrm{Re}(z)$ और $\mathrm{Im}(z)$ से व्यक्त करते हैं।

विशेष स्थिति : यदि $\text{Im}(z)=0$ तो सम्मिश्र राशि विशुद्ध रूप से वास्तविक राशि कहलाती है तथा $\text{Re}(z)=0$ तो वह विशुद्ध रूप से काल्पनिक राशि कहलाती है।

उदाहरणार्थ $-2, 0, -2i, 1-\sqrt{2}\,i$ सभी सम्मिश्र राशियाँ हैं, इन्हें $a+ib$ तथा क्रमित युग्म के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

$$-2=-2+i\cdot 0=(-2,0),\ -2i=0-2i=(0,-2),\ 0=0+i\cdot 0=(0,0),\ 1-\sqrt{2}i=\left(1,-\sqrt{2}\right)$$

5.03 सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय (Set of complex numbers):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को C से व्यक्त करते है तथा इसे निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं:

$$C=\{a+ib : a,\, b\in R\}$$

5.04 सम्मिश्र संख्याओं पर प्रमेय (Theorems on complex numbers):

प्रमेय 5.1. यदि कोई सम्मिश्र संख्या शून्य के बराबर हो तो उसके वास्तविक व काल्पनिक दोनों भाग शून्य के बराबर होते हैं।

प्रमाण : माना $z=a+ib$ दी हुई सम्मिश्र संख्या है तथा दिया है $a+ib=0$

$\therefore \quad a=-ib$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(a)^2=(-ib)^2=(-1)^2\left(i^2\right)b^2=-b^2$$

या $\quad a^2+b^2=0$

किन्तु a और b दोनों वास्तविक संख्याएँ हैं; इसलिए इनके वर्गो का योगफल तब तक शून्य नहीं हो सकता, जब तक यह दोनों अलग–अलग शून्य के बराबर नहीं हो, अर्थात्

$a=0$ और $b=0$

प्रमेय 5.2 यदि दो सम्मिश्र संख्याऐं बराबर हों तो उनके वास्तविक और काल्पनिक भाग अलग–अलग बराबर होते हैं।

प्रमाण : माना $z_1=a+ib$ और $z_2=c+id$ बराबर हैं।

अब $\quad z_1=z_2$

$\Rightarrow \quad a+ib=c+id$

$\Rightarrow \quad (a-c)+i(b-d)=0$

प्रमेय 4.1 से $a-c=0$ और $b-d=0$

$\Rightarrow \quad a=c$ और $b=d$

अतः दो सम्मिश्र संख्याएँ बराबर तभी होती है जब उनके वास्तविक भाग एवं काल्पनिक भाग अलग–अलग बराबर हों।

उपप्रमेयः यदि $a+ib=c+id$ तो $a-ib=c-id$

5.05 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में योग संक्रिया (Addition operation in the set of complex numbers C):

यदि $z_1=a+ib$ तथा $z_2=c+id,\ a,b,c,d\in R$ (वास्तविक संख्याओं का समुच्चय) कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हों तो उनके योग को z_1+z_2 द्वारा व्यक्त करते हैं और इसे निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (a+ib)+(c+id) \\ &= (a+c)+i(b+d) \end{aligned}$$

उदाहरणार्थ : यदि $z_1=2+5i,\ z_2=3+7i$ तो

$$z_1+z_2=(2+5i)+(3+7i)=5+12i$$

5.06 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में योग संक्रिया के गुणधर्म (Properties of addition on the set of complex numbers C) :

1. संवृतता गुणधर्म (Closure property):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में योग संक्रिया संवृतता गुणधर्म का पालन करती है।

अर्थात् $\forall \; z_1, z_2 \in C \Rightarrow z_1 + z_2 \in C$

प्रमाणः यदि $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं तो

$$z_1 + z_2 = (a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

हम जानते हैं कि दो वास्तविक संख्याओं का योगफल एक वास्तविक संख्या होती है, इसलिए

$$a \in R,\; c \in R \Rightarrow a + c \in R \text{ तथा } b \in R,\; d \in R \Rightarrow b + d \in R$$

$\therefore \quad z_1 + z_2 \in C$

अर्थात् सम्मिश्र संख्याएँ योग संक्रिया के लिए संवृतता गुणधर्म का पालन करती है।

2. साहचर्य गुणधर्म (Associative property):

सम्मिश्र संख्याओं का योग साहचर्य गुणधर्म का पालन करता है।

अर्थात् $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad \forall \; z_1, z_2, z_3 \in C$

प्रमाणः माना $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2, \quad z_3 = a_3 + ib_3$

तब $\quad z_1 + (z_2 + z_3) = (a_1 + ib_1) + [(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)]$

$$= (a_1 + ib_1) + [(a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)]$$

$$= [a_1 + (a_2 + a_3) + i\{b_1 + (b_2 + b_3)\}]$$

$$= [(a_1 + a_2) + a_3 + i\{(b_1 + b_2) + b_3\}]$$ [$\because$ वास्तविक संख्याओं का योग साहचर्य गुणधर्म का पालन करता है]

$$= [a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)] + (a_3 + ib_3)$$

$$= [(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)] + (a_3 + ib_3)$$

$$= (z_1 + z_2) + z_3$$

3. योज्य तत्समक (Additive identity):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में $0 = 0 + i0$ योग के लिए तत्समक अवयव होता है।

प्रमाणः यदि $z = a + ib$ तब $\because 0 + i\,0 = 0$

$\therefore$ योग संक्रिया से

$$z + 0 = (a+ib)+(0+i0) = (a+0)+i(b+0) = a+ib = z$$

$$0 + z = (0+i0)+(a+ib) = (0+a)+i(0+b) = a+ib = z$$

$\therefore \quad z + 0 = z = 0 + z$

4. योज्य प्रतिलोम (Additive inverse):

प्रत्येक $z \in C$ के लिए $-z \in C$ योज्य प्रतिलोम अवयव है।

प्रमाणः यदि $z = a + ib$ तब $-z = -a - ib$

$\therefore$ योग संक्रिया से

$$z + (-z) = (a+ib)+(-a-ib) = (a-a)+i(b-b) = 0+i0 = 0$$

$$(-z) + z = (-a-ib)+(a+ib) = (-a+a)+i(-b+b) = 0+i0 = 0$$

$\therefore \quad z + (-z) = 0 = (-z) + z$

5. क्रमविनिमेय गुणधर्म (Commutative property):

सम्मिश्र संख्याओं का योग क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन करता है।

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ \forall \ z_1, z_2 \in C$$

प्रमाणः माना $z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id$

तब $z_1 + z_2 = (a+ib)+(c+id)$

$= (a+c)+i(b+d)$

$= (c+a)+i(d+b)$ [वास्तविक संख्या में क्रमविनिमेय गुणधर्म से]

$= (c+id)+(a+ib)$

$= z_2 + z_1$

$\therefore \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

6. निरसन नियम (Cancellation law):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में योग संक्रिया निरसन नियम का पालन करती है।

$z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \ \Rightarrow \ z_1 = z_2, \ \forall z_1 z_2, z_3 \in C$ [दक्षिण निरसन नियम]

$z_3 + z_1 = z_3 + z_2 \ \Rightarrow \ z_1 = z_2, \ \forall \ z_1, z_2, z_3 \in C$ [वाम निरसन नियम]

प्रमाणः माना $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2, \quad z_3 = a_3 + ib_3$

तब $z_1 + z_3 = (a_1 + ib_1)+(a_3 + ib_3) = (a_1 + a_3) + i(b_1 + b_3)$

$z_2 + z_3 = (a_2 + ib_2)+(a_3 + ib_3) = (a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)$

$\therefore \quad z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \quad \Rightarrow \quad (a_1 + a_3) + i(b_1 + b_3) = (a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)$

$\Rightarrow \quad a_1 + a_3 = a_2 + a_3, \ b_1 + b_3 = b_2 + b_3$ [वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना से]

$\Rightarrow \quad a_1 = a_2, \ b_1 = b_2$ [$\therefore$ वास्तविक संख्याओं का योग निरसन नियम का पालन करता है]

$\Rightarrow \quad a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$

$\Rightarrow \quad z_1 = z_2$

इसी प्रकार हम $z_3 + z_1 = z_3 + z_2 \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2$ सिद्ध कर सकते हैं।

5.07 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में व्यवकलन संक्रिया (Subtraction operation in the set of complex numbers C):

यदि $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हों तो उनके व्यवकलन को $z_1 - z_2$ से व्यक्त करते है तथा व्यवकलन निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है

$$z_1 - z_2 = (a+ib)-(c+id)$$
$$= (a-c)+i(b-d)$$

अर्थात् दो सम्मिश्र राशियों का व्यवकलन सम्मिश्र राशि होती है जिसका वास्तविक भाग दोनों सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक भागों के अन्तर के बराबर तथा काल्पनिक भाग दोनों संख्याओं के काल्पनिक भागों के अन्तर के बराबर होते हैं।

उदाहरणार्थः यदि $z_1 = 4 + 3i$

तथा $z_2 = 2 + i$

तथा $z_1 - z_2 = (4-2)+(3-1)i = 2 + 2i$

5.08 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में गुणन संक्रिया
(Multiplication operation in the set of complex numbers C):

यदि $z_1 = a+ib$ तथा $z_2 = c+id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हों तो उनके गुणन को $z_1 \cdot z_2$ से व्यक्त करते हैं तथा गुणन निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+ib)\cdot(c+id) \\ &= ac + ibc + iad + i^2bd \\ &= ac + i(bc+ad) - bd \qquad (\therefore\ i^2 = -1) \\ &= (ac-bd) + i(bc+ad) \end{aligned}$$

अर्थात् दो सम्मिश्र राशियों का गुणनफल भी सम्मिश्र राशि होती है।

उदाहरणार्थः यदि $z_1 = 2+3i$ तथा $z_2 = 2+4i$

तब $z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(2+4i)$

$$= 4+6i+8i+12i^2 = 4+14i-12 \quad = -8+14i \qquad [i^2 = -1]$$

टिप्पणीः संयुग्मी सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल एक वास्तविक संख्या होती है।

5.09 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में गुणन संक्रिया के गुणधर्म
(Properties of multiplication on the set of complex numbers C):

1. संवृतता गुणधर्म (Closure property):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में गुणन संक्रिया संवृवता गुण धर्म का पालन करती है।

अर्थात् $\forall\ z_1, z_2 \in C \Rightarrow z_1 z_2 \in C$

प्रमाणः यदि $z_1 = a+ib$ और $z_2 = c+id$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं जहाँ $a, b, c, d \in R$

तब
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a+ib)\cdot(c+id) \\ &= ac + ibc + iad + i^2bd \qquad (\because\ i^2 = -1) \\ &= (ac-bd) + i(bc+ad) \end{aligned}$$

$\because \quad a, b, c, d \in R \qquad \therefore \qquad (ac-bd) \in R$ तथा $(bc+ad) \in R$

अतः $z_1 z_2 \in C$

2. साहचर्य गुणधर्म (Associative property):

सम्मिश्र संख्याओं का गुणन साहचर्य गुणधर्म का पालन करता हैं।

अर्थात् $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \quad \forall\ z_1, z_2, z_3 \in C$

प्रमाणः माना $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, तथा $z_3 = a_3 + ib_3$.

तब
$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (a_1 + ib_1)\cdot[(a_2+ib_2)\cdot(a_3+ib_3)] \\ &= (a_1+ib_1)\cdot[\{(a_2a_3 - b_2b_3) + i(a_2b_3 + b_2a_3)\}] \\ &= [\{a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3)\} + i\{b_1(a_2a_3 - b_2b_3) + a_1(a_2b_3 + b_2a_3)\}] \\ &= [(a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 - b_1b_2a_3) + i(b_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 + a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3)] \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 &= [(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)]\cdot(a_3+ib_3) \\ &= [\{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2)\}]\cdot(a_3+ib_3) \end{aligned}$$

$$=\left[\left\{\left(a_1a_2-b_1b_2\right)a_3-\left(b_1a_2+a_1b_2\right)b_3\right\}+i\left\{a_3\left(b_1a_2+a_1b_2\right)+b_3\left(a_1a_2-b_1b_2\right)\right\}\right]$$

$$=\left[\left(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-b_1a_2b_3-a_1b_2b_3\right)+i\left(a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+b_1a_2a_3+a_1b_2a_3\right)\right] \qquad (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) से

$$z_1\cdot\left(z_2\cdot z_3\right)=\left(z_1\cdot z_2\right)\cdot z_3$$

3. गुणन तत्समक (Multiplicative identity):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में $1+i\,0=(1,0)$ गुणन के लिए तत्समक अवयव होता है।

प्रमाणः माना $z=a+ib$ तब $1=1+i0$

$$z\cdot 1=(a+ib)\cdot(1+i0)=\{(a-0)+i(b+0)=a+ib=z\}$$

$$1\cdot z=(1+i0)\cdot(a+ib)=\{(a-0)+i(b+0)=a+ib=z\}$$

$\therefore \quad z\cdot 1=z=1\cdot z$

4. गुणन प्रतिलोम (Multiplicative inverse):

प्रत्येक अशून्य सम्मिश्र संख्या $z=a+ib$ का गुणन प्रतिलोम समुच्चय C में विद्यमान होता है।

प्रमाणः माना $z=a+ib\neq 0$ एक सम्मिश्र संख्या है, जिसमें a और b में से कोई एक शून्य नहीं है और $a,b\in R$

माना कि $x+iy$, $a+ib$ का गुणन प्रतिलोम हैं।

तब $\quad (a+ib)\cdot(x+iy)=1+i\cdot 0$

$\Rightarrow \quad (ax-by)+i(bx+ay)=1+i\cdot 0$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$\Rightarrow \quad ax-by=1$ तथा $bx+ay=0$

$\Rightarrow \quad x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$ तथा $y=\dfrac{-b}{a^2+b^2};\ a^2+b^2\neq 0$

क्योंकि $a,b\in R \Rightarrow \dfrac{a}{a^2+b^2}=x\in R$ तथा $\dfrac{-b}{a^2+b^2}=y\in R$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a}{a^2+b^2}+i\left(\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)\in C \quad \Rightarrow \quad x+iy\in C$

अतः अशून्य सम्मिश्र संख्या $z=a+ib$ का गुणन प्रतिलोम $\dfrac{a}{a^2+b^2}+i\left(\dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$ का अस्तित्व है तथा समुच्चय C में है। z का गुणन प्रतिलोम प्रायः z^{-1} या $1/z$ से निरूपित किया जाता है।

अतः $\quad z=a+ib \Rightarrow z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{a}{a^2+b^2}+i\dfrac{-b}{a^2+b^2}.$

5. क्रम विनिमेय गुणधर्म (Commutative property):

सम्मिश्र संख्याओं का गुणन क्रम विनिमेय गुणधर्म का पालन करता है।

अर्थात् $\forall\ z_1,z_2\in C$ तब $z_1z_2=z_2z_1$

प्रमाणः माना $z_1=a+ib$ तथा $z_2=c+id$

अतः $\quad z_1\cdot z_2=(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$

$$=(ca-db)+i(cb+da)=(c+id)\cdot(a+ib)=z_2\cdot z_1$$

6. निरसन नियम (Cancellation law):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में गुणन संक्रिया निरसन नियम का पालन करती है।

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में यदि $z_3 \neq 0$ हो, तथा $z_1, z_2, z_3 \in C$ तब

$z_1 z_3 = z_2 z_3 \Rightarrow z_1 = z_2$ [दक्षिण निरसन नियम]

$z_3 z_1 = z_3 z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$ [वाम निरसन नियम]

प्रमाणः माना $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2, \quad z_3 = a_3 + ib_3$

$\therefore \quad z_1 \cdot z_3 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_3 + ib_3) = (a_1 a_3 - b_1 b_3) + i(a_1 b_3 + a_3 b_1)$

तथा $\quad z_2 \cdot z_3 = (a_2 + ib_2) \cdot (a_3 + ib_3) = (a_2 a_3 - b_2 b_3) + i(a_2 b_3 + a_3 b_2)$

$\therefore \quad z_1 z_3 = z_2 z_3 \Rightarrow (a_1 a_3 - b_1 b_3) + i(a_1 b_3 + b_1 a_3) = (a_2 a_3 - b_2 b_3) + i(a_2 b_3 + b_2 a_3)$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$a_1 a_3 - b_1 b_3 = a_2 a_3 - b_2 b_3$ तथा $a_1 b_3 + a_3 b_1 = a_2 b_3 + b_2 a_3$

$(a_1 - a_2) a_3 - (b_1 - b_2) b_3 = 0$ तथा $(a_1 - a_2) b_3 + a_3 (b_1 - b_2) = 0$

$\Rightarrow \quad a_1 = a_2, \; b_1 = b_2 \qquad (\because \; z_3 \neq 0)$

$\Rightarrow \quad z_1 = z_2$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

$$z_3 z_1 = z_3 z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$$

7. बंटन गुणधर्म (Distributive law):

सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में गुणन संक्रिया योग संक्रिया पर बंटनता गुणधर्म का पालन करती हैं।

अर्थात् $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ तथा $(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1 \quad \forall \; z_1, z_2, z_3 \in C$

प्रमाणः माना $z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2, \quad z_3 = a_3 + ib_3$ हो तब

$$z_1(z_2 + z_3) = (a_1 + ib_1)[(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)]$$

$$= (a_1 + ib_1)[(a_2 + a_3) + i(b_2 + b_3)]$$

$$= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3) + i(a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3) \qquad (1)$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) + (a_1 + ib_1)(a_3 + ib_3)$$

$$= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2 + b_1 a_3 + b_3 a_1) \qquad (2)$$

(1) से (2) से $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

5.10 सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में भाग संक्रिया (Division operation in the set of complex numbers C):

माना $z_1 = a + ib$ और $z_2 = c + id \; (z_2 \neq 0)$, जहाँ $a, b, c, d \in R$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हों तो उनका भाग $z_1 \div z_2$ से व्यक्त करते हैं और

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)}{(c + id)} \times \frac{(c - id)}{(c - id)}$$

$$= \frac{ac + ibc - iad - i^2 bd}{c^2 - i^2 d^2}$$

$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \qquad (\because\ i^2=-1)$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \qquad (c^2+d^2 \neq 0 \quad \because\ z_2 \neq 0)$$

अतः सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में भाग संक्रिया के पश्चात प्राप्त राशि एक सम्मिश्र संख्या होती है।

उदाहरणार्थ : यदि $z_1 = 3+4i$ तथा $z_2 = 1+3i$ हो तो

$$z_1 \div z_2 = \frac{3+4i}{1+3i}$$

$$= \frac{3+4i}{1+3i} \times \frac{1-3i}{1-3i} = \frac{3+4i-9i-12i^2}{(1)^2-9i^2}$$

$$= \frac{3-5i+12}{1+9} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

5.11 [illegible] (Conjugate complex numbers):

दो सम्मिश्र संख्याएँ संयुग्मी कहलाती है यदि उनके वास्तविक भाग समान हों तथा काल्पनिक भाग समान किन्तु विपरीत चिह्न के हों।

अतः यदि $z = a+ib$ हो तो z की संयुग्मी सम्मिश्र संख्या $\bar{z}$ से व्यक्त की जाती है और $\bar{z} = a-ib$ होता है।

उदाहरणार्थ :

(i) यदि $z = (3, -5) = 3-5i \Rightarrow \bar{z} = (3, 5) = (3+5i)$

(ii) यदि $z = (-2, \sqrt{11}) = -2+\sqrt{11}\,i \Rightarrow \bar{z} = (-2, -\sqrt{11}) = -2-\sqrt{11}\,i$

5.12 संयुग्मी सम्मिश्र संख्याओं के कुछ गुणधर्म
(Some properties of conjugate complex numbers):

यदि $z, z_1, z_2 \in C$, **तो**

(i) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ **(ii)** $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ **(iii)** $\overline{(\bar{z})} = z$

(iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ **(v)** $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ **(vi)** $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(vii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2 \neq 0$ **(viii)** $z\bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$

प्रमाणः माना $z = a+ib;\ a, b \in R$, तो

(i) $z + \bar{z} = (a+ib)+(a-ib) = 2a = 2\mathbf{Re}(z)$

(ii) $z - \bar{z} = (a+ib)-(a-ib) = 2ib = 2i\mathbf{Im}(z)$

(iii) $\overline{(\bar{z})} = \overline{(a-ib)} = a-(-ib) = a+ib = z$

(iv) माना $z_1 = a+ib$ तथा $z_2 = c+id$ तब

$$z_1 + z_2 = (a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{z_1+z_2} = (a+c)-i(b+d) = (a-ib)+(c-id) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

(v)
$$z_1 - z_2 = (a+ib)-(c+id) = (a-c)+i(b-d)$$

$$\Rightarrow \quad \overline{z_1-z_2} = (a-c)-i(b-d) = (a-ib)-(c-id) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

(vi) $z_1 \cdot z_2 = (a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i(bc+ad)$

$\Rightarrow \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = (ac-bd)-i(bc+ad)$ (1)

तथा $\quad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a-ib)(c-id) = (ac-bd)-i(bc+ad)$ (2)

समीकरण (1) व (2) से $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(vii) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)}{(c+id)} \times \dfrac{(c-id)}{(c-id)} = \left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$

$\Rightarrow \quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) - i\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$ (1)

तथा $\quad \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \dfrac{a-ib}{c-id} = \left(\dfrac{a-ib}{c-id}\right) \times \left(\dfrac{c+id}{c+id}\right)$

$= \left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) - i\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$ (2)

समीकरण (1) व (2) से $\quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

(viii) $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2+b^2 = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$

5.13 सम्मिश्र संख्या का मापांक (Modulus of a complex number):

यदि $z = a+ib$ कोई सम्मिश्र संख्या है तो z का मापांक, $|z|$ से निरूपित किया जाता है तथा यह धनात्मक वास्तविक संख्या $\sqrt{a^2+b^2}$ के बराबर होता है, अर्थात्

$z = a+ib$

$\Rightarrow \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left[\{\text{Re}(z)\}^2 + \{\text{Im}(z)\}^2\right]}$

स्पष्टतः $|z| \geq 0, \quad \forall \; z \in C$

(i) $z_1 = 2+3i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ (ii) $z_2 = -2i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{0+4} = 2$

टिप्पणीः सम्मिश्र संख्याओं में $z_1 > z_2$ या $z_1 < z_2$ अर्थहीन है क्योंकि सम्मिश्र संख्याओं में क्रम सम्बन्ध परिभाषित नहीं है परन्तु $|z|$ एक **धनात्मक संख्या** है अतः $|z_1| > |z_2|$ या $|z_1| < |z_2|$ अपनी सार्थकता रखते हैं।

5.14 सम्मिश्र संख्याओं के मापांक सम्बन्धि गुणधर्म (Properties related to moduli of complex numbers):

यदि $z, z_1, z_2 \in C$ **तो**

(i) $|z| \geq |\mathbf{Re}(z)| \geq \mathbf{Re}(z)$; $|z| \geq |\mathbf{Im}(z)| \geq \mathbf{Im}(z)$ **(ii)** $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

(iii) $z\bar{z} = |z|^2$ **(iv)** $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ **(v)** $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \; |z_2| \neq 0$

प्रमाणः (i) माना $z = a+ib$ तब $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, जहाँ $\mathbf{Re}(z) = a, \mathbf{Im}(z) = b$

$\therefore \quad |z| \geq \mathbf{Re}(z)$ और $|z| \geq \mathbf{Im}(z)$

(ii) माना $\quad z = a+ib$ तब $\bar{z} = a-ib$ तथा $-z = -a-ib$

$\therefore \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|\bar{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$ तथा $|-z| = \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow |z| = |\bar{z}| = |-z|$

(iii) माना $z = a + ib$ तब $\bar{z} = a - ib$

$\therefore$ $$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

तथा $$|z|^2 = |a+ib|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 \quad (2)$$

समीकरण (1) व (2) से $z\bar{z} = |z|^2$

टिप्पणी : यदि $z \neq 0$, तो $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ सूत्र का प्रयोग सम्मिश्र संख्या का गुणन प्रतिलोम ज्ञात करने में किया जाता है।

(iv) माना $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$

तब $z_1z_2 = (a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

$$\therefore \quad |z_1z_2| = \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2}$$
$$= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$$
$$= \sqrt{(a^2+b^2)}\sqrt{(c^2+d^2)} = |z_1||z_2|$$

(v) माना $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id \neq 0$ तब

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)}{(c+id)} \times \frac{(c-id)}{(c-id)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

$$\therefore \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

त्रिभुजीय असमिकाएँ (Triangular inequalities)

यदि $z_1, z_2 \in C$ तो

(i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (ii) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

प्रमाणः (i)
$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} \qquad [\because |z|^2 = z\bar{z}]$$
$$= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \qquad [\because \overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2]$$
$$= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$$
$$= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_2|^2$$
$$= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{(z_1\bar{z}_2)} + |z_2|^2 \qquad [\because \overline{(\bar{z})} = z]$$
$$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \qquad [\because z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)]$$
$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 \qquad [\because 2\,\mathrm{Re}(z) \leq |z|]$$
$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2 \qquad [\because |z_1z_2| = |z_1||z_2|]$$
$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \qquad [\because |\bar{z}| = |z|]$$
$$\leq [|z_1| + |z_2|]^2$$

$$\therefore \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(ii) $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$ $\left[\because |z|^2 = z\bar{z}\right]$

$= (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$ $\left[\because \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2\right]$

$= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2$

$= |z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1) + |z_2|^2$

$= |z_1|^2 - \left[z_1\bar{z}_2 + \overline{(z_1\bar{z}_2)}\right] + |z_2|^2$ $\left[\overline{(\bar{z})} = z\right]$

$= |z_1|^2 - [2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)] + |z_2|^2$ $[\because z + \bar{z} = \operatorname{Re}(z)]$

$\geq |z_1|^2 - 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2$ $[\because 2\operatorname{Re}(z) \leq |z|]$

$\geq |z_1|^2 - 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2$

$\geq |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$ $[|\bar{z}| = |z|]$

$\geq [|z_1| - |z_2|]^2$ (i)

$\therefore$ $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

इसी प्रकार $|z_2 - z_1| \geq |z_2| - |z_1|$

परन्तु $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$

अतः (i) व (ii) से

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{1}{i}$ (ii) i^{17} (iii) $1 - i^{200}$

हल : (i) $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$ (ii) $i^{17} = (i^2)^8 i = (-1)^8 i = i$

(iii) $1 - i^{200} = 1 - (i^2)^{100} 1 - (-1)^{100} = 1 - 1 = 0$

उदाहरण 2: निम्न सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक एवं काल्पनिक भाग लिखिए:

(i) $20i$ (iii) $-1 - 5\sqrt{-1}$ (iii) $\left(1 + \sqrt{-25}\right) - \left(-2 + \sqrt{-9}\right) + \left(3 - \sqrt{-4}\right)$

हल : (i) $\because 20i = 0 + 20i$

अतः वास्तविक भाग $= 0$ तथा काल्पनिक भाग $= 20$

(ii) $\because -1 - 5\sqrt{-1} = -1 - 5i$

अतः वास्तविक भाग $= -1$ तथा काल्पनिक भाग $= -5$

(iii) $\because \left(1 + \sqrt{-25}\right) - \left(-2 + \sqrt{-9}\right) + \left(3 - \sqrt{-4}\right)$

$= (1 + 5i) - (-2 + 3i) + (3 - 2i)$

$= 6 + 0i$

अतः वास्तविक भाग $= 6$ तथा काल्पनिक भाग $= 0$

उदाहरण 3: सम्मिश्र संख्या $(2-3i)$ का योज्य एवं गुणन प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल : माना $(2-3i)$ का योज्य प्रतिलोम $(a+ib)$ है।

$\Rightarrow \quad (2-3i)+(a+ib)=0+i0$

$\Rightarrow \quad (2+a)+(-3+b)i=0+i0$

$\Rightarrow \quad 2+a=0$ एवं $-3+b=0$

$\Rightarrow \quad a=-2$ एवं $b=3$

अतः $(2-3i)$ का योज्य प्रतिलोम $(-2+3i)$ है।

$(2-3i)$ का गुणन प्रतिलोम $=\dfrac{1}{2-3i}$

$$=\frac{1}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

उदाहरण 4: निम्न सम्मिश्र संख्याओं को $A+iB$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\dfrac{2+\sqrt{-16}}{1-\sqrt{-25}}$ (ii) $1+i^7-15i^{16}+4i^{23}$

हल : (i) $\dfrac{2+\sqrt{-16}}{1-\sqrt{-25}}=\dfrac{2+\sqrt{16}\sqrt{-1}}{1-\sqrt{25}\sqrt{-1}}=\dfrac{2+4i}{1-5i}=\dfrac{2+4i}{1-5i}\times\dfrac{1+5i}{1+5i}$

$$=\frac{2+10i+4i+20i^2}{1-25i^2}=\frac{2+14i+20(-1)}{1-25(-1)}$$

$$=\frac{-18+14i}{1+25}=\frac{-18}{26}+\frac{14}{26}i=\frac{-9}{13}+\frac{7}{13}i.$$

(ii) $1+i^7-15i^{16}+4i^{23}=1+\left(i^2\right)^3 i-15\left(i^2\right)^8+4\left(i^2\right)^{11} i$

$=1+(-1)^3 i-15(-1)^8+4(-1)^{11} i \qquad [\because i^2=-1]$

$=1-i-15-4i$

$=-14-5i$.

उदाहरण 5: x तथा y का मान ज्ञात कीजिए, यदि

$$(x+iy)(2+3i)=1+8i$$

हल : $\because \quad (x+iy)(2+3i)=1+8i$

$\Rightarrow \quad 2x+3xi+2yi+3yi^2=1+8i$

$\Rightarrow \quad (2x-3y)+(3x+2y)i=1+8i \qquad [\because i^2=-1]$

$\Rightarrow \quad 2x-3y=1$ एवं $3x+2y=8$

सरल करने पर $x=2$ तथा $y=1$.

उदाहरण 6: यदि $z_1 = 2+3i$ तथा $z_2 = 1-i$ तो निम्न का सत्यापन कीजिए

(i) $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$.

(ii) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

हल : $z_1 = 2+3i$ एवं $z_2 = 1-i$

अतः $z_1 + z_2 = (2+1) + i(3-1) = 3+2i$

तथा $z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(1-i) = 2-2i+3i-3i^2 = 5+i$

अब $|z_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$; $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $|z_1 z_2| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$;

एवं $|z_1 + z_2| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

अतः (i) $|z_1|\cdot|z_2| = \sqrt{13}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{26} = |z_1 z_2|$

(ii) $|z_1| + |z_2| = \sqrt{13} + \sqrt{2} > \sqrt{13} = |z_1 + z_2|$

उदाहरण 7: यदि $|z| = 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{z-1}{z+1}$, $z \ne -1$ एक शुद्ध काल्पनिक संख्या है।

हलः माना $z = x+iy$ तब प्रश्नानुसार $|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} \times \frac{x+1-iy}{x+1-iy}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1) - iy(x-1) + iy(x+1) - i^2 y^2}{(x+1)^2 - i^2 y^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1 - iy(x-1-x-1) - (-1)y^2}{(x+1)^2 - (-1)y^2}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - 1 + 2yi}{x^2 + 1 + 2x + y^2} = \frac{2yi}{2(1+x)} \qquad [\because x^2 + y^2 = 1]$$

$$= \frac{y}{x+1} i \qquad \text{(विशुद्ध काल्पनिक संख्या)}$$

प्रश्नमाला 5.1

1. निम्नलिखित को सरलतम रूप में लिखिए।

   (i) i^{52} (ii) $\sqrt{-2}\sqrt{-3}$ (iii) $(1+i)^5(1-i)^5$

2. निम्नलिखित संख्याओं के योज्य एवं गुणन प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

   (i) $1+2i$ (ii) $1/(3+4i)$ (iii) $(3+i)^2$

3. सम्मिश्र संख्या $\frac{(2+i)^3}{3+i}$ की संयुग्मी संख्या ज्ञात कीजिए।

4. निम्नलिखित के मापांक ज्ञात कीजिए।

(i) $4+i$ (ii) $-2-3i$ (iii) $1/(3-2i)$

5. यदि $a^2+b^2=1$ तो $\dfrac{1+b+ia}{1+b-ia}$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $a=\cos\theta+i\sin\theta$ तब $(1+a)/(1-a)$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. समीकरण $\dfrac{(1+i)x-2i}{3+i}+\dfrac{(2-3i)y+i}{3-i}=i$ को सन्तुष्ट करने वाले x, y के मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि z_1 तथा z_2 कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

9. यदि $a+ib=\dfrac{c+i}{c-i}$, जहाँ c एक वास्तविक संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$a^2+b^2=1 \text{ और } \frac{b}{a}=\frac{2c}{c^2-1}$$

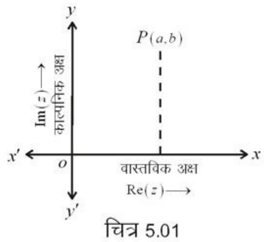
10. यदि $(x+iy)^{1/3}=a+ib$ है तो सिद्व कीजिए कि $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=4(a^2-b^2)$

11. यदि $\dfrac{(x+i)^2}{3x+2}=a+ib$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{(x^2+1)^2}{(3x+2)^2}=a^2+b^2$

5.15 सम्मिश्र संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण (Geometrical reprsentation of complex numbers)

(A) कार्तीय निरूपण (Cartesian representation)

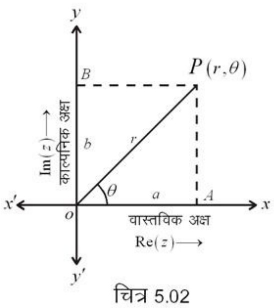
किसी समतल पर दो समकोणीय अक्षों XOX' तथा YOY' के सापेक्ष किसी सम्मिश्र संख्या $z=a+ib$ को एक अद्वितीय बिन्दु P जिसके निर्देशांक (a, b) हैं से निरूपित किया जाता है। XOX' तथा YOY' को क्रमशः वास्तविक एवं काल्पनिक अक्ष कहते हैं। सभी वास्तविक संख्याओं के संगत बिन्दु XOX' पर तथा सभी विशुद्ध काल्पनिक संख्याओं के संगत बिन्दु YOY' पर प्राप्त होते हैं। एक सम्मिश्र संख्या z को बिन्दु रूप में जिस समतल में निरूपित किया जाता है उस समतल में स्थित प्रत्येक बिन्दु के संगत एक अद्वितीय सम्मिश्र संख्या निरूपित होती है। इस समतल को सम्मिश्र समतल या आर्गेण्ड समतल (Argand plane) कहते हैं।



चित्र 5.01

(B) ध्रुवीय निरूपण (Polar representation)

माना P(a, b) सम्मिश्र संख्या $z=a+ib\neq 0$ को निरूपित करता है। जहाँ माना $OP=r$ तथा OP, x – अक्ष की धनात्मक दिशा से θ कोण बनाता है। तब P को वास्तविक संख्याओं के एक अद्वितीय क्रमित युग्म (r, θ) से निरूपित किया जा सकता है जो कि बिन्दु P के ध्रुवीय निर्देशांक कहलाते हैं। ध्रुवीय निर्देशांक में मूल बिन्दु O को ध्रुव तथा अर्ध अक्ष OX को प्रारम्भिक रेखा कहते हैं।



चित्र 5.02

यहाँ $a/r=\cos\theta$ एवं $b/r=\sin\theta$

$\Rightarrow$ $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$ एवं $\tan\theta=b/a$

यह सम्मिश्र संख्या z का ध्रुवीय रूप कहलाता है। यहाँ $r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$, तथा $\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ क्रमशः सम्मिश्र संख्या के मापांक एवं कोणांक कहलाते हैं।

टिप्पणीः

(i) किसी सम्मिश्र संख्या का कोणांक अद्वितीय नहीं होता है। यदि सम्मिश्र संख्या $z\neq 0$ का कोणांक θ है तो $\theta+2n\pi$, जहाँ $n\in I$ भी उसके कोणांक हैं। किसी सम्मिश्र संख्या $z\neq 0$ के लिए अन्तराल $0\leq\theta<2\pi$ में θ का केवल एक मान प्राप्त होता है। परन्तु हम कोणांक को निर्धारित करने हेतु 2π अन्तराल अर्थात् $-\pi<\theta\leq\pi$ काम में लेते हैं। सम्मिश्र संख्या $z\neq 0$ के कोणांक θ का वह मान जो कि अन्तराल $-\pi<\theta\leq\pi$ में स्थित है मुख्य कोणांक कहलाता है।

(ii) सूत्र $\theta=\tan^{-1}(b/a)$, कोणांक 'θ' ज्ञात करने के लिए अपूर्ण सूत्र है।

उदाहरणार्थः सम्मिश्र संख्या $z_1=\sqrt{3}+i$ तथा $z_2=-\sqrt{3}-i$ सम्मिश्र संख्या आर्गेन्ड समतल में दो अलग–अलग बिन्दुओं को प्रकट करते हैं जब कि उपर्युक्त सूत्र से उनका कोणांक $\pi/6$ प्राप्त होता है।

(iii) सम्मिश्र संख्या z का कोणांक उस चतुर्थांश (Quadrant) पर निर्भर करता है जिसमें z स्थित है अतः

(a) यदि $a>0, b>0$ (प्रथम चतुर्थांश) तब कोणांक $z=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

(b) यदि $a<0, b>0$ (द्वितीय चतुर्थांश) तब कोणांक $z=\pi-\tan^{-1}|b/a|$

(c) यदि $a<0, b<0$ (तृतीय चतुर्थांश) तब कोणांक $z=-\pi+\tan^{-1}|b/a|$

(d) यदि $a>0, b<0$ (चतुर्थ चतुर्थांश) तब कोणांक $z=-\tan^{-1}|b/a|$

(iv) सम्मिश्र संख्या 0 का कोणांक अपरिभाषित है।

(v) सम्मिश्र संख्या के ध्रुवीय रूप $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ की कुछ विशेष स्थितियाँ

(a) $1=\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ$ (b) $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

(c) $i=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ (d) $-i=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

उदाहरणार्थः सम्मिश्र संख्या $\dfrac{1+2i}{1-3i}$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए एवं इसके कोणांक और मापांक ज्ञात कीजिए।

हलः माना $z=\dfrac{1+2i}{1-3i}=\dfrac{(1+2i)}{(1-3i)}\times\dfrac{(1+3i)}{(1+3i)}=\dfrac{-5+5i}{10}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$

माना $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ (ध्रुवीय रूप)

तब $r\cos\theta=-1/2$ (1)

$r\sin\theta=1/2$ (2)

(1) व (2) को वर्ग कर जोड़ने पर

$r^2=1/2 \quad\Rightarrow\quad r=1/\sqrt{2}$

(2) में (1) का भाग देने पर

$\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\dfrac{(1/2)}{(-1/2)} \quad\Rightarrow\quad \tan\theta=-1$

$\because$ $(-1/2, 1/2)$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है अतः कोणांक $z=\pi-\tan^{-1}|b/a|$ से

कोणांक $z=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$

$\therefore \quad \frac{1+2i}{1-3i}$ का ध्रुवीय रूप $= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

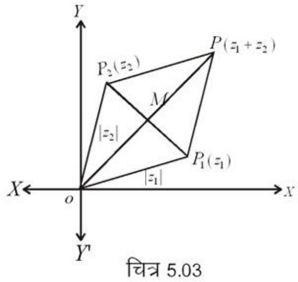
मापांक $z = r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा कोणांक $z = \frac{3\pi}{4}$

5.16 सम्मिश्र संख्याओं के योग का ज्यामितीय निरूपण
(Geometrical representation of sum of two complex numbers):

माना कि आर्गेण्ड चित्र में बिन्दु P_1 व P_2 क्रमशः दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1 = a_1 + ib_1$ तथा $z_2 = a_2 + ib_2$ को निरूपित करते हैं। OP_1 तथा OP_2 को आसन्न भुजाएँ मानते हुए हम समान्तर चतुर्भुज OP_1PP_2 का निर्माण करते हैं। स्पष्टतः P_1 तथा P_2 के निर्देशांक क्रमशः (a_1, b_1) तथा (a_2, b_2) होंगे। हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

अतः M को P_1P_2 का मध्य बिन्दु लेने पर M के निर्देशांक $\left(\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}\right)$ होंगे।

अब M, OP का भी मध्य बिन्दु है तथा O के निर्देशांक (0, 0) है। अतः P के निर्देशांक (a_1+a_2, b_1+b_2) होंगे। अतः बिन्दु P सम्मिश्र संख्या z_1+z_2 को निरूपित करेगा।



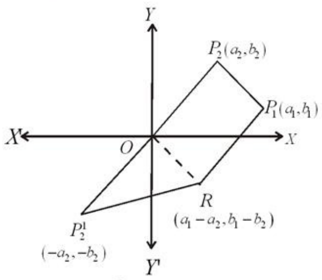
चित्र 5.03

टिप्पणी: $\because \quad OP \le OP_1 + P_1P \quad \Rightarrow \quad |z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

अतः इससे सिद्ध होता है कि दो सम्मिश्र राशियों के योग का मापांक उनके अलग–अलग मापांकों के योग से छोटा या बराबर होता है।

5.17 दो सम्मिश्र संख्याओं के व्यवकलन का ज्यामितीय निरूपण
(Geometrical representation of substraction of two complex numbers):

माना $z_1 = a_1 + ib_1$ तथा $z_2 = a_2 + ib_2$ दो सम्मिश्र संख्याएँ है। इन संख्याओं को आर्गेण्ड चित्र 5.04 में दो बिन्दुओं P_1 और P_2 से निरूपित किया गया है जिनके निर्देशांक क्रमशः (a_1, b_1) और (a_2, b_2) है। चित्र में P_2O को P_2' तक इस प्रकार बढ़ाया कि $|OP_2| = |OP_2'|$, तब बिन्दु P_2' सम्मिश्र संख्या $(-z_2)$ को निरूपित करेगा जिसके निर्देशांक $(-a_2, -b_2)$ होंगे। अब OP_1 व OP_2' को आसन्न भुजाएं मानते हुए OP_1RP_2' समान्तर चतुर्भुज का निर्माण करते हैं। चूँकि सम्मिश्र संख्या (z_1) तथा $(-z_2)$ का योग समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण OR के सिरे R द्वारा निरूपित होता है। अतः R के निर्देशांक $(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$ होंगे जो कि दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 के अन्तर को ज्यामितीय रूप से निरूपित करेगा।



चित्र 5.04

5.18 दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल का ज्यामितीय निरूपण
(Geometrical representation of the product of two complex numbers):

माना आर्गेण्ड चित्र 5.05 में दो सम्मिश्र संख्याएँ z_1 और z_2 दो बिन्दुओं P_1 और P_2 द्वारा निरूपित किए जाते हैं जहाँ $z_1 = a_1 + ib_1$ तथा $z_2 = a_2 + ib_2$.

माना $\quad z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ $\qquad$ तथा $\qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

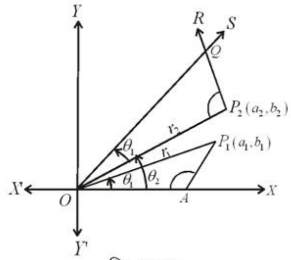
$\therefore \quad OP_1 = r_1, OP_2 = r_2$

$\angle XOP_1 = \theta_1$ तथा $\angle XOP_2 = \theta_2$ है।

माना x- अक्ष पर एक बिन्दु A इस प्रकार है कि $OA = 1$.

$\therefore$ A बिन्दु $1+i0$ को प्रदर्शित करता है। AP_1 को मिलाया तथा P_2 पर $\angle OAP_1 = \angle OP_2R$ बनाया एवं O पर $\angle P_2OS = \theta_1$ बनाया तब OS व P_2R आपस में Q पर मिलते हैं। त्रिभुज OAP_1 तथा OP_2Q समरूप हैं। अतः समरूप त्रिभुजों के गुणधर्म से

$$\frac{OQ}{OP_2} = \frac{OP_1}{OA} \Rightarrow OQ = OP_1 \times OP_2$$
$$= r_1 r_2 \; (\because OA = 1)$$



चित्र 5.05

तथा $\angle XOQ = \angle XOP_2 + \angle P_2OQ$
$$= \angle XOP_2 + \angle XOP_1$$
$$= \angle XOP_1 + \angle XOP_2$$
$$= \theta_1 + \theta_2$$

अतः बिन्दु Q सम्मिश्र संख्या $r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$ अर्थात् संख्या $z_1 z_2$ को निरूपित करता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 8: निम्न सम्मिश्र संख्याओं के कोणांक ज्ञात कीजिए:

(i) $1+20i$ (ii) $-7+i$ (iii) $1-i$ (iv) $-1-4i$

हल : (i) $1+20i$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है अतः

कोणांक $= \tan^{-1}(b/a) = \tan^{-1}(20/1)$

(ii) $-7+i$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है अतः

कोणांक $= \pi - \tan^{-1}|b/a| = \pi - \tan^{-1}(1/7)$

(iii) $1-i$ चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है अतः

कोणांक $= -\tan^{-1}|b/a| = -\tan^{-1}|-1/1| = -\tan^{-1}1 = -\pi/4$

(iv) $-1-4i$ तृतीय चतुर्थांश में स्थित है अतः

कोणांक $= -\pi + \tan^{-1}|b/a| = -\pi + \tan^{-1}|-4/-1| = -\pi + \tan^{-1}4$

उदाहरण 9: निम्न सम्मिश्र संख्याओं को ध्रुवीय रूप में लिखिए:

(i) $\sqrt{3}+i$ (ii) $\frac{i}{3}-\frac{3}{i}$

(iii) $-\frac{3}{2}+i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\sin\frac{\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)$

हल : (i) माना $\sqrt{3}+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore$ $r\cos\theta = \sqrt{3}$ (1)

तथा $r\sin\theta = 1$ (2)

(1) व (2) को वर्ग करके जोड़ने पर

$$r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = 3+1 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

(1) व (2) का भाग देने पर

$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ अतः $\theta = \frac{\pi}{6}$ ($\because$ $\sqrt{3}+i$ प्रथम चतुर्थांश में है)

$\therefore$ $\sqrt{3}+i$ का ध्रुवीय रूप $= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(ii) $\frac{i}{3} - \frac{3}{i} = \frac{i}{3} - \frac{3i}{i^2} = \frac{i}{3} + 3i = \frac{10}{3}i$

माना $\frac{10}{3}i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

अतः $r\cos\theta = 0$ तथा $r\sin\theta = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow$ $r^2 = 0 + \frac{100}{9}$ अर्थात् $r = \frac{10}{3}$ तथा $\cos\theta = 0,\ \sin\theta = 1$ इसलिए $\theta = \frac{\pi}{2}$

अतः $\frac{i}{3} - \frac{3}{i} = \frac{10}{3}i$ का ध्रुवीय रूप $= \frac{10}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(iii) माना $-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore$ $r\cos\theta = -\frac{3}{2}$ तथा $r\sin\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

वर्ग करके जोड़ने पर $r^2 = \frac{9}{4} + \frac{27}{4} = \frac{36}{4}$ $\Rightarrow$ $r = 3$

$\because$ $-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है अतः

कोणांक $\theta = \pi - \tan^{-1}|b/a|$

$$= \pi - \tan^{-1}\left|\frac{3\sqrt{3}}{2} \Big/ -\frac{3}{2}\right| = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

अतः $-\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ का ध्रुवीय रूप $= 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(iv) $\because$ $\sin\frac{\pi}{5} + i\left(1 - \cos\frac{\pi}{5}\right)$

$$= 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10} + i\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{10}$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{10}\left(\cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10}\right)$$

जो कि दी गई संख्या का ध्रुवीय रूप है जहाँ मापाँक $r = 2\sin\frac{\pi}{10}$ तथा कोणाँक $\theta = \frac{\pi}{10}$ है।

उदाहरण 10: यदि z_1 तथा z_2 कोई दो अशून्य सम्मिश्र संख्याऐं हों, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) कोणांक $z_1 z_2 =$ कोणांक $z_1 +$ कोणांक z_2

(ii) कोणांक $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) =$ कोणांक $z_1 -$ कोणांक z_2

हल : माना $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ तथा $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ जहाँ स्पष्टतः θ_1 और θ_2 क्रमशः z_1 और z_2 के कोणांक है।

(i) $$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$= r_1 r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

अतः $z_1 z_2$ का कोणांक $= \theta_1 + \theta_2 =$ कोणांक $z_1 +$ कोणांक z_2

(ii) $$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}\times\frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

अतः z_1/z_2 का कोणांक $= \theta_1 - \theta_2 =$ कोणांक $z_1 -$ कोणांक z_2

प्रश्नमाला 5.2

1. निम्न सम्मिश्र संख्याओं के कोणांक ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{1+i}{1-i}$ (ii) $-1+\sqrt{3}\,i$ (iii) $\frac{5+i\sqrt{3}}{4-i2\sqrt{3}}$

2. निम्न सम्मिश्र संख्याओं को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए:

(i) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ (iii) $\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}$

3. यदि z_1 तथा z_2 दो अशून्य सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो सिद्ध कीजिए कि

कोणांक $z_1\overline{z}_2 =$ कोणांक $z_1 -$ कोणांक z_2

5.19 सम्मिश्र संख्या $a+ib$ का वर्गमूल ज्ञात करना

(To find the square root of a complex number $a+ib$):

माना $\sqrt{a+ib}=x+iy$ तब $(a+ib)=(x+iy)^2$

$\Rightarrow \quad (a+ib)=(x^2-y^2)+(2xy)\,i$

वास्तविक व काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$$x^2-y^2=a \tag{1}$$

तथा

$$2xy=b \tag{2}$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=\sqrt{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2}=\sqrt{a^2+b^2} \tag{3}$$

(1) व (3) को जोड़ने पर

$$2x^2=a+\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad x=\pm\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}$$

इसी प्रकार (1) में से (3) घटाने पर

$$-2y^2=a-\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad y=\pm\sqrt{\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad \sqrt{a+ib}=\pm\left[\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}+i\sqrt{\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}\right]$$

5.20 इकाई के घनमूल (Cube roots of unity):

माना $\sqrt[3]{1}=z,$ तब $z^3=1$

$\Rightarrow \quad z^3-1=0$

$\Rightarrow \quad (z-1)(z^2+z+1)=0$

$\Rightarrow \quad (z-1)=0$ या $z^2+z+1=0$

$\Rightarrow \quad z=1$ या $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{(1-4)}}{2}$

$\Rightarrow \quad z=1$ या $z=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ इकाई के घनमूल $1, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ होते हैं।

अर्थात् इकाई के तीन घनमूल होते हैं जिनमें से दो सम्मिश्र राशियाँ होती है।

प्रमेयः सिद्ध कीजिए कि इकाई के घनमूल में सम्मिश्र मूल एक दूसरे के वर्ग होते हैं।

प्रमाणः माना $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ तथा $\beta = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ इकाई के दो सम्मिश्र मूल है।

$$\alpha^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3-i2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \beta$$

$$\beta^2 = \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3+i2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \alpha$$

अतः सिद्ध हुआ कि इकाई के सम्मिश्र घनमूल एक दूसरे के वर्ग होते हैं।

टिप्पणीः

1. इकाई के घनमूलों को $1, \omega, \omega^2$ से प्रदर्शित करते हैं।
2. इकाई के घनमूल के गुणधर्म : $(a)\omega^3 = 1$ तथा $(b) 1+\omega+\omega^2 = 0.$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 11: $3-4i$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\sqrt{3-4i} = x+iy \Rightarrow 3-4i = x^2-y^2+2ixy$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$$x^2 - y^2 = 3 \qquad (1)$$

तथा $$2xy = -4 \qquad (2)$$

$\therefore \quad x^2+y^2 = \sqrt{(x^2-y^2)+4x^2y^2} = \sqrt{9+16} = 5$

(1) व (3) को जोड़ने पर, (3) में से (1) घटाने पर,

$2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$ $\qquad$ $2y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm 1$

$\therefore \quad 2xy$ का मान ऋणात्मक है अतः x तथा y विपरित चिह्न के लेने होंगे।

अतः $x=2$ तब $y=-1$ तथा $x=-2$ तब $y=1$ होगा

$\therefore \quad \sqrt{3-4i} = \pm(2-i)$

उदाहरण 12: -27 के धनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $-27 = (-3)(1)^{1/3} = -3, -3w, -3w^2$ $\qquad \left[\because (1)^{1/3} = 1, \omega, \omega^2\right]$

उदाहरण 13: यदि $1, w, w^2$ इकाई के घनमूल हैं तो सिद्ध कीजिए कि $(1-w+w^2)(1+w-w^2) = 4$

हल : $(1-w+w^2)(1+w-w^2) = (-w-w)(-w^2-w^2)$ $\qquad \left[\because 1+w+w^2 = 0\right]$

$$= (-2w)(-2w^2) = 4w^3 = 4(1) = 4$$

उदाहरण 14: यदि $x = a+b,\ y = aw+bw^2$ तथा $z = aw^2+bw$ तो सिद्ध कीजिए कि $x^2+y^2+z^2 = 6ab$

हल : $\because \quad x^2 = a^2+2ab+b^2, \quad y^2 = a^2w^2+2abw^3+b^2w^4 = a^2w^2+2ab+b^2w$ $\qquad (\because w^3 = 1)$

तथा $z^2 = a^2w^4+2abw^3+b^2w^2 = a^2w+2ab+b^2w^2$

अतः $\quad x^2+y^2+z^2 = a^2(1+w^2+w)+6ab+b^2(1+w+w^2)$

$= a^2(0)+6ab+b^2(0) = 6ab$ $\qquad (\because 1+w+w^2 = 0)$

उदाहरण 15: सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-w+w^2\right)\left(1-w^2+w^4\right)\left(1-w^4+w^8\right)...2n \text{ गुणनखण्ड } = 2^{2n}$$

हल : $\because \; w^3=1$ तथा $1+w+w^2=0$

अतः $\left(1-w+w^2\right)\left(1-w^2+w^4\right)\left(1-w^4+w^8\right)...2n$ गुणनखण्ड

$$=\left(-w-w\right)\left(-w^2-w^2\right)\left(-w-w\right)\left(-w^2-w^2\right)...2n \text{ गुणनखण्ड}$$

$$=\left\{\left(-2w\right)\left(-2w^2\right)\right\}\left\{\left(-2w\right)\left(-2w^2\right)\right\}...n \text{ गुणनखण्ड}$$

$$=\left(4w^3\right)\left(4w^3\right)...n \text{ गुणनखण्ड}$$

$$=4^n=2^{2n}$$

उदाहरण 16: सरल कीजिए: $\left(x-1\right)^3+8=0$

हल : माना $x-1=y$ अतः दी गई समीकरण से

$$y^3+8=0 \quad \Rightarrow \quad y=\left(-8\right)^{1/3}=-2\left(1\right)^{1/3}=-2,\,-2w,\,-2w^2$$

$$\therefore \quad x-1=-2,\,-2\omega,\,-2\omega^2$$

$$\Rightarrow \quad x=1-2,\;1-2w,\;1-2w^2$$

$$=-1,\quad 1-2w,\;1-2w^2$$

प्रश्नमाला 5.3

1. निम्न सम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) $-5+12i$ (ii) $8-6i$ (iii) $-i$

2. $\sqrt{4+3\sqrt{-20}}+\sqrt{4-3\sqrt{-20}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. निम्न के धनमूल ज्ञात कीजिए।

   (i) -216 (ii) -512

4. सिद्ध कीजिए।

   (i) $1+w^n+w^{2n}=0$, जबकि $n=2,\,4$

   (ii) $1+w^n+w^{2n}=3$, जबकि n, 3 का गुणज हो।

5. सिद्ध कीजिए।

   (i) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{29}+\left(\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{29}=-1$

   (ii) $\left(1+5w^2+w\right)\left(1+5w+w^2\right)\left(5+w+w^2\right)=64$

6. $1, w, w^2$ इकाई के घनमूल हो तो सिद्ध कीजिए।

   $\left(1+w\right)\left(1+w^2\right)\left(1+w^4\right)\left(1+w^8\right)....2n$ गुणनखण्ड $=1$

5.21 द्विघात समीकरण (Quadratic equation)

पूर्व कक्षाओं में द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के हल निकालने की विभिन्न विधियों का अध्ययन किया है। इसमें श्रीधराचार्य द्वारा दी गई व्यापक विधि भी सम्मिलित है। इस अध्याय के प्रारम्भ में विविक्तिकर $b^2-4ac<0$ की स्थिति में भी प्राप्त हलों का अध्ययन किया है।

यहाँ हम विभिन्न द्विघात समीकरण के हल प्राप्त करने की वैदिक विधि का अध्ययन करते हुए प्राप्त मूलों के मध्य सम्बन्ध तथा मूलों की सहायता से द्विघात समीकरण के निर्माण विधि का अध्ययन करेंगे। (सम्मिश्र संख्याओं के विशेष परिपेक्ष में)

(A) वैदिक विधि से द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का हल निकालने की क्रिया विधिः इस विधि का अध्ययन अध्याय 10 के अध्ययन के पश्चात् करना उचित होगा।

(i) सर्वप्रथम द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का प्रथम अवकलन ज्ञात कर इसे D_1 कहे।

उदाहरणार्थः x^2-5x+6 के दो गुणनखण्डों $(x-2)$ तथा $(x-3)$ का योग $2x-5$ इसका प्रथम अवकलज है। इसे $D_1=2x-5$ लिखे।

(ii) विविक्तिकर ज्ञात करे अर्थात् मध्य पद के वर्ग में से प्रथम पद तथा तृतीय पद के गुणा की चार गुणा घटा कर वर्ग मूल निकाले

अर्थात् उपर्युक्त उदाहरण में $\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times6}=\pm1$

(iii) अब $D_1=\pm1$ (विविक्तिकर) रख कर हल ज्ञात करें।

अतः $2x-5=\pm1 \Rightarrow \quad x=2$ या 3

उदाहरणार्थः (i) $7x^2-5x-2=0$ का हल

$$14x-5=\pm\sqrt{25+4\times7\times2}=\pm9 \qquad \Rightarrow 14x=5\pm9 \;\Rightarrow\; x=1 \text{ या } -4/14$$

(ii) $ax^2+bx+c=0$ का हल

$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$ से प्राप्त होगा।

यह एक व्यापक विधि हैं जिसके द्वारा अभ्यास के पश्चात् मौखिक रूप से भी हल निकाले जा सकते हैं।

(B) विशेष अवस्थाओं में द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों के गुणधर्म

(i) यदि $c=0$, तो एक मूल शून्य होगा।

(ii) यदि $b=0$, तो मूल समान किन्तु विपरित के होंगे।

(iii) यदि $b=c=0$, तो दोनों मूल शून्य होंगे।

(iv) यदि $a=c$, तो मूल एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे।

(v) यदि $a=0$, तो एक मूल अनन्त होगा।

(vi) यदि $a=b=0$ तो दोनों मूल अनन्त होंगे।

उदाहरणार्थः $x^2-10x+21=m$ के मूल समान होने पर m का मान होगा?

हल : समान मूलों के लिए $(b^2=4ac)$ से $(-10)^2=4\times1\times(21-m)\Rightarrow m=-4$

(C) द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों तथा गुणाकों के मध्य सम्बन्धः

यदि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल α तथा β है तो

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ तथा } \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

इसका योग $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ अर्थात् मूलों का योग $=-\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

इनका गुणा $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ अर्थात् मूलों का गुणा $=\dfrac{\text{निरपेक्ष पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

टिप्पणी: यदि x^2 का गुणांक 1 लिखा जाए तो द्विघात समीकरण का रूप $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ होता है तो

मूलों का योग $=-x$ का गुणांक

मूलों का गुणा = निरपेक्ष पद

(D) द्विघात समीकरण का निर्माण

(i) जब मूल दिये गये हों: माना α तथा β दिये गये मूल है। क्योंकि समीकरण $x=\alpha$ तथा $x=\beta$ से सन्तुष्ट होते है। अतः $(x-\alpha)$ तथा $(x-\beta)$ समीकरण के गुणनखण्ड होने चाहिए अतः आवश्यक समीकरण $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ होगा।

अर्थात् $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

अर्थात् $x^2-(\text{मूलों का योग})x+\text{मूलों का गुणा}=0$

(ii) जब मूल परस्पर एक दिए समीकरण के मूलों से हों: दिए समीकरण से मूलों के योग एवं गुणा ज्ञत करे। फिर आवश्यक समीकरण के मूलों के योग एवं गुणा प्राप्त कर उपर्युक्त विधि से समीकरण ज्ञात करें।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 17: वैदिक विधि से $x^2+x+3=0$ के हल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $D_1=2x+1,$ विविक्तिकर $=\pm\sqrt{1-12}=\pm\sqrt{11}\,i$

$\therefore\quad 2x+1=\pm\sqrt{11}\,i$ अतः हल $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$

उदाहरण 18: वैदिक विधि से $2x^2-9ix-9=0$ के हल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $D_1=4x-9i$ तथा विविक्तिकर $=\pm\sqrt{-81+4\times2\times9}=\pm3i$

$\therefore\quad 4x-9i=\pm3i \Rightarrow x=3i$ या $\dfrac{3}{2}i$

उदाहरण 19: $x^2-2x+(-2+4i)=0$ को हल कीजिए।

हल : यहाँ $D_1=2x-2$ तथा विविक्तिकर $=\pm\sqrt{4-4\times1\times(-2+4i)}=\pm2\sqrt{3-4i}$

अतः यहाँ से हमें $\sqrt{3-4i}$ का वर्गमूल निकालना आवश्यक है

माना यह वर्गमूल $u+iv$ है

$\therefore\quad \sqrt{3-4i}=u+iv$

$\Rightarrow\quad 3-4i=u^2-v^2+2uvi$

अतः $u^2-v^2=3$ तथा $2uv=-4$

$\therefore\quad u^2+v^2=\sqrt{(u^2-v^2)^2+4u^2v^2}$ से $u^2+v^2=\sqrt{9+16}=5$

$\therefore\quad u^2-v^2=3$ तथा $u^2+v^2=5$ से $2u^2=8$ तथा $2v^2=2$

$\Rightarrow\quad u^2=4$ तथा $v^2=1$

$\Rightarrow\quad u=\pm2$ तथा $v=\pm1$

परन्तु $2uv=-4$ होने से u तथा v विपरित चिह्न के लेने पर

$\sqrt{3-4i}=\pm(2-i)\qquad\therefore\quad D_1=2x-2=\pm2(2-i)$ [विविक्तिकर]

$\Rightarrow\quad x-1=\pm(2-i)\qquad\Rightarrow\quad x=3-i$ या $-1+i$

उदाहरण 20: वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों के व्युत्क्रम हों।

हल : माना दिये समीकरण के मूल α तथा β है।

अतः $\alpha+\beta=-b/a$ तथा $\alpha\beta=c/a$

अभीष्ट समीकरण के मूल $1/\alpha$ तथा $1/\beta$ है।

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}=0$ होगा।

$$\Rightarrow \quad x^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}=0$$

$$\Rightarrow \quad x^2-\left(\frac{-b/a}{c/a}\right)x+\frac{1}{c/a}=0 \qquad \text{[(1) व (2) से प्रयोग से]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1=0$$

$\Rightarrow$ $cx^2+bx+a=0$ ही अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्नमाला 5.4

1. निम्न समीकरणों के हल वैदिक विधि से ज्ञात कीजिए।

   (i) $x^2+4x+13=0$ (ii) $2x^2+5x+4=0$ (iii) $ix^2+4x-15/2=0$

2. द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल

   (i) 5 तथा –2 हैं। (ii) $1+2i$ हैं।

3. यदि समीकरण $x^2-px+q=0$ का एक मूल दूसरे का दुगुना है तो सिद्ध कीजिए कि $2p^2=9q$.

4. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिसमें समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल $m:n$ के अनुपात में है।

विविध प्रश्नमाला–5

1. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+i}{1-i}$ का वास्तविक एवं काल्पनिक भाग क्रमशः हैः

(A) 1, 1 (B) 0, 0 (C) 0, 1 (D) 1, 0

2. यदि $2+(2a+5ib)=8+10i$, तब–

(A) $a=2, b=3$ (B) $a=2, b=-3$ (C) $a=3, b=2$ (D) $a=3, b=-2$

3. $3-i$ का गुणन प्रतिलोम हैः

(A) $\frac{3+i}{10}$ (B) $\frac{-3+i}{10}$ (C) $\frac{3-i}{10}$ (D) $\frac{-3-i}{10}$

4. $\frac{2-3i}{4+i}$ का संयुग्मी हैः

(A) $\frac{-5+14i}{17}$ (B) $\frac{5+14i}{17}$ (C) $\frac{14+5i}{17}$ (D) $\frac{14-5i}{17}$

5. यदि $z_1, z_2 \in C$ तो कौनसा कथन सत्य है:

(A) $|z_1 - z_2| \geq |z_1| + |z_2|$ (B) $|z_1 + z_2| \leq |z_1 - z_2|$

(C) $|z_1 + z_2| \geq |z_1 - z_2|$ (D) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

6. यदि $|z-3| = |z+3|$ तो z स्थित है

(A) x – अक्ष पर (B) y – अक्ष पर (C) $x = y$ रेखा पर (D) $x = -y$ रेखा पर

7. –2 का मुख्य कोणांक लिखिए।

8. $\dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i$ का ध्रुवीय रूप लिखिए।

9. $4 + 5w^4 + 3w^5$ का मान होगा?

10. $\dfrac{1}{1 - \cos\theta + i\sin\theta}$ को $a + ib$ रूप में लिखिए।

11. $|1-i|^x = 2^x$ के शून्येत्तर पूर्णांक मूलों की संख्या है:

12. यदि $z_1, z_2 \in C$ तो सिद्ध कीजिए:

(i) $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (ii) $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

(iii) $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$

13. यदि $|z_1| = 1 = |z_2|$ तो सिद्ध कीजिए $|z_1 + z_2| = \left|\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right|$

14. यदि $\dfrac{(a+i)^2}{2a-i} = p + iq$ तो सिद्ध कीजिए कि $p^2 + q^2 = \dfrac{(a^2+1)^2}{4a^2+1}$.

15. यदि $|z_1| = |z_2|$ तथा कोणांक z_1 + कोणांक $z_2 = 0$ तो सिद्ध कीजिए कि $z_1 = \overline{z}_2$

16. यदि θ_1, θ_2 क्रमशः सम्मिश्र संख्याएँ z_1, z_2 के कोणांक है तो सिद्ध कीजिए कि

$z_1\,\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 = 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$

17. सिद्ध कीजिए कि

(i) $(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

(ii) $(a + b + c)(a + bw + cw^2)(a + bw^2 + cw) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

18. यदि α, β दो भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हों तथा $|\beta| = 1$ तो सिद्ध कीजिए कि $\left|\dfrac{\beta - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\beta}\right| = 1.$

19. यदि α तथा β समीकरण $px^2 - qx - r = 0$ के मूल है तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $1/\alpha$ तथा $1/\beta$ है।

20. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिससे समीकरण $\ell x^2 - 2mx + n = 0$ का एक मूल दूसरे का P गुणा होता है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. $i=\sqrt{-1}$
2. $z=a+ib$ सम्मिश्र राशि कहलाती है जहाँ $a,b\in R$. इसे (a,b) द्वारा भी व्यक्त किया जाता है।
   z का वास्तविक भाग $=\operatorname{Re}(z)=a$ तथा काल्पनिक भाग $=\operatorname{Im}(z)=b$.
3. $z=a+ib=0 \;\Rightarrow\; a=0$ तथा $b=0$
4. माना $z_1=a_1+ib_1$ तथा $z_2=a_2+ib_2$ तब $z_1=z_2 \;\Rightarrow\; a_1=a_2$ तथा $b_1=b_2$
5. सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को C से निरूपित किया जाता है
   अर्थात् $C=\{a+ib;\; a,b\in R\}$ या $C=\{(a,b);\; a,b\in R\}$
6. सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में निम्न मूलभूत संक्रियाएँ होती है :
   (i) योग (ii) व्यवकलन (iii) गुणन (iv) भाग C_0 में
7. सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में योग व गुण संक्रियाएँ निम्न गुणधर्म का पालन करती है :
   (i) संवृत्त गुणधर्म अर्थात् $z_1,z_2\in C \;\Rightarrow\; z_1+z_2\in C$ तथा $z_1\cdot z_2\in C$
   (ii) साहचर्य गुणधर्म अर्थात् $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$
   तथा $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3,\;\forall\, z_1,z_2,z_3\in C$
   (iii) सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C में
   योज्य तत्समक $=0+i\,0$,
   गुणज तत्समक $=1+i0=1$
   (iv) z का योज्य प्रतिलोम $=-z$ तथा $z=a+ib$ का गुणन प्रतिलोम
   $\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{i(-b)}{a^2+b^2}\quad [z\neq 0]$
   (v) क्रमविनिमेय गुणधर्म अर्थात् $z_1+z_2=z_2+z_1$ तथा $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1\;\forall\; z_1,z_2\in C$
   (vi) निरसन नियम $z_1+z_3=z_2+z_3 \;\Rightarrow\; z_1=z_2;\quad z_3+z_1=z_3+z_2 \;\Rightarrow\; z_1=z_2$
   $z_1\cdot z_3=z_2\cdot z_3 \;\Rightarrow\; z_1=z_2;\quad z_3\cdot z_1=z_3\cdot z_2 \;\Rightarrow\; z_1=z_2\;[z_3\neq 0]$
8. संयुग्मी सम्मिश्र संख्या : प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $z=x+iy$ की एक संयुग्मी सम्मिश्र संख्या होती है इसे $\bar{z}$ से निरूपित करते हैं जहाँ $\bar{z}=x-iy$.
9. संयुग्मी सम्मिश्र संख्या के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्म
   (i) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$ तथा $z-\bar{z}=2\operatorname{Im}(z)$
   (ii) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ तथा $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$
   (iii) $\overline{(\bar{z})}=z,\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\; z_2\neq 0$
10. यदि $z=a+ib$ तब $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$
11. $z\bar{z}=|z|^2 \quad \therefore \quad z^{-1}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$
12. एक समतल में दो लम्बवत अक्ष XOX' तथा YOY' में x- अक्ष द्वारा सम्मिश्र संख्या का वास्तविक भाग तथा y- अक्ष द्वारा काल्पनिक भाग प्रदर्शित करें तो प्रत्येक सम्मिश्र संख्या इस समतल पर बिन्दुओं द्वारा प्रदर्शित होती है। इस समतल को आर्गेण्ड समतल तथा इस चित्र को आर्गेण्ड चित्र कहते हैं।

13. सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप : सम्मिश्र संख्या $z=a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ के ध्रुवीय रूप को प्रदर्शित करता है। जहाँ $r=|z|$ तथा कोणांक $=\theta$.

14. $-\pi<\theta\le\pi$ की स्थिति में कोणांक θ, सम्मिश्र संख्या का मुख्य कोणांक कहलाता है।

15. सम्मिश्र संख्या $a+ib$ का वर्गमूल

$$\sqrt{a+ib}=\pm\left[\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)/2\right]^{1/2}\pm i\left[\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)/2\right]^{1/2}$$

16. वैदिक विधि से द्विघात समीकरण के हल हेतु समीकरण के प्रथम अवकलज $=\pm$ विविक्तिकर रख कर हल करें।

17. द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों का योग $=-\dfrac{b}{a}$ तथा मूलों का गुणा $=\dfrac{c}{a}$

18. यदि मूल α तथा β दिये है तो द्विघात समीकरण $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ से प्राप्त होगा।

उतरमाला

प्रश्नमाला 5.1

1. (i) 1, (ii) $-\sqrt{6}$, (iii) 32 **2.** (i) $-1-2i,\ \dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$, (ii) $-\dfrac{3}{25}+\dfrac{4}{25}i,\ 3+4i$, (iii) $-8-6i,\ \dfrac{2}{25}-\dfrac{3}{50}i$

3. $\dfrac{17}{10}-\dfrac{31}{10}i$ **4.** (i) $\sqrt{17}$, (ii) $\sqrt{13}$, (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ **5.** $b+ia$ **6.** $i\cot\theta/2$ **7.** $x=3,\ y=-1$

प्रश्नमाला 5.2

1. (i) $\dfrac{\pi}{2}$ (ii) $\dfrac{2\pi}{3}$ (iii) $\dfrac{\pi}{3}$ **2.** (i) $\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}$ (ii) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ (iii) $\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

प्रश्नमाला 5.3

1. (i) $\pm(2+3i)$ (ii) $\pm(3-i)$ (iii) $\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

2. $\pm 6,\ \pm 2\sqrt{5}\,i$ **3.** (i) $-6,\ -6w,\ -6w^2$ (ii) $-8,\ -8w,\ -8w^2$

प्रश्नमाला 5.4

1. (i) $-2\pm 3i$ (ii) $\dfrac{-5\pm\sqrt{7}\,i}{4}$ (iii) $\dfrac{3-i}{2},\dfrac{-3+9i}{2}$

2. (i) $x^2-3x-10=0$ (ii) $x^2-2x+5=0$ **4.** $mnb^2=ac(m+n)^2$

विविध प्रश्नमाला 5

1. C **2.** C **3.** A **4.** B **5.** D **6.** B

7. π **8.** $5\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ **9.** $\sqrt{3}\,i$ **10.** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}\cot\dfrac{\theta}{2}$

11. शून्य **19.** $rx^2+qx-p=0$ **20.** $4m^2p=\ell n(1+p)^2$

6

क्रमचय तथा संचय
(Permutation and Combination)

6.01 गुणन का आधारभूत सिद्धांत (Fundamental principle of multiplication)

माना कि कोई घटना A, m प्रकार से और घटना B, n प्रकार से घटित हो सकती है एवं माना कि घटना A और B आपस में संबंधित नहीं हैं। अर्थात् घटना B का n प्रकार घटित होना घटना A के परिणाम पर निर्भर नहीं है। तब दोनों घटनाएँ A और B संयुक्त रूप से $m \times n$ प्रकार से घटित हो सकती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: एक कक्षा में 10 लड़कें एवं 8 लड़कियाँ हैं। किसी समारोह के लिए अध्यापक, एक लड़का तथा एक लड़की का चयन करना चाहता है। तब लड़का तथा लड़की संयुक्त रूप से कुल $10 \times 8 = 80$ प्रकार से चुने जा सकते हैं।

उदाहरण 2: माना कि दो प्रश्न A और B क्रमशः 2 तथा 3 प्रकार से हल किए जा सकते हैं, तो A और B (संयुक्त रूप से) कुल $2 \times 3 = 6$ प्रकार से हल किए जा सकते हैं।

उदाहरण 3: तीन व्यक्ति अजमेर आकर ठहरते हैं व उनके ठहरने के लिए 6 होटल है। यदि इनमें से प्रत्येक भिन्न होटल में रूकें, तो वे अजमेर में कितने प्रकार से ठहर सकते हैं?

हल: पहला व्यक्ति 6 होटल में से किसी एक में ठहर सकता है और यह कार्य इस प्रकार से 6 प्रकार से हो सकता है। अब यदि वह किसी एक विशेष होटल में ठहर गया तो दूसरा व्यक्ति शेष 5 होटल में से किसी एक होटल को चुन सकता हैं इस प्रकार प्रथम व्यक्ति के एक चुनाव के साथ–साथ दूसरे के लिए 5 विधियाँ हैं। अतः प्रथम व्यक्ति 6 चुनाव विधियों के लिए दोनों व्यक्तियों की 6×5 विधियाँ होंगी। अतः जब दूसरा व्यक्ति भी इन होटल में से एक अपने लिए चुन लेता है तो तीसरे व्यक्ति को शेष 4 होटल में से एक को चुनना होगा, जो कि वह यह कार्य 4 प्रकार से कर सकता है। अतः प्रथम व दूसरे व्यक्ति की प्रत्येक एक चुनाव विधि के साथ तीसरे व्यक्ति के लिए 4 चुनाव विधियाँ हैं। अतः तीनों व्यक्तियों के ठहरने के लिए चयन की कुल विधियाँ $6 \times 5 \times 4 = 120$ होंगी।

उदाहरण 4: माना कि जोधपुर तथा जयपुर के बीच 5 रेलगाड़ियाँ आती–जाती है। एक व्यक्ति जोधपुर से जयपुर किसी एक रेलगाड़ी से जाकर वापस जयपुर से जोधपुर किसी अन्य रेलगाड़ी से आना चाहता है। वह कितनें प्रकार से यह यात्रा कर सकता है?

हल: यात्रा के दो भाग हैः

(i) जोधपुर से जयपुर की यात्रा

(ii) जयपुर से जोधपुर की यात्रा

व्यक्ति यात्रा के प्रथम भाग को 5 प्रकार से सम्पादित कर सकता है तथा द्वितीय भाग 4 प्रकार से। अतः यात्रा करने की कुल विधियाँ $5 \times 4 = 20$ होंगी।

6.02 योग का आधारभूत सिद्धांत (Fundamental principle of addition)

माना कि कोई घटना A, m प्रकार से और घटना B, n प्रकार से घटित हो सकती है, जबकि दोनों घटनाएँ एक साथ घटित नहीं हो सकती है। तब घटना A या B (दोनों में से कम से कम एक) $(m+n)$ प्रकार से घटित हो सकती है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 5: एक कक्षा में 10 लड़कें एवं 8 लड़कियाँ हैं। किसी समारोह के लिए अध्यापक, एक लड़का या एक लड़की का चयन करना चाहता है। तब लड़का या लड़की को कुल $10 + 8 = 18$ प्रकार से चुना जा सकता हैं।

उदाहरण 6: माना कि दो प्रश्न A और B क्रमशः 2 तथा 3 प्रकार से हल किए जा सकते हैं, तो A या B (दोनों में से कम से कम एक) कुल $2 + 3 = 5$ प्रकार से हल किए जा सकते हैं।

6.03 क्रमगुणित (Factorial) :

प्रथम n प्राकृत संख्याओं के गुणनफल को क्रमगुणित n कहते हैं एवं इसे $n!$ या $\lfloor\underline{n}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

अर्थात् $n! = 1.2.3.......(n-1).n$

इस प्रकार, $3! = 1.2.3 = 6,\ 4! = 1.2.3.4 = 24,\ 5! = 1.2.3.4.5 = 120$ इत्यादि।

$$n! = 1.2.3.....(n-1).n$$
$$= \{1.2.3.....(n-1)\}.n = \{(n-1)!\}.n$$

इस प्रकार, $n! = n.(n-1)!$

उदाहरणार्थः $8! = 8(7)!,\ 5! = 5(4)!$

टिप्पणीः **1.** $0! = 1.$

2. उचित भिन्न अथवा ऋणात्मक पूर्णांक का क्रमगुणित परिभाषित नहीं है। अर्थात् केवल पूर्ण संख्या का ही क्रमगुणित परिभाषित है।

6.04 क्रमचय (Permutation) :

दी हुई वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी को एक साथ लेकर उन्हें जितने भिन्न–भिन्न क्रमों या विन्यासों (arrangements) में रखा जा सकता है, उनमें से प्रत्येक क्रम को **क्रमचय** कहते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 7: यदि A,B,C तीन वस्तुएँ हैं, तो इनमें से कोई भी दो के चयन से निम्नलिखित 6 क्रमचय बनेंगे:

AB, BC, CA, BA, CB, AC

यहाँ पर $AB \neq BA,\ AC \neq CA$ तथा $BC \neq CB$ है। अर्थात् यहाँ पर क्रम का महत्व है, क्रम बदलने से दूसरा क्रमचय बन जाता है।

उदाहरण 8: चार अक्षरों a,b,c,d में से तीन भिन्न अक्षरों के निम्नलिखित 24 क्रमचय बनेंगे:

abc	abd	bcd	acd
acb	adb	bdc	adc
bca	bda	cbd	cad
bac	bad	cdb	cda
cab	dab	dcb	dac
cba	dba	dbc	dca

सर्वप्रथम चार अक्षरों में से तीन का चयन करके फिर उनको सभी संभावित प्रकार से व्यवस्थित करने से ये क्रमचय प्राप्त होते हैं।

6.05 क्रमचयोंकी संख्या (Number of Permutations) :

प्रमेय 1: n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं के चयन के क्रमचयों की संख्या है:

$$n(n-1)(n-2).....\{n-(r-1)\}$$

अर्थात् $\quad {}^nP_r = n(n-1)(n-2).....(n-r+1).$

प्रमाणः मानाकि हमारे पास कुल n विभिन्न वस्तुएँ हैं और हमें r स्थानों को भरना है। पहले स्थान के लिए n वस्तुओं में से किसी भी एक वस्तु को चुना जा सकता है। अतः पहले स्थान के लिए वस्तु को चुनने की विधियाँ n हैं। अब दूसरे स्थान के लिए शेष $(n-1)$ वस्तुओं में से ही चुनना होगा। अतः दूसरे स्थान के लिए वस्तु को चुनने की विधियाँ $(n-1)$ हैं। फलतः गुणन के आधारभूत सिद्धांत से पहले दो स्थान $n\,(n-1)$ विधियों से भरे जा सकते हैं। इन दो स्थानों के भरने के बाद तीसरे स्थान के लिए शेष $(n-2)$ वस्तुओं में से ही चुनना होगा। अतः तीसरे स्थान के लिए वस्तु को चुनने की विधियाँ $(n-2)$ हैं। इसलिए पहले तीन स्थान $n\,(n-1)(n-2)$ विधियों से भरे जा सकते हैं। इसी प्रकार से इस क्रिया को आगे बढ़ाते हुए r स्थानों को भरने की विधियाँ $n(n-1)(n-2).....\{n-(r-1)\}$ होंगी। इस संख्या को ${}^nP_r$ से व्यक्त करते हैं। अतः n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं के चयन के क्रमचयों की संख्या है:

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2).....(n-r+1).$$

टिप्पणीः कभी–कभी वस्तुओं के प्रयोग पर प्रतिबंध भी लगाए जाते हैं, जो कि आगे उदाहरणों से स्पष्ट होंगे।

उपप्रमेय 1: $^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

प्रमाण: प्रमेय 1 से हम जानते हैं कि

$$^nP_r = n(n-1)(n-2).....(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2).....\{n-(r-1)\}(n-r)\{n-(r+1)\}.....3.2.1}{(n-r)\{n-(r+1)\}.....3.2.1} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

उपप्रमेय 2: ***n*** वस्तुओं में से सबको एक साथ लेने पर क्रमचयों की संख्या ***n*!** है।

प्रमाण: प्रमेय 1 से $\quad ^nP_n = n(n-1)(n-2).....(n-n+1) = n(n-1)(n-2).....1 = n!$

उपप्रमेय 3: $0! = 1$

प्रमाण: उपप्रमेय 1 से हम जानते हैं कि $\quad ^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

इसमें $r = n$ रखने पर, $\quad ^nP_n = \dfrac{n!}{(n-n)!}$

या $\quad n! = \dfrac{n!}{0!} \quad \therefore \quad 0! = 1.$ $\quad$ [$\because$ उपप्रमेय 2 से $^nP_n = n!$]

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 9: निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए:

(i) $^nP_r = n.\,^{n-1}P_{r-1} = n(n-1).\,^{n-2}P_{r-2}$ $\qquad$ **(ii)** $^nP_0 = 1$

(iii) $^nP_n = {}^nP_{n-1}$ $\qquad$ **(iv)** $^nP_r = (n-r+1).\,^nP_{r-1}$

हल: (i) $^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ $\quad$ [उपप्रमेय 1 से]

$$= \frac{n(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!} = n.\,^{n-1}P_{r-1} \qquad (1)$$

पुनः (1) से $\quad ^nP_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{\{(n-2)-(r-2)\}!} = n(n-1).\,^{n-2}P_{r-2}$

(ii) $^nP_0 = \dfrac{n!}{(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$ $\qquad$ **(iii)** $^nP_n = n!$ $\quad$ [उपप्रमेय 2 से]

तथा $\quad ^nP_{n-1} = \dfrac{n!}{\{n-(n-1)\}!} = \dfrac{n!}{1!} = n!$ $\quad$ अतः $\quad ^nP_n = {}^nP_{n-1}$

(iv) दक्षिण पक्ष $= (n-r+1).\,^nP_{r-1}$

$$= \frac{(n-r+1)\,n!}{\{n-(r-1)\}!} = \frac{(n-r+1)\,n!}{(n-r+1)!} = \frac{(n-r+1)\,n!}{(n-r+1)(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$= {}^nP_r = \text{ वाम पक्ष}$$

उदाहरण 10: यदि $^{10}P_r = 5040$ हो, तो ***r*** का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $^{10}P_r = 5040$ (दिया हुआ है)

$$\Rightarrow \quad \frac{10!}{(10-r)!} = 10\times 504$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10!}{(10-r)!} = 10\times 9\times 8\times 7$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10!}{(10-r)!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6!}{6!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{10!}{(10-r)!} = \frac{10!}{6!}$$

$$\Rightarrow \quad (10-r)! = 6! \Rightarrow 10-r=6 \Rightarrow r=4$$

द्वितीय विधिः $^{10}P_r = 5040$ (दिया हुआ है)

$\Rightarrow \quad 10.\,^{9}P_{r-1} = 5040 \quad \Rightarrow \quad ^{9}P_{r-1} = 504$ $\quad \left[\because \,^{n}P_r = n.\,^{n-1}P_{r-1}\right]$

$\Rightarrow \quad 9.\,^{8}P_{r-2} = 504 \quad \Rightarrow \quad ^{8}P_{r-2} = 56$

$\Rightarrow \quad 8.\,^{7}P_{r-3} = 56 \quad \Rightarrow \quad ^{7}P_{r-3} = 7$

$\Rightarrow \quad 7.\,^{6}P_{r-4} = 7 \quad \Rightarrow \quad ^{6}P_{r-4} = 1 \Rightarrow r-4=0 \Rightarrow r=4$ $\quad \left[\because \,^{n}P_0 = 1\right]$

उदाहरण 11: n का मान ज्ञात कीजिए, यदिः

(i) $^{n}P_5 : {}^{n}P_3 = 2:1$ **(ii)** $2.\,^{5}P_3 = {}^{n}P_4$

हलः (i) $\dfrac{^{n}P_5}{^{n}P_3} = \dfrac{2}{1}$ (दिया हुआ है)

$\Rightarrow \quad \dfrac{n!}{(n-5)!}\times\dfrac{(n-3)!}{n!} = \dfrac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = 2$

$\Rightarrow \quad (n-3)(n-4) = 2 \quad \Rightarrow \quad (n-3)(n-4) = (5-3)(5-4)$

$\Rightarrow \quad n = 5$ [दोनों ओर तुलना करने से]

(ii) $2.\,^{5}P_3 = {}^{n}P_4$ (दिया हुआ है)

$$\Rightarrow \quad ^{n}P_4 = 2.\,^{5}P_3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n!}{(n-4)!} = 2.\frac{5!}{2!}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 5!$$

$$\Rightarrow \quad n(n-1)(n-2)(n-3) = 5.4.3.2.1$$

$$\Rightarrow \quad n(n-1)(n-2)(n-3) = 5(5-1)(5-2)(5-3)$$

$\Rightarrow \quad n = 5$ [दोनों ओर तुलना करने से]

उदाहरण 12: DELHI शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं, यदि

(i) सभी अक्षर लिए जाए **(ii) 3** अक्षर ही लिए जाए **(iii)** प्रत्येक शब्द D से प्रारंभ हो

(iv) प्रत्येक शब्द D से आरंभ तथा I पर समाप्त हो **(v)** दोनों स्वर साथ–साथ आए **(vi)** प्रत्येक शब्द दोनों स्वर से प्रारंभ हो

हलः DELHI में सभी 5 अक्षर भिन्न–भिन्न हैं।

(i) सभी 5 अक्षर लेकर क्रमचय (शब्द) बनाए जाए, तो शब्दों की कुल संख्या

$$= {}^5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

(ii) यदि 5 में से 3 अक्षर ही लिए जाए, तो शब्दों की संख्या

$$= {}^5P_3 = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

(iii) प्रत्येक शब्द के प्रारंभ में D आता है, तो फिर D स्थिर हो जाता है और इसलिए हमें केवल 4 अक्षरों को ही व्यवस्थित करना है। अतः शब्दों की संख्या होगीः

$${}^4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता है

1	4	3	2	1	$= 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
↑D					
(स्थिर)					

(iv) प्रत्येक शब्द D से प्रारंभ हो तथा I पर समाप्त हो, तो फिर D तथा I स्थिर हो जाते हैं और इसलिए हमें केवल 3 अक्षरों को ही व्यवस्थित करना है। अतः शब्दों की संख्या होगीः

$${}^3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता हैः

1	3	2	1	1	$= 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$
↑D				↑I	
(स्थिर)				(स्थिर)	

(v) जब दोनों स्वर साथ–साथ रखने हैं, तो इनको एक अक्षर (EI) की तरह मान सकते हैं। अतः हमारे पास 4 अक्षर होंगे जिन्हें ${}^4P_4 = 4! = 24$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं लेकिन (EI) में भी दो अक्षर है जिनको साथ–साथ रखने में (EI) या (IE) ले सकते हैं। अर्थात् इसे भी $2! = 2$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। इस प्रकार कुल शब्दों की संख्या $= 2 \times 24 = 48$

(vi) प्रत्येक शब्द के प्रारंभ में दोनों स्वर आते हैं, तो फिर E तथा I (प्रथम दो स्थान पर) स्थिर हो जाते हैं और इसलिए हमें केवल 3 अक्षरों को ही व्यवस्थित करना है, जिन्हें ${}^3P_3 = 3! = 6$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। लेकिन स्वर E तथा I को भी प्रथम दो स्थान पर $2! = 2$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। इस प्रकार कुल शब्दों की संख्या $= 2 \times 6 = 12$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता हैः

E	I	3	2	1	$= 3 \times 2 \times 1 = 6$	कुल 12 शब्द
I	E	3	2	1	$= 3 \times 2 \times 1 = 6$	

उदाहरण 13: **1, 2, 3, 4, 5, 6** अंकों में से कोई चार अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है, यदि

(i) अंकों की पुनरावृत्ति नहीं है, **(ii)** अंकों की पुनरावृत्ति होती है।

हलः (i) 6 अंकों में से 4 अंकों को लेकर बनने वाली संख्याएँ होंगीः

$${}^6P_4 = \frac{6!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता हैः

3	4	5	6	$= 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$

इकाई के स्थान पर 6 अंकों में से किसी एक को चुना जा सकता है। दहाई के स्थान पर शेष 5 अंकों में से किसी एक को चुना जा सकता है, क्योंकि यहाँ अंकों की पुनावृत्ति नहीं करनी है।

इसी प्रकार सैंकड़ा तथा हजार वाले अंक के स्थान पर क्रमशः शेष 4 तथा 3 अंकों में से किसी एक को चुना जा सकता है।

(ii) हमें 6 में से 4 अंकों की संख्या बनानी है, लेकिन अंकों की पुनरावृत्ति हो सकती है। अतः संख्या बनाने के लिए इकाई का अंक 6 अंकों में से किसी भी एक अंक को चुना जा सकता है। इस प्रकार से इकाई के अंको को 6 प्रकार से चुना जा सकता है। अब क्योंकि अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है अतः दहाई, सैंकड़ा व हजार वाले अंक के स्थान पर भी 6, 6, 6 प्रकार से अंक चुन सकते हैं।

अतः कुल संख्याएँ होंगी $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$.

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता है:

$\boxed{6}\boxed{6}\boxed{6}\boxed{6} = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296.$

उदाहरण 14: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8** अंकों से 6000 तथा 7000 के मध्य कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है, यदि किसी अंक को भी एक से अधिक बार प्रयोग नहीं करें तथा इसमें कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य होगी।

हल: 6000 से 7000 के मध्य प्रत्येक संख्या चार अंकों से बनती है और यह संख्या अंक 6 से आरंभ होनी चाहिए। अतः हमें शेष 7 अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 में से केवल 3 अंकों को ही चुनकर व्यवस्थित करना है, क्योंकि यहाँ अंकों की पुनरावृत्ति नहीं करनी है।

अतः अभीष्ट संख्याओं की गिनती $= {}^7P_3 = \dfrac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानों से समझा जा सकता है

$1 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad = 1 \times 7 \times 6 \times 5 = 210$

$\boxed{\uparrow 6}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

(स्थिर)

अब, दूसरे भाग में हम देखते हैं कि केवल वे ही संख्याएँ 5 से विभाज्य होंगी जिनके अंत में अंक 5 होगा। अतः 4 अंकों वाली संख्याओं में अंक 6 आरंभ के स्थान पर तथा अंक 5 अंतिम स्थान पर निश्चित होंगे। इस प्रकार हमें शेष 6 अंकों में से केवल 2 अंकों को ही चुनकर व्यवस्थित करना है।

अतः अभीष्ट संख्याओं की गिनती $= {}^6P_2 = \dfrac{6!}{4!} = 6 \times 5 = 30$

इसे खंड बनाकर निम्नानुसार आसानी से समझा जा सकता है

$1 \quad 6 \quad 5 \quad 1 \quad = 1 \times 6 \times 5 \times 1 = 30$

$\boxed{\uparrow 6}\boxed{}\boxed{}\boxed{\uparrow 5}$

(स्थिर) (स्थिर)

6.06 उन वस्तुओं के क्रमचय जिनमें सभी भिन्न नहीं हों
(Permutations of those objects in which not all distinct)

प्रमेय 2: माना कि कुल n वस्तुएँ हैं, जिनमें p वस्तुएँ एक प्रकार की, q वस्तुएँ दूसरे प्रकार की, r वस्तुएँ तीसरे प्रकार की तथा शेष वस्तुएँ भिन्न–भिन्न प्रकार की हो, तो सभी को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले क्रमचयों की संख्या होगी:

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

प्रमाण: माना कि हमारे पास कुल n वस्तुएँ हैं। उनमें से p एक प्रकार की, q दूसरे प्रकार की, r तीसरे प्रकार की व शेष भिन्न–भिन्न हैं। मानाकि अभीष्ट क्रमचयों की संख्या x है। यदि इन क्रमचयों में से एक क्रमचय लें और यदि p समान वस्तुओं को p असमान वस्तुओं से बदल दें, तो अब $p!$ नये क्रमचय बनेंगे।

इसी प्रकार क्रमशः q तथा r समान वस्तुओं को q तथा r असमान वस्तुओं से बदल दें, तो अब $q!$ तथा $r!$ नये क्रमचय बनेंगे।

इस प्रकार, यदि उपर्युक्त प्रतिस्थान एक साथ किए जाए, तो हमें प्रत्येक क्रमचय से $p! \times q! \times r!$ क्रमचय प्राप्त होंगे। इसलिए x क्रमचयों से कुल $x \times p! \times q! \times r!$ क्रमचय प्राप्त होंगें।

अब, क्योंकि वस्तुएँ भिन्न–भिन्न हो गई हैं और सभी को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले क्रमचयों की संख्या $n!$ है अतः

$$x \times p! \times q! \times r! = n! \quad \therefore \quad x = \frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

टिप्पणी: माना कि कुल n वस्तुएँ हैं, जिनमें p वस्तुएँ एक प्रकार की, q वस्तुएँ दूसरे प्रकार की, r वस्तुएँ तीसरे प्रकार की तथा $p+q+r = n$ हो, तो सभी को एक साथ लेकर बनाए जाने वाले क्रमचयों की संख्या भी उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार ही होगी:

6.07 वृत्तीय क्रमचय (Circular permutations) :

अभी तक हमनें वस्तुओं के एक पंक्ति में क्रमचयों के बारे में अध्ययन किया हैं इस तरह के क्रमचयों को सामान्यतः रैखिक क्रमचय कहते हैं। यदि हम n विभिन्न वस्तुओं को एक वृत्त के चारों ओर व्यवस्थित करें तो ऐसे विन्यास को वृत्तीय (चक्रीय) क्रमचय कहते हैं। प्रत्येक रैखिक क्रमचय में एक आरंभ तथा एक अंत होता है, लेकिन वृत्तीय क्रमचय में ऐसा नहीं है। इस प्रकार, एक वृत्तीय

क्रमचय में किसी एक वस्तु को स्थिर मानकर शेष वस्तुओं को रैखिक क्रमचय की तरह व्यवस्थित करते हैं।

प्रमेय 3: n विभिन्न वस्तुओं के वृत्तीय क्रमचयों की संख्या $(n-1)!$ होती है।

प्रमाण: वृत्तीय क्रमचय में कोई सिरा नहीं होता हैं इसलिए वृत्तीय क्रमचय में हमें केवल वस्तुओं की सापेक्ष स्थिति पर ध्यान देना पड़ता हैं मानाकि हमें n वस्तुओं को एक वृत्त के आकार (जैसे गोल मेज इत्यादि) में व्यवस्थित करना है। n वस्तुओं में से सर्वप्रथम एक वस्तु लेकर उसे एक निश्चित स्थान पर रखते हैं। फिर शेष $(n-1)$ वस्तुओं को इस वस्तु के सापेक्ष $(n-1)!$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं।

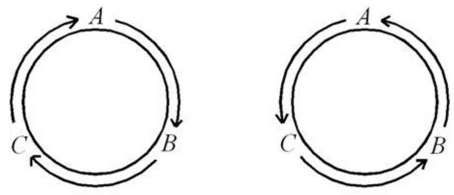
अतः n वस्तुओं को एक साथ लेने पर वृत्तीय क्रमचयों की संख्या $(n-1)!$ होगी।

टिप्पणी: उपर्युक्त प्रमेय में दक्षिणावर्त क्रम *(clockwise order)* तथा वामावर्त क्रम *(anticlockwise order)* के विन्यास को भिन्न–भिन्न क्रमचय माना गया है।

6.08 दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रमचयों में अंतर
(Difference between clockwise and anticlockwise permutations)

A, B, C अक्षरों के निम्नलिखित 6 रैखिक क्रमचय बनते हैं:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA



दक्षिणावर्त (Clockwise)   वामावर्त (Anticlockwise)

चित्र 6.1

(i) ABC, BCA, CAB के अवयवों का एक ही क्रम (दक्षिणावर्त क्रम) है। अतः इन तीन रैखिक क्रमचयों को चक्रीय क्रमचयों में एक ही क्रमचय माना जाता है।

(ii) ACB, CBA, BAC के अवयवों का एक ही क्रम (वामावर्त क्रम) है। अतः इन तीन रैखिक क्रमचयों को चक्रीय क्रमचयों में एक ही क्रमचय माना जाता है।

अतः A, B, C अक्षरों के कुल चक्रीय क्रमचयों की संख्या 2 है। यदि दक्षिणावर्त एवं वामावर्त चक्रीय क्रमचयों में कोई अंतर नहीं माना जाए, तो A, B, C अक्षरों के कुल चक्रीय क्रमचयों की संख्या 1 है।

अतः यदि दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रमचयों को एक ही समझा जाए, तो n विभिन्न वस्तुओं में से सभी वस्तुएँ एक साथ लेकर बनाए जाने वाले क्रमचयों की संख्या $\frac{(n-1)!}{2}$ होगी।

टिप्पणी : मणियों या फूलों के हार में दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रम में अंतर नहीं किया जा सकता है। अतः यहाँ दोनों क्रम में अंतर नहीं मानते हैं। इसलिए चक्रीय क्रमचयों की संख्या में दो का भाग देते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 15: **MATHEMATICS** शब्द के अक्षरों से बने विभिन्न शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ पर कुल अक्षर 11 है। इनमें से दो M, दो A व दो T के अक्षर है। अतः अभीष्ट संख्या होगी:

$$\frac{11!}{2!\,2!\,2!}$$

उदाहरण 16: 7 व्यक्ति एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं?

हल: सर्वप्रथम हम एक व्यक्ति का मेज के पास एक स्थान निश्चित करते हैं। फिर शेष 6 व्यक्तियों को 6! विधियों से बैठा सकते हैं। अतः अभीष्ट संख्या होगी

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

उदाहरण 17: 7 विविध मोती एक छल्ले में कितने प्रकार से पिरोए जा सकते हैं?

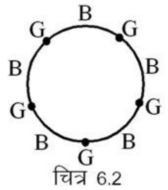
हल: यहाँ पर यदि मोती दक्षिणावर्त दिशा में पिराए जाते हैं, तो छल्ले को दूसरी ओर बदलने पर वे वामावर्त दिशा में हो जाते हैं। इस प्रकार दक्षिणावर्त और वामावर्त दिशाओं से एक ही क्रम प्राप्त होता है। अतः विन्यासों की कुल संख्या होगी

$$\frac{(7-1)!}{2}=\frac{6!}{2}=\frac{720}{2}=360$$

उदाहरण 18: 10 व्यक्ति गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, जबकि सदैव एक से पड़ौसी नहीं हो।

हल: 10 व्यक्तियों को गोल मेज के चारों ओर बैठाने की कुल विधियाँ 9! हैं, लेकिन यहाँ दक्षिणावर्त क्रम एवं वामावर्त क्रम अलग–अलग नहीं रखे जा सकते है (चूँकि किसी एक दक्षिणावर्त क्रम की व्यवस्था के संगत वामावर्त क्रम की व्यवस्था में पड़ौसी एक से ही रहेंगे) हैं। अतः अभीष्ट संख्या $9!/2$ होगी।

उदाहरण 19: 5 लड़के और 5 लड़कियों को कितने प्रकार से एक गोल मेज के चारों ओर बैठाया जा सकता है, जबकि कोई दो लड़कियां एक साथ न बैठें?



चित्र 6.2

हल: सर्वप्रथम गोल मेज के चारों ओर लड़कों को बिठाते हैं। 5 लड़कों को मेज के चारों ओर बिठाने की विधियाँ 4! हैं। लड़कों के मध्य 5 खाली स्थानों पर लड़कियों को बिठाने की विधियाँ 5! हैं। अतः अभीष्ट संख्या $4! \times 5!$ होगी।

उदाहरण 20: BHARAT शब्द के अक्षरों से कुल कितने शब्द बनाए जा सकते है, जिनमें **B** और **H** साथ–साथ नहीं आते हों?

हल: BHARAT शब्द में कुल 6 अक्षर हैं। इनमें A के दो अक्षर हैं। अतः BHARAT शब्द के अक्षरों से बनाए जाने वाले शब्दों की कुल संख्या $=6!/2!=360$

B तथा H को साथ–साथ रखने पर, इनको एक अक्षर (BH) की तरह मान सकते हैं। अतः हमारे पास 5 अक्षर ही रहेंगे जिनमें A के दो अक्षर हैं। अक्षर (BH) में भी दो अक्षर हैं, जिनको (BH) या (HB) ले सकते हैं, अर्थात् इसे भी 2! विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। इस प्रकार B तथा H के साथ–साथ आने वाले शब्दों की संख्या होगी:

$$2!\times 5!/2!=120$$

इसलिए B तथा H के साथ–साथ नहीं आने वाले शब्दों की संख्या

$$=360-120=240$$

प्रश्नमाला 6.1

1. n का मान ज्ञात कीजिए, जबकि:
   (i) ${}^{n-1}P_3 : {}^{n+1}P_3 = 5 : 12$ (ii) ${}^{n}P_6 = 10.{}^{n}P_5$
   (iii) ${}^{56}P_{n+6} : {}^{54}P_{n+3} = 30800$ (iv) ${}^{6+n}P_2 : {}^{6-n}P_2 = 56 : 12$
2. ALLAHABAD शब्द के अक्षरों से बने विभिन्न शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए।
3. TRIANGLE शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं? इनमें से कितने शब्द T से आरंभ एवं E पर समाप्त होते हैं?
4. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से 3000 तथा 4000 के मध्य ऐसी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है, जो 5 से विभाज्य हैं।
5. अंको 0, 1, 2, 3, 4, 5 से छः अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है?
6. अंको 1, 2, 3, 4, 5, 6 से 1000 से छोटी तीन अंकों को कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती है, जबकि अंको की पुनरावृति नहीं हो?
7. एक समिति के 15 सदस्य एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, जबकि सचिव, अध्यक्ष के एक ओर तथा उपसचिव दूसरी ओर बैठता है?
8. एक रेलवे लाइन पर 15 स्टेशन हैं। इसके लिए एक श्रेणी के कितने विभिन्न प्रकार के टिकट छपवाने चाहिए कि किसी भी स्टेशन से एक व्यक्ति इस लाइन के किसी अन्य स्टेशन का टिकट खरीद सके?
9. एक माला बनाने में 10 विभिन्न मोती कितने प्रकार से पिरोए जा सकते हैं, जबकि उनमें से चार विशेष मोती कभी भी पृथक नहीं रहे?
10. अंको 0, 1, 2, . . ., 9 से ऐसी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जो 6000 या इससे बड़ी तथा 7000 से छोटी हो और 5 से विभाज्य हो। जबकि किसी भी अंक की कितनी भी बार पुनरावृत्ति हो सकती है?
11. शब्द SCHOOL के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं, जबकि दोनों O साथ–साथ नहीं आते हों।

6.09 संचय (Combinations) :

दी हुई वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी को एक साथ लेकर भिन्न–भिन्न क्रमों या विन्यासों (arrangement) में रखने के बारे में खड 6.04 में अध्ययन किया जा चुका है। कई बार हम दी हुई वस्तुओं में से कुछ वस्तुओं के केवल चयन में इच्छुक होते हैं चयन की गई वस्तुओं के क्रम में हमारी कोई रूचि नहीं होती है। उदाहरण के लिए एक विद्यार्थी पुस्तकालय में एक बार में तीन पुस्तकों का चयन करना चाहता है, एक कम्पनी 10 व्यक्तियों में से 3 का चयन करना चाहती हैं।

परिभाषा : दी हुई वस्तुओं में से कुछ अथवा सभी को एक साथ लेकर, (क्रम का ध्यान रखे बिना) बनने वाले समूहों में से प्रत्येक समूह को संचय कहते हैं। n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चयन को ${}^nC_r$ या $C(n,r)$ से प्रदर्शित किया जाता है। स्पष्टतः ${}^nC_r$ परिभाषित होगा, यदि $0 \le r \le n$.

उदाहरणार्थ : मान लों हम तीन वस्तुओं A, B तथा C में से दो वस्तुओं का चयन करना चाहते हैं, तो निम्नलिखित तीन संचय बनेंगेः

A, B; B, C; C, A.

यहाँ हम इनको निम्नलिखित प्रकार से नहीं लिखेंगेः

A,B; B,A; B,C,; C,B; C,A; A,C.

क्योंकि यहाँ हमारा उद्देश्य मात्र चयन का है, न कि इनके क्रम का।

क्रमचय एवं संचय में अंतरः

संचय में जितनी वस्तुएँ लेनी होती है, दी हुई वस्तुओं में से उतनी वस्तुओं को लेकर समूह बनाए जाते हैं, जबकि क्रमचय में प्रत्येक समूह की वस्तुओं के संभव विन्यास भी बनाए जाते हैं। क्रमचय में क्रम का ध्यान रखना बहुत जरूरी है, लेकिन संचय में क्रम का ध्यान नहीं रखा जाता है केवल समूह लेते हैं। जैसे कि संचय में AB तथा BA को एक ही समूह माना जाता है, जबकि क्रमचय में ये भिन्न–भिन्न माने जाते हैं। इस प्रकार क्रमचयों की संख्या संचयों की संख्या से अधिक होती है।

साधारणतया संचय निकालने की विधि समूह बनाने में, टीमें बनाने में, समितियाँ बनाने में, अक्षरों से शब्द बनाने इत्यादि में काम लाई जाती है।

6.10 प्रमेय 4: n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं को लेकर बनाए जाने वाले संचयों की संख्या होती हैः

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r!} \text{ अर्थात् } {}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

प्रमाणः यहाँ पर प्रत्येक संचय में r विभिन्न वस्तुएँ हैं और प्रत्येक समूह की r वस्तुएँ परस्पर $r!$ विधियों से व्यवस्थित हो सकती है। अतः ${}^nC_r$ संचयों की समस्त व्यवस्थाएँ (क्रमचय) $r! \times {}^nC_r$ होगी। अर्थात् n वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं के क्रमचयों की संपूर्ण संख्या $r! \times {}^nC_r$ होगी। लेकिन यह संख्या ${}^nP_r$ के बराबर भी होती है। अतः

$$r! \times {}^nC_r = {}^nP_r$$

या $${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \qquad \left[\because {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\right]$$

टिप्पणी 1. $${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

या $${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)(n-r)(n-r-1).....3.2.1}{\{(n-r)(n-r-1).....3.2.1\}\{1.2.3.....r\}}$$

या $${}^nC_r = \frac{n(n-1)......(n-r+1)}{1.2......r}$$

2. $${}^nC_n = \frac{n!}{(n-n)!\,n!} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1 \qquad [\because 0! = 1]$$

तथा $${}^nC_0 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1 \qquad \therefore \quad {}^nC_n = {}^nC_0 = 1$$

6.11 ^nC_r के गुणधर्म (Properties of ^nC_r) :

गुणधर्म I : $^nC_r = {^nC_{n-r}} \quad (0 \le r \le n)$

प्रमाणः दक्षिण पक्ष $= {^nC_{n-r}} = \dfrac{n!}{\{n-(n-r)\}!\,(n-r)!} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = {^nC_r} =$ वाम पक्ष

गुणधर्म II : $^nC_r + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r} \quad (0 \le r \le n)$

प्रमाणः वाम पक्ष
$$= {^nC_r} + {^nC_{r-1}}$$
$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,\{n-(r-1)\}!}$$
$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$
$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right)$$
$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left\{\frac{n+1}{r(n-r+1)}\right\}$$
$$= \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!} = {^{n+1}C_r} = \text{दक्षिण पक्ष}$$

गुणधर्म III : $^nC_x = {^nC_y} \Rightarrow x = y$ या $x + y = n$

प्रमाणः
$$^nC_x = {^nC_y}$$
$\Rightarrow$ $^nC_x = {^nC_y} = {^nC_{n-y}}$ $\quad$ [$\because$ $^nC_y = {^nC_{n-y}}$ गुणधर्म **I** से]

$\Rightarrow$ $x = y$

या $x = n - y$

$\Rightarrow$ $x = y$

या $x + y = n$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 21: व्यंजक $^{47}C_4 + \sum_{j=1}^{5} {^{52-j}C_3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :
$$^{47}C_4 + \sum_{j=1}^{5} {^{52-j}C_3} = {^{47}C_4} + {^{51}C_3} + {^{50}C_3} + {^{49}C_3} + {^{48}C_3} + {^{47}C_3}$$
$$= \left({^{47}C_4} + {^{47}C_3}\right) + {^{48}C_3} + {^{49}C_3} + {^{50}C_3} + {^{51}C_3}$$
$$= \left({^{48}C_4} + {^{48}C_3}\right) + {^{49}C_3} + {^{50}C_3} + {^{51}C_3} \qquad \left[\because\ {^{47}C_4} + {^{47}C_3} = {^{48}C_4}\right]$$
$$= \left({^{49}C_4} + {^{49}C_3}\right) + {^{50}C_3} + {^{51}C_3} \qquad \left[\because\ {^{48}C_4} + {^{48}C_3} = {^{49}C_4}\right]$$
$$= \left({^{50}C_4} + {^{50}C_3}\right) + {^{51}C_3} \qquad \left[\because\ {^{49}C_4} + {^{49}C_3} = {^{50}C_4}\right]$$
$$= {^{51}C_4} + {^{51}C_3} \qquad \left[\because\ {^{50}C_4} + {^{50}C_3} = {^{51}C_4}\right]$$
$$= {^{52}C_4} \qquad \left[\because\ {^{51}C_4} + {^{51}C_3} = {^{52}C_4}\right]$$

उदाहरण 22: यदि $^nC_{15} = {}^nC_8$ हो, तो $^nC_{21}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $^nC_{15} = {}^nC_8 \Rightarrow n = 15 + 8 = 23$ $\left[\because {}^nC_x = {}^nC_y \Rightarrow x + y = n\right]$

$\therefore$ $^nC_{21} = {}^{23}C_{21}$

$$= \frac{23!}{21!\,(23-21)!} = \frac{23!}{21!\ 2!}$$

$$= \frac{23 \times 22}{2} = 23 \times 11 = 253.$$

उदाहरण 23: यदि $^{10}C_x = {}^{10}C_{x+4}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $^{10}C_x = {}^{10}C_{x+4} \Rightarrow x + x + 4 = 10 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3.$

टिप्पणी: कभी–कभी संचय कुछ प्रतिबंधों के तहत बनाने पड़ते हैं। जैसे:

(i) n विभिन्न वस्तुओं में से r को एक साथ लेकर संचयों की संख्या ज्ञात करना, जबकि p विशेष वस्तुएँ सर्वदा ली जाए। इसमें r वस्तुओं का समूह बनाने के लिए शेष $(n-p)$ वस्तुओं में से केवल $(r-p)$ वस्तुएँ ही चुननी पड़ेंगी। अतः अभीष्ट संख्या $^{n-p}C_{r-p}$ होगी।

(ii) यदि p विशेष वस्तुएँ कभी भी नहीं ली जाए, तो p वस्तुओं को अलग रखकर शेष $(n-p)$ वस्तुओं में से ही r वस्तुएँ चुननी पड़ेंगी। अतः अभीष्ट संख्या $^{n-p}C_r$ होगी।

(iii) कुछ प्रश्नों में संचय तथा क्रमचय दोनों की आवश्यकता पड़ती है। ऐसी स्थिति में पहले उचित संचय बनाते हैं और फिर उन्हें व्यवस्थित करते हैं।

उदाहरण 24: n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: n भुजाओं वाले बहुभुज में n शीर्ष हैं, तो इन शीर्षों मे ंसे दो–दो को मिलाने वाली रेखाओं की संख्या $= {}^nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ होगी। लेकिन इनमें बहुभुज की n भुजाएँ भी शामिल है।

अतः विकर्णों की संख्या $= \dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ होगी।

उदाहरण 25: 5 व्यंजनों एवं 4 स्वरों से 3 व्यंजन तथा 2 स्वर लेकर कुल कितने शब्द बनेंगे?

हल: पहले हम 5 व्यंजनों से 3 व्यंजन एवं 4 स्वरों से 2 स्वरों का चयन करेंगे, जो कि $^5C_3 \times {}^4C_2$ प्रकार से संभव है। अब शब्द बनाने के लिए अक्षरों को भी व्यवस्थित करना होगा तथा प्रत्येक संचय के $2 + 3 = 5$ अक्षर $5!$ विधियों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं। अतः शब्दों की अभीष्ट संख्या $^5C_3 \times {}^4C_2 \times 5!$ होगी।

उदाहरण 26: 8 पुरूषों और 5 महिलाओं में से 6 सदस्यों की समिति बनानी है। यह समिति कितने प्रकार से बनाई जा सकती है, जबकि प्रत्येक समिति में

(i) केवल 2 पुरूष हों **(ii)** केवल 2 महिलाएँ हों

(iii) कम से कम दो महिलाएँ हों **(iv)** कम से कम दो पुरूष हों?

हल: **(i)** 8 पुरूषों में से केवल 2 पुरूष $^8C_2$ प्रकार से चुने जा सकते हैं तथा शेष 4 को 5 महिलाओं में से लेना हैं जो कि $^5C_4$ प्रकार से चुने जा सकते हैं।

अतः अभीष्ट संख्या $= {}^8C_2 \times {}^5C_4 = 28 \times 5 = 140$

(ii) 5 महिलाओं में से केवल 2 महिलाओं को $^5C_2$ प्रकार से चुन सकते हैं तथा शेष 4 को 8 पुरूषों में से लेना है जो कि $^8C_4$ प्रकार से चुने जा सकते हैं।

अतः अभीष्ट संख्या $= {}^5C_2 \times {}^8C_4 = 10 \times 70 = 700$

(iii) कम से कम दो महिलाओं को लेने के लिए निम्नलिखित प्रकार से चुनाव कर सकते हैं:

2 महिलाएँ व 4 पुरूषः 3 महिलाएँ व 3 पुरूष, 4 महिलाएँ व 2 पुरूष
5 महिलाएँ व 1 पुरूष अतः इनका चयन क्रमशः

$^5C_2 \times {^8C_4}$; $^5C_3 \times {^8C_3}$; $^5C_4 \times {^8C_2}$; $^5C_5 \times {^8C_1}$ प्रकार से कर सकते हैं।

अतः अभीष्ट संख्या

$$= {^5C_2} \times {^8C_4} + {^5C_3} \times {^8C_3} + {^5C_4} \times {^8C_2} + {^5C_5} \times {^8C_1}$$
$$= 700 + 560 + 140 + 8 = 1408$$

(iv) उपर्युक्त विधि से कम से कम 2 पुरूष लेकर 6 सदस्यों की समिति बनाने की कुल विधियाँ होंगीः

$$^8C_2 \times {^5C_4} + {^8C_3} \times {^5C_3} + {^8C_4} \times {^5C_2} + {^8C_5} \times {^5C_1} + {^8C_6} = 1436$$

प्रश्नमाला 6.2

1. n का मान ज्ञात कीजिए, जबकिः

   (i) $^{2n}C_3 : {^nC_3} = 11 : 1$ **(ii)** $^{20}C_{n-2} = {^{20}C_{n+2}}$ **(iii)** $^nC_{10} = {^nC_{15}}$

2. $^{50}C_{11} + {^{50}C_{12}} + {^{51}C_{13}} - {^{52}C_{13}}$ का मान ज्ञात कीजिए।
3. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC, CA पर क्रमशः 3, 4 तथा 5 बिन्दु हैं। इन बिन्दुओं से रचित कुल त्रिभुजों की संख्या कितनी होगी?
4. एक संदूक में दो सफेद, तीन काली व चार लाल गेंदें हैं इस संदूक से तीन गेंदें कितनी विधियों से निकाली जा सकती हैं, जिनमें कम से कम एक काली गेंद अवश्य हो?
5. छः विभिन्न रंगों की झंडियों से एक या अधिक लेकर कितने प्रकार से संकेत दिए जा सकते हैं?

   [संकेत : $^6C_1 \times 1! + {^6C_2} \times 2! + {^6C_3} \times 3! + {^6C_4} \times 4! + {^6C_5} \times 5! + {^6C_6} \times 6!$]

6. किसी बहुभुज में विकर्णों की संख्या 44 हैं, तो उसकी भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकों में से 4 अंक लेकर कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जबकि अंक 4 तथा 5 अवश्य विद्यमान हो?
8. छः '+' तथा चार '–' चिह्नों को एक सरल रेखा में कुल कितने प्रकार से रखा जा सकता है कि कोई भी दो '–' के चिह्न पास–पास नहीं आते हों?
9. 8 विद्यार्थियों और 5 प्राध्यापकों में से 5 विद्यार्थियों और 2 प्राध्यापकों की एक कॉलेज परिषद् बनानी है। इस प्रकार की कितनी विभिन्न परिषदें बन सकती हैं?
10. 14 खिलाड़ियों में से क्रिकेट के लिए 11 खिलाड़ियों की एक टोली बनानी है, जिसमें कम से कम 2 गेंदबाज विद्यमान हों, जबकि केवल 4 खिलाड़ी ही गेंद फेंक सकते हैं। यह टोली कितने प्रकार से बनाई जा सकती है?

विविध प्रश्नमाला–6

1. यदि $^nP_{n-2} = 60$ हो, तो n का मान होगाः

   (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 3

2. $^nP_r \div {^nC_r}$ बराबर हैः

   (A) $n!$ (B) $(n-r)!$ (C) $\frac{1}{r!}$ (D) $r!$

3. 5 व्यक्ति एक गोल मेज पर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं?

   (A) 120 (B) 24 (C) 60 (D) 12

4. BHILWARA के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

   (A) $\frac{8!}{2!}$ (B) $8!$ (C) $7!$ (D) $\frac{6!}{2!}$

5. $^{47}C_4 + \sum_{r=1}^{5} {^{52-r}C_3}$ बराबर हैः

   (A) $^{51}C_4$ (B) $^{52}C_4$ (C) $^{53}C_4$ (D) इनमें से कोई नहीं

6. ${}^{61}C_{57} - {}^{60}C_{56}$ का मान है:

(A) ${}^{61}C_{58}$ (B) ${}^{60}C_{57}$ (C) ${}^{60}C_{58}$ (D) ${}^{60}C_{56}$

7. यदि ${}^{15}C_{3r} = {}^{15}C_{r+3}$, तो r बराबर है:

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

8. एक वृत की परिधि पर 6 बिन्दु हैं, इनको मिलाने वाली सरल रेखाओं की संख्या होगी:

(A) 30 (B) 15 (C) 12 (D) 20

9. BHOPAL के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

(A) 124 (B) 240 (C) 360 (D) 720

10. एक वृत की परिधि पर 4 बिन्दु है, इनको मिलाकर कितने त्रिभुज बनाए जा सकते हैं?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

11. यदि ${}^{n}C_9 = {}^{n}C_7$, तो ${}^{n}C_{16}$ ज्ञात कीजिए।

12. n का मान ज्ञात कीजिए।

(i) ${}^{2n}C_2 : {}^{n}C_2 = 12:1$ (ii) ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 11:1$

13. किसी वृत्त पर स्थित 11 बिन्दुओं से होकर जाने वाली जीवाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

14. 52 पत्तों की एक गड्ड़ी में से 5 पत्तों को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या ज्ञात कीजिये यदि प्रत्येक संचय में तथ्यतः एक इक्का है।

15. एक समतल में n बिन्दु हैं, जिनमें m बिन्दु समरेखीय हैं। इन बिन्दुओं को मिलाकर बनाए जाने वाले त्रिभुजों की संख्या कितनी होगी?

16. एक दशभुज में विकर्णों की संख्या ज्ञात कीजिए।

17. एक रेलगाड़ी में 5 सीटे खाली हैं, तो तीन यात्री इन सीटों पर कुल कितने प्रकार से बैठ सकते हैं?

18. 6 लड़कों तथा 4 लड़कियों में से 7 का एक समूह बनाना है। यदि समूह में लड़के बहुसंख्यक रहे, तो समूह कितने प्रकार से बनाया जा सकता है?

19. 8 व्यक्तियों के सम्मेलन में यदि प्रत्येक व्यक्ति एक दूसरे से एक ही बार हाथ मिलाता हो, तो हाथ मिलने की कुल संख्या कितनी होगी?

20. 6 पुरूष एवं 6 महिलाएँ एक गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, जबकि कोई भी दो महिलाएँ साथ–साथ नहीं बैठें?

21. ASSASSINATION शब्द के अक्षरों के कितने विन्यास बनाए जा सकते हैं, जबकि सभी 'S' एक साथ रहें?

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. **गुणन का सिद्धांत :** यदि एक कार्य m विधियों से किया जा सके तथा इसको करने की प्रत्येक विधि के लिए यदि दूसरे कार्य करने की n विधियाँ हो, तो सम्पूर्ण कार्य $m \times n$ विधियों से होगा।
2. **योग का सिद्धांत :** यदि एक कार्य m तथा n विधियों से किया जा सके एवं दोनों विधियों से एक साथ कार्य करना संभव नहीं हो, तो संपूर्ण कार्य $m + n$ विधियों से होगा।
3. **क्रमचय :** दी हुई वस्तुओं में से कुछ या सभी को लेकर भिन्न विन्यासों, जिनमें क्रम को महत्व दिया हो, को क्रमचय कहते हैं।
4. $n! = n(n-1)(n-2).....3.2.1$; जहाँ $n \in N$ $0! = 1$; $(-n)!$ अपरिभाषित हैं।
5. n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं के चयन के क्रमचयों की संख्या $= {}^{n}P_r = n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$ होगी।

6. ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$; ${}^nP_n = n!$

7. यदि कुल n वस्तुएँ हैं, जिनमें से p एक प्रकार की, q दूसरे प्रकार की, r तीसरे प्रकार की तथा अन्य भिन्न–भिन्न हैं (या $p+q+r=n$), तो कुल क्रमचयों की संख्या होगीः

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

8. n विभिन्न वस्तुओं के वृत्तीय क्रमचयों की संख्या $(n-1)!$ होगी। यदि दक्षिणावर्त तथा वामावर्त क्रमचयों को एक ही समझा जाए (जैसे मणियों या फूलों के हार में) तो क्रमचयों की संख्या $\frac{(n-1)!}{2}$ होगी।

9. **संचय :** दी हुई वस्तुओं में से कुछ या सभी को एक साथ लेकर, क्रम का ध्यान नहीं रखते हुए, बनने वाले विभिन्न समूहों को संचय कहते हैं।

10. n विभिन्न वस्तुओं में से एक साथ r वस्तुओं को लेकर बनाए जाने वाले संचयों की संख्या होती हैः

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

11. ${}^nC_n = {}^nC_0 = 1$; ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$; ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$;

${}^nC_x = {}^nC_y \Rightarrow x = y$ या $x + y = n$

12. n भुजाओं वाले बहुभुज में विकर्णों की संख्या $\frac{n(n-3)}{2}$ होगी।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 6.1

1. (i) 8 (ii) 15 (iii) 41 (iv) 2

2. $\frac{9!}{2!4!}$ 3. 40320, 720 4. 12

5. 600 6. ${}^6P_3 = \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3} = 120$ 7. $12! \times 2!$

8. 210 10. 200 11. $\frac{6!}{2!} - 5! = 240$

प्रश्नमाला 6.2

1. (i) 6 (ii) 10 (iii) 25

2. 0 3. 205 4. 64 5. 1956

6. 11 7. 144 8. 35 9. 560 10. 360

विविध प्रश्नमाला 6

(1) C (2) D (3) B (4) A (5) B (6) B

(7) C (8) B (9) D (10) A

11. 1 12. (i) 5 ; (ii) 6 13. 55 14. 778320

15. ${}^nC_3 - {}^mC_3$ 16. 35 17. 60 18. 100

19. ${}^8C_2 = 28$ 20. $5! \times 6! = 86400$ 21. 151200

7

द्विपद प्रमेय
(Binomial Theorem)

7.01 प्रस्तावना (Introduction):

व्यंजक $(a+b)^n$ के प्रसार की जानकारी प्राचीन भारतीय गणितज्ञों को थी। तीसरी शताब्दी ई॰ पू॰ पिंगल ने गुणांकों के विन्यास का एक आरेख रूप प्रदान किया था, जिसे मेरूप्रस्त्र कहते थे। सोलहवीं शताब्दी में **वामवेली** ने भी $(a+b)^n, n \leq 7$ तक के प्रसार के गुणांक ज्ञात किये थे। 10 घात तक के गुणांकों की जानकारी भी सत्रहवीं शताब्दी के प्रारंभ में **आत्रेद** ने दी थीं।

इसके बाद फ्रांसीसी गणितज्ञ बी, पास्कल ने द्विपद प्रसार के गुणांकों को ज्ञात करने के लिए एक त्रिभुज का निर्माण किया जिसको पास्कल त्रिभुज कहते हैं, जो निम्नलिखित प्रकार का हैः

पास्कल त्रिभुज

घात	गुणांक
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1
n = 6	1 6 15 20 15 6 1
n = 7	1 7 21 35 35 21 7 1

पास्कल त्रिभुज में प्रत्येक पंक्ति के प्रारंभ और अंत में 1 हैं। प्रारंभ और अंत में समान दूरी पर स्थित संख्याएँ बराबर हैं किसी भी पंक्ति की कोई भी संख्या उससे ऊपर वाली पंक्ति की उन दो संख्याओं को जोड़ने से प्राप्त होती है, जो संख्या के बायें और दायें स्थित है।

7.02 द्विपद व्यंजक (Binomial expression) :

दो पद वाला कोई भी बीजीय व्यंजक, द्विपद व्यंजक अथवा केवल द्विपद कहलाता है। दोनों पद परस्पर धन अथवा ऋण चिह्न द्वारा जुड़े होते हैं।

उदाहरणार्थ :

(i) $x+a$, जहाँ x प्रथम पद तथा a द्वितीय पद है।

(ii) $x^2 - 9$ आदि

द्विपद प्रमेय (Binomial theorem) :

जिस सूत्र के द्वारा किसी द्विपद व्यंजक के किसी भी घात का विस्तार (expansion) एक श्रेणी के रूप में किया जाता है, उस सूत्र को द्विपद प्रमेय कहते हैं।

द्विपद गुणांक (Binomial coefficient) :

द्विपद व्यंजक $(x+a)^n$ के विस्तार में x की विभिन्न घातों के गुणांक द्विपद गुणांक कहलाते हैं।

7.03 धन पूर्णांक घाताँक के लिए द्विपद प्रमेय (Binomial theorem for positive index)

$$(x+a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 + \dots + {}^nC_r\, x^{n-r}a^r + \dots + {}^nC_n\, a^n$$

उपपत्ति : इस प्रमेय को हम गणितीय आगमन सिद्धांत से सिद्ध करेंगे।

$$(x+a)^1 = x+a = {}^1C_0\, x^1 + {}^1C_1\, x^{1-1}a \qquad (1)$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$= {}^2C_0\, x^2 + {}^2C_1\, x^{2-1}a + {}^2C_2\, x^{2-2}a^2 \qquad (2)$$

(1) तथा (2) से स्पष्ट है कि प्रमेय $n = 1$ एवं 2 के लिए सत्य है। माना कि प्रमेय किसी धन पूर्णांक $n = m$ के लिए सत्य है।

तब, $$(x+a)^m = {}^mC_0\, x^m + {}^mC_1\, x^{m-1}a + {}^mC_2\, x^{m-2}a^2 + \dots + {}^mC_r\, x^{m-r}a^r + \dots + {}^mC_m a^m \qquad (3)$$

दोनों पक्षों को $(x+a)$ से गुणा करने पर,

$$(x+a)(x+a)^m = (x+a)\left[{}^mC_0\, x^m + {}^mC_1\, x^{m-1}a + {}^mC_2\, x^{m-2}a^2 + \dots + {}^mC_r\, x^{m-r}a^r + \dots + {}^mC_m\, a^m\right]$$

$$(x+a)^{m+1} = x\left[{}^mC_0\, x^m + {}^mC_1\, x^{m-1}a + {}^mC_2\, x^{m-2}a^2 + \dots + {}^mC_r\, x^{m-r}a^r + \dots + {}^mC_m\, a^m\right] +$$

$$a\left[{}^mC_0\, x^m + {}^mC_1\, x^{m-1}a + {}^mC_2\, x^{m-2}a^2 + \dots + {}^mC_r\, x^{m-r}a^r + \dots + {}^mC_m\, a^m\right]$$

$$= {}^mC_0\, x^{m+1} + \left({}^mC_1 + {}^mC_0\right)x^m a + \left({}^mC_2 + {}^mC_1\right)x^{m-1}a^2$$

$$+\left({}^mC_3 + {}^mC_2\right)x^{m-2}a^3 + \dots + \left({}^mC_r + {}^mC_{r-1}\right)x^{m-r+1}a^r + \dots + {}^mC_m\, a^{m+1}$$

$$\because \quad {}^mC_1 + {}^mC_0 = {}^{m+1}C_1,$$

$${}^mC_2 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_2,$$

....

$${}^mC_r + {}^mC_{r-1} = {}^{m+1}C_r$$

एवं $${}^mC_m = {}^{m+1}C_{m+1} = {}^mC_0 = {}^{m+1}C_0 = 1$$

अतः $$(x+a)^{m+1} = {}^{m+1}C_0\, x^{m+1} + {}^{m+1}C_1\, x^m a + {}^{m+1}C_2\, x^{m-1}a^2 + \dots +$$

$${}^{m+1}C_r\, x^{m-r+1}a^r + \dots + {}^{m+1}C_{m+1}\, a^{m+1} \qquad (4)$$

(4) से स्पष्ट है कि प्रमेय $n = m+1$ के लिए भी सत्य है। अतः गणितीय आगमन सिद्धांत से यह प्रमेय प्रत्येक धन पूर्णांक के लिए सत्य है। अर्थात् n कोई धनात्मक पूर्णांक हो, तब

$$(x+a)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 + \dots + {}^nC_r\, x^{n-r}a^r + \dots + {}^nC_n\, a^n$$

7.04 द्विपद प्रमेय के अन्य महत्त्वपूर्ण रूपः (Various important forms of binomial theorem)

$$(x+a)^n = x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 + \dots + {}^nC_r\, x^{n-r}a^r + \dots + a^n \qquad (1)$$

(1) में a के स्थान $(-a)$ प्रतिस्थापित करने पर

$$(x-a)^n = x^n - {}^nC_1\, x^{n-1}a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 - \dots + (-1)^r\, {}^nC_r\, x^{n-r}a^r + \dots + (-1)^n a^n \qquad (2)$$

(1) में a तथा x को परस्पर बदलने पर,

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \dots + {}^nC_r\, a^{n-r}x^r + \dots + x^n \qquad (3)$$

(3) में x के स्थान पर $(-x)$ रखने पर,

$$(a-x)^n = a^n - {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \ldots + (-1)^r a^{n-r}x^r + \ldots + (-1)^n x^n \qquad (4)$$

(1) में $x = 1$ तथा $a = x$ रखने पर,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^r + \ldots + x^n \qquad (5)$$

(1) में $x = 1$ तथा $a = -x$ रखने पर,

$$(1-x)^n = 1 - {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 - \ldots + (-1)^r\, {}^nC_r\, x^r + \ldots + (-1)^n x^n \qquad (6)$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: द्विपद प्रमेय से $(2x+3y)^5$ का प्रसार कीजिए।

हल : यहाँ प्रथम पद = $2x$, द्वितीय पद = $3y$, तथा $n = 5$ है। अतः

$$(2x+3y)^5 = (2x)^5 + {}^5C_1(2x)^4(3y) + {}^5C_2(2x)^3(3y)^2 + {}^5C_3(2x)^2(3y)^3 + {}^5C_4(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$

$$= (2x)^5 + 5(2x)^4(3y) + 10(2x)^3(3y)^2 + 10(2x)^2(3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5.$$

उदाहरण 2: $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^4$ का प्रसार कीजिए।

हल: $$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^4 = (2x)^4 + {}^4C_1(2x)^3\left(\frac{1}{x}\right) + {}^4C_2(2x)^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^4C_3(2x)\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$= (2x)^4 + 4(2x)^3\left(\frac{1}{x}\right) + 6(2x)^2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 4(2x)\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$= 16x^4 + 32x^2 + 24 + \frac{8}{x^2} + \frac{1}{x^4}.$$

उदाहरण 3: $(1+\sqrt{5})^5 + (1-\sqrt{5})^5$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $$(1+\sqrt{5})^5 = 1 + {}^5C_1(\sqrt{5}) + {}^5C_2(\sqrt{5})^2 + {}^5C_3(\sqrt{5})^3 + {}^5C_4(\sqrt{5})^4 + (\sqrt{5})^5$$

$$= 1 + 5\sqrt{5} + 50 + 50\sqrt{5} + 125 + 25\sqrt{5} \qquad (1)$$

तथा $$(1-\sqrt{5})^5 = 1 - {}^5C_1(\sqrt{5}) + {}^5C_2(\sqrt{5})^2 - {}^5C_3(\sqrt{5})^3 + {}^5C_4(\sqrt{5})^4 - (\sqrt{5})^5$$

$$= 1 - 5\sqrt{5} + 50 - 50\sqrt{5} + 125 - 25\sqrt{5} \qquad (2)$$

(1) तथा (2) का योग करने पर,

$$(1+\sqrt{5})^5 + (1-\sqrt{5})^5 = 2[1 + 50 + 125]$$

$$= 2[176] = 352$$

उदाहरण 4: द्विपद प्रमेय से $(10\cdot1)^5$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $(10\cdot1)^5 = (10+\cdot1)^5$

$$= (10)^5 + {}^5C_1(10)^4(\cdot1) + {}^5C_2(10)^3(\cdot1)^2 + {}^5C_3(10)^2(\cdot1)^3 + {}^5C_4(10)(\cdot1)^4 + (\cdot1)^5$$

$$= 100000 + 5000 + 100 + 1 + \cdot005 + \cdot00001 = 105101\cdot00501$$

उदाहरण 5: $(x+a)^n$ के विस्तार में यदि **A** विषम पदों का योग तथा **B** सम पदों का योग हो, तो सिद्ध कीजिए:

(i) $\left(x^2-a^2\right)^n = A^2 - B^2$, **(ii)** $(x+a)^{2n} - (x-a)^{2n} = 4AB$

हलः (i) $(x+a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + {}^nC_3 x^{n-3} a^3 + {}^nC_4 x^{n-4} a^4 + \ldots + a^n$

$= \left[x^n + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + {}^nC_4 x^{n-4} a^4 + \ldots\right] + \left[{}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_3 x^{n-3} a^3 + \ldots\right]$

= [सभी विषम पदों का योग] + [सभी सम पदों का योग]

$= A + B$ (1)

इसी प्रकार, $(x-a)^n = A - B$ (2)

(1) और (2) को गुणा करने पर,

$$(x+a)^n (x-a)^n = (A+B)(A-B)$$

या $\left[(x+a)(x-a)\right]^n = A^2 - B^2$ या $\left(x^2-a^2\right)^n = A^2 - B^2$

(ii) पुनः $(x+a)^{2n} - (x-a)^{2n} = \left[(x+a)^n\right]^2 - \left[(x-a)^n\right]^2$

$$= \left[(x+a)^n + (x-a)^n\right]\left[(x+a)^n - (x-a)^n\right]$$

$$= \left[(A+B)+(A-B)\right]\left[(A+B)-(A-B)\right] = [2A][2B] = 4AB$$

प्रश्नमाला 7.1

निम्न (प्रश्न 1 से 5 तक) में प्रत्येक व्यंजक का प्रसार कीजिये।

1. $(2-x)^3$ 2. $\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{x}{2}\right)^5$ 3. $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 4. $(3x+2y)^4$ 5. $\left(\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{\dfrac{9}{x}}\right)^6$

द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके निम्नलिखित (प्रश्न 6–9) का मान ज्ञात कीजिये।

6. $(96)^3$ 7. $(101)^4$ 8. $(99)^5$ 9. $(1\cdot1)^6$

10. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताइए कौन सी संख्या बड़ी है $(1\cdot1)^{10000}$ या 1000.

11. $(a+b)^4-(a-b)^4$ का विस्तार कीजिए। इसका प्रयोग करके $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4$ का मान ज्ञात कीजिये।

7.05 द्विपद प्रसार में व्यापक पद (General term in binomial expansion)

प्रसार में $(r+1)$ वें पद को व्यापक पद कहते हैं। इसे T_{r+1} से व्यक्त किया जाता है।

अर्थात् $T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r} a^r$

इसमें $r = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ रखकर प्रसार के प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ पद, ... ज्ञात किए जा सकते हैं, जिन्हें क्रमशः $T_1, T_2, T_3, T_4, \ldots$ से व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार, $T_1 = {}^nC_0\, x^n$

$T_2 = {}^nC_1\, x^{n-1} a$

$T_3 = {}^nC_2\, x^{n-2} a^2$

$T_4 = {}^nC_3\, x^{n-3} a^3$

....

धन पूर्णांक घातांक के लिए द्विपद प्रसार से संबंधित महत्त्वपूर्ण जानकारियाँ:

(i) $(x+a)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या, घात से एक अधिक अर्थात् $(n+1)$ होती है।

(ii) प्रसार में x की घात क्रमशः घटती जाती है और a की घात क्रमशः बढ़ती जाती है। प्रत्येक पद मे x और a की घाताकों का योग द्विपद के घातांक (n) के बराबर होता है।

(iii) प्रसार के प्रारंभ और अंत से समान दूरी वाले पदों के गुणांक बराबर होते हैं।

अर्थात् ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1, {}^nC_1 = {}^nC_{n-1}, {}^nC_2 = {}^nC_{n-2}, \ldots\ldots$

${}^nC_r = {}^nC_{n-r}, (1 \le r \le n)$

7.06 $(x+a)^n$ के प्रसार में मध्य पद (Middle term in the expansion of $(x+a)^n$)

1. यदि घात n सम हैं, तो प्रसार में पदों की संख्या विषम होगी, इसलिए मध्य पद एक ही होगा।

$$\text{मध्य पद } = \left(\frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{n+2}{2}\right) = \left[\frac{(n+1)+1}{2}\right]$$

$$= \frac{\text{प्रसार में पदों की संख्या} + 1}{2} \text{ वां पद}$$

2. यदि घात n विषम है, तो प्रसार में पदों की संख्या सम होगी, इसलिए मध्य पद दो होंगे।

$$\text{मध्य पद} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ वां पद तथा } \left(\frac{n+1}{2}+1\right) = \left(\frac{n+3}{2}\right) \text{ वां पद}$$

7.07 द्विपद प्रसार में विशिष्ट घात x^m का गुणांक

(Coefficient of special power x^m in binomial expansion)

माना कि $\left(ax^p \pm \frac{b}{x^q}\right)^n$ के प्रसार में यदि T_{r+1} वें पद में x^m आता है,

तब $T_{r+1} = {}^nC_r \left(ax^p\right)^{n-r} \left(\pm \frac{b}{x^q}\right)^r = {}^nC_r\, a^{n-r} (\pm b)^r x^{np-r(p+q)}$

$\therefore$ $np - r(p+q) = m$ से r का मान ज्ञात करके विशिष्ट पद ज्ञात करते हैं। r सदैव धन पूर्णांक होता है।

इस प्रकार x^m का गुणांक ${}^nC_r\, a^{n-r} (\pm b)^r$ होगा।

यदि विस्तार में x रहित पद ज्ञात करना हो, तब

$$np - r(p+q) = 0 \qquad \therefore \qquad r = \frac{np}{p+q}.$$

7.08 $(a+b+c)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या

Number of terms in the expansion of $(a+b+c)^n$

$\because$ $(a+b+c)^n = \left[(a+b)+c\right]^n$

$$= (a+b)^n + {}^nC_1 (a+b)^{n-1} c + {}^nC_2 (a+b)^{n-2} c^2 + \ldots.. + c^n$$

$\therefore$ $(a+b+c)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या

$= (n+1)$ पद $+\, n$ पद $+\, (n-1)$ पद $+ \ldots\ldots + 1$ पद

$= \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ पद [स. श्रे. के योग सूत्र से]

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 6: $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^8$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

हल: $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^8$ के प्रसार में पदों की संख्या $= 8+1 = 9$ (विषम)

अतः मध्य पद $=\left(\frac{n+2}{2}\right)=\left(\frac{8+2}{2}\right)=5$ वां पद

$$={}^8C_4\left(\frac{a}{2}\right)^4\left(-\frac{b}{3}\right)^4=\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\left(\frac{a}{2}\right)^4\left(\frac{b}{3}\right)^4=\frac{70a^4b^4}{16\cdot 81}=\frac{35a^4b^4}{648}$$

उदाहरण 7: सिद्ध कीजिए कि $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में मध्य पद $\frac{1.3.5......(2n-1)}{n!}2^n x^n$ है।

हल: चूँकि $2n$ सम संख्या है, अतः मध्य पद $\left(\frac{2n+2}{2}\right)$

अर्थात् $(n+1)$ वां पद है।

$(n+1)$ वां पद $=T_{n+1}={}^{2n}C_n\, x^n$

$$=\frac{(2n)!}{n!\,n!}x^n=\frac{\left[(2n)(2n-1)(2n-2).....6.5.4.3.2.1\right]x^n}{n!\,n!}$$

$$=\frac{\left[(2n)(2n-2).....6.4.2\right]\left[(2n-1)(2n-3).....5.3.1\right]}{n!\,n!}x^n$$

$$=\frac{(2)^n\left[n(n-1)(n-2).....3.2.1\right]\left[(2n-1)(2n-3).....5.3.1\right]}{n!\,n!}x^n$$

$$=\frac{(2)^n n!\left[(2n-1)(2n-3)....5.3.1\right]}{n!\,n!}x^n$$

$$=\frac{(2)^n\left[1.3.5......(2n-3)(2n-1)\right]}{n!}x^n=\frac{1.3.5.......(2n-1)}{n!}2^n x^n$$

उदाहरण 8: $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के विस्तार में x^{-17} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि x^{-17}, T_{r+1} पद में आता है। तब

$$T_{r+1}={}^{15}C_r\left(x^4\right)^{15-r}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^r={}^{15}C_r(x)^{60-4r}\frac{(-1)^r}{(x)^{3r}}={}^{15}C_r(-1)^r(x)^{60-7r} \qquad (1)$$

इसमें x की घात -17 होनी चाहिए।

अतः $60-7r=-17$

$7r=77 \Rightarrow r=11$

r का यह मान (1) में रखने पर, x^{-17} का गुणांक $={}^{15}C_{11}(-1)^{11}=-{}^{15}C_4=-\frac{15.14.13.12}{1.2.3.4}=-1365$

उदाहरण 9: $\left(2x^2+\dfrac{1}{2x}\right)^9$ के प्रसार में x रहित पद का मान ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि $(r+1)$ वां पद x रहित है।

$$T_{r+1}={}^9C_r\left(2x^2\right)^{9-r}\left(\frac{1}{2x}\right)^r={}^9C_r\left(2\right)^{9-r}\left(x\right)^{18-2r}\frac{1}{\left(2\right)^r\left(x\right)^r}={}^9C_r\left(2\right)^{9-2r}\left(x\right)^{18-3r}$$

x रहित पद के लिए, x की घात शून्य होती है।

अतः $18-3r=0$ या $r=6$

$\therefore$ x रहित पद $=T_7={}^9C_6(2)^{9-12}=\dfrac{9.8.7}{1.2.3}.\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{21}{2}$

उदाहरण 10: $(1+x)^{20}$ के प्रसार में n वें पद का गुणांक तथा $(n+1)$ वें पद का गुणांक $1:2$ अनुपात में हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हलः
$$T_n={}^{20}C_{n-1}\,x^{n-1} \qquad (1)$$
$$T_{n+1}={}^{20}C_n\,x^n \qquad (2)$$

प्रश्नानुसार, $$\frac{T_n}{T_{n+1}}=\frac{{}^{20}C_{n-1}}{{}^{20}C_n}=\frac{1}{2}$$

या $$\frac{\dfrac{20!}{(n-1)!\,(20-n+1)!}}{\dfrac{20!}{(n)!\,(20-n)!}}=\frac{1}{2}$$

या $$\frac{(n)!\,(20-n)!}{(n-1)!\,(21-n)!}=\frac{1}{2}$$

या $$\frac{n(n-1)!\,(20-n)!}{(n-1)!\,(21-n)(20-n)!}=\frac{1}{2}$$

या $$\frac{n}{21-n}=\frac{1}{2}$$

सरल करने पर, $n=7$

प्रश्नमाला 7.2

1. निम्नलिखित द्विपद प्रसारों में अंकित पद ज्ञात कीजिएः

   (i) $\left(a+2x^3\right)^{17}$ का 5 वां पद **(ii)** $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{3y}{x^2}\right)^{12}$ का 9 वां पद **(iii)** $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{x^2}{2}\right)^9$ का 6 वां पद

2. गुणांक ज्ञात कीजिएः

   (i) $\left(ax-\dfrac{1}{bx^2}\right)^8$ के प्रसार में x^{-7} का **(ii)** $\left(x^4+\dfrac{1}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में x^4 का **(iii)** $\left(a-bx^2\right)^{10}$ के प्रसार में x^6 का

3. निम्नलिखित के प्रसार में x रहित पद ज्ञात कीजिएः

   (i) $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^{12}$ **(ii)** $\left(\sqrt{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)^{10}$, $x>0$ **(iii)** $\left(\sqrt{\dfrac{x}{3}}+\dfrac{3}{2x^2}\right)^{10}$ **(iv)** $\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$

4. निम्नलिखित के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिएः

   (i) $\left(\dfrac{x}{2}+2y\right)^6$ **(ii)** $\left(3a-\dfrac{a^3}{6}\right)^9$ **(iii)** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ **(iv)** $\left(3x-\dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$

5. सिद्ध कीजिए कि यदि n सम हो, तब $(1+x)^n$ के प्रसार में मध्यपद का गुणांक $\frac{1.3.5.....(n-1)}{2.4.6......n}2^n$ होगा। यदि n विषम हो, तो दोनों मध्यपदों का गुणांक $\frac{1.3.5.....n}{2.4.6......(n+1)}2^n$ होगा।

6. यदि $\left(ax+\frac{1}{bx}\right)^{11}$ के प्रसार में x^7 का गुणांक तथा x^{-7} का गुणांक बराबर है तब सिद्ध कीजिएः $ab-1=0$.

7. $(1+y)^n$ के विस्तार में यदि 5 वें, 6 वें तथा 7 वें पदों के गुणांक स. श्रे. में हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

8. $(x+a)^n$ के द्विपद प्रसार के दूसरे, तीसरे और चौथे पद क्रमशः 240, 720 और 1080 है। x, a तथा n ज्ञात कीजिए।

9. यदि $(1+a)^n$ के प्रसार में तीन क्रमागत पदों के गुणांक 1 : 7 : 42 के अनुपात में है तो n का मान ज्ञात कीजिए।

10. m का धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $(1+x)^m$ के प्रसार में x^2 का गुणांक 6 हो।

7.09 द्विपद गुणांकों के गुणधर्म (Properties of binomial coefficients)

$(1+x)^n$ के प्रसार में x की विभिन्न घातों के गुणांक ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ..., {}^nC_n$ द्विपद गुणांक कहलाते हैं। इनको प्रायः $C_0, C_1, C_2, ...C_n$ द्वारा भी व्यक्त करते हैं।

अर्थात् $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + ... + C_nx^n$ [खण्ड 7.04 से]

(i) यदि प्रसार में $x=1$ रखें, तब

$$(1+1)^n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n \quad \Rightarrow \quad 2^n = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n \qquad (1)$$

(ii) यदि प्रसार में $x=-1$ रखें, तब

$$(1-1)^n = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + ... + (-1)^n C_n \quad \Rightarrow \quad 0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + ... + (-1)^n C_n \qquad (2)$$

(1) तथा (2) का योग करने पर,

$$2(C_0 + C_2 + C_4 + ...) = 2^n \quad \Rightarrow \quad C_0 + C_2 + C_4 + ... = 2^{n-1} \qquad (3)$$

पुनः (1) में से (2) को घटाने पर,

$$2(C_1 + C_3 + C_5 + ...) = 2^n \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_3 + C_5 + ... = 2^{n-1} \qquad (4)$$

अतः (3) तथा (4) से

$$C_0 + C_2 + C_4 + ... = C_1 + C_3 + C_5 + ... = 2^{n-1} \qquad (5)$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 11: ${}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + {}^{20}C_3 + ... + {}^{20}C_{20}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः चूँकि ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n = 2^n$ (1)

(1) में $n=20$ रखने पर,

$${}^{20}C_0 + {}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + ... + {}^{20}C_{20} = 2^{20}$$

$$1 + {}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + ... + {}^{20}C_{20} = 2^{20} \qquad [\because {}^{20}C_0 = 1]$$

$${}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + {}^{20}C_3 + ... + {}^{20}C_{20} = 2^{20} - 1$$

उदाहरण 12: यदि $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ द्विपद गुणांक है, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिएः

$$C_0 + 2.C_1 + 3.C_2 + ... + (n+1)\cdot C_n$$

हल: दिया गया व्यंजक

$$= C_0 + 2.C_1 + 3.C_2 + ... + (n+1)C_n$$

$$= (C_0 + C_1 + C_2 + ... + C_n) + (C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 + ...n.C_n)$$

$$= 2^n + \left[{}^nC_1 + 2.{}^nC_2 + 3.{}^nC_3 + n.{}^nC_n\right] = 2^n + \left[n + 2.\frac{n(n-1)}{1.2} + ... + n.1\right]$$

$$= 2^n + \left[n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2} + ... + n\right] = 2^n + n\left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + ... + 1\right]$$

$$= 2^n + n\left[1 + {}^{(n-1)}C_1 + {}^{(n-1)}C_2 + ... + {}^{(n-1)}C_{n-1}\right] = 2^n + n.2^{n-1} = 2^{n-1}(n+2).$$

उदाहरण 13: सिद्ध कीजिए: $C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 + ... + n.C_n = n.2^{n-1}$

हल: वाम पक्ष $C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 + ... + n.C_n$

$$= {}^nC_1 + 2.{}^nC_2 + 3.{}^nC_3 + ... + n.{}^nC_n$$

$$= n + 2.\frac{n(n-1)}{2!} + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + ... + n.1$$

$$= n\left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + ... + 1\right]$$

$$= n\left[{}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 + ... + {}^{n-1}C_{n-1}\right] = n.2^{n-1} = \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण 14: यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में गुणांक $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ हो, तो सिद्ध कीजिए:

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + ... + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

हल: वाम पक्ष

$$= C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + ... + \frac{C_n}{n+1}$$

$$= {}^nC_0 + \frac{{}^nC_1}{2} + \frac{{}^nC_2}{3} + ... + \frac{{}^nC_n}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{3\ .\ 2!} + ... + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[(n+1) + \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4!} + ... + 1\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[{}^{(n+1)}C_1 + {}^{(n+1)}C_2 + {}^{(n+1)}C_3 + {}^{(n+1)}C_4 + ... + {}^{n+1}C_{n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[{}^{(n+1)}C_0 + {}^{(n+1)}C_1 + {}^{(n+1)}C_2 + {}^{(n+1)}C_3 + ... + {}^{n+1}C_{n+1} - {}^{(n+1)}C_0\right]$$

[${}^{(n+1)}C_0$ को जोड़ने तथा घटाने पर]

$$= \frac{1}{n+1}\left[(2)^{n+1} - {}^{(n+1)}C_0\right] = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} = \text{दक्षिण पक्ष}$$

उदाहरण 15: यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में गुणांक क्रमशः $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ हो, तब सिद्ध कीजिए:

$$C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ... + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

हल: $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ... + C_n x^n$ (1)

तथा $(x+1)^n = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_n$ (2)

(1) तथा (2) को गुणा करने पर,

$$(1+x)^{2n} = \left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + ... + C_n x^n\right)\left(C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_n\right)$$

दोनों पक्षों में x^n के गुणाकों की तुलना करने पर,

$$^{2n}C_n = C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ... + C_n^2 \qquad \therefore \qquad C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + ... + C_n^2 = \frac{2n!}{n!\,n!} = \frac{2n!}{(n!)^2}$$

प्रश्नमाला 7.3

1. यदि $(1+x)^n$ के प्रसार के गुणांक क्रमशः $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ हो, तो मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $^8C_1 + {^8C_2} + {^8C_3} + ... + {^8C_8}$ **(ii)** $^8C_1 + {^8C_3} + {^8C_5} + {^8C_7}$

   यदि $(1+x)^n$ के प्रसार के गुणांक क्रमशः $C_0, C_1, C_2, ..., C_n$ हो, तब सिद्ध कीजिए:

2. $C_0 + 3.C_1 + 5.C_2 + ... + (2n+1).C_n = (n+1)2^n$

3. $C_0C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + ... + C_{n-2}C_n = \dfrac{(2n)!}{(n-2)!\,(n+2)!}$

4. $C_0 + 2C_1 + 4C_2 + 6C_3 + ... + 2n\,C_n = 1 + n\,2^n$

5. $\left(1+\dfrac{C_1}{C_0}\right)\left(1+\dfrac{C_2}{C_1}\right)\left(1+\dfrac{C_3}{C_2}\right)......\left(1+\dfrac{C_n}{C_{n-1}}\right) = \dfrac{(n+1)^n}{n!}$

6. यदि $\left(1+x-2x^2\right)^6$ का पूर्ण प्रसार $1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_{12}x^{12}$ द्वारा निरूपित हो, तब सिद्ध कीजिए:

   $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{12} = 31$

7.10 परिमेय घातांक के लिए द्विपद प्रमेय
(Binomial theorem for rational index)

किसी द्विपद में जब घात भिन्नात्मक अथवा ऋणात्मक हो, तब इसका प्रसार तभी संभव है, जबकि द्विपद का प्रथम पद 1 तथा द्वितीय पद संख्यात्मक रूप में एक से छोटा हो। अर्थात् हम द्विपद को सर्वदा $(1+x)^n$ के रूप में रखकर प्रसार करते हैं, जहाँ x का संख्यात्मक मान 1 से कम है अर्थात् $-1 < x < 1$ इस स्थिति में द्विपद का प्रसार का सूत्र निम्नलिखित है:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ... + \frac{n(n-1).....(n-r+1)}{r!}x^r + ...$$

यह प्रसार एक अनंत श्रेणी का रूप लेती है अर्थात् प्रसार में पदों की संख्या अनंत होती है। इसको द्विपद श्रेणी कहते है।

$(x+a)^n$ के प्रसार में यदि x का मान a से कम है। तब $(x+a)^n = a^n\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^n$ तथा यदि a का मान x से कम है, तो $(x+a)^n = x^n\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$ के रूप में बदलकर प्रसार करते हैं।

प्रसार का व्यापक पद:

$$T_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}x^r$$

टिप्पणी: जब n एक भिन्न अथवा ऋण राशि हो, तब ${}^nC_r$ निरर्थक है। अतः अलग–अलग पदों के गुणांक ${}^nC_1, {}^nC_2, ...$ नहीं लिखकर उपर्युक्त प्रकार से लिखना चाहिए।

7.11 कुछ महत्त्वपूर्ण प्रसार (Some important expansions):

$$(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+...+(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)......(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots \quad (1)$$

$$(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+...+(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)......(n+r-1)}{r!}x^r+\cdots \quad (2)$$

$$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+.....+\frac{n(n+1)(n+2)......(n+r-1)}{r!}x^r+\cdots \quad (3)$$

(2) तथा (3) में $n = 1, 2, 3$ रखने पर,

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+.....+x^r+\cdots$$

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+.....+(-1)^r x^r+\cdots$$

$$(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+.....+(-1)^r(r+1)x^r+\cdots$$

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+.....+(r+1)x^r+.....$$

$$(1+x)^{-3}=1-3x+6x^2-10x^3+.....+(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{2!}x^r+\cdots$$

$$(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+.....+\frac{(r+1)(r+2)}{2!}x^r+\cdots$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 16: $(1+x)^{3/2}$ का चार पदों तक प्रसार कीजिए।

हल: $$(1+x)^{3/2}=1+\frac{3}{2}(x)+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{3!}x^3+...$$

$$=1+\frac{3x}{2}+\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right).\frac{1}{6}x^3+\cdots$$

$$=1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\cdots$$

उदाहरण 17: $(2+3x)^{-4}$ का चार पदों तक प्रसार कीजिए।

हल: $$(2+3x)^{-4}=2^{-4}\left[1+\frac{3x}{2}\right]^{-4}$$

$$=2^{-4}\left[1+(-4)\left(\frac{3x}{2}\right)+\frac{(-4)(-4-1)}{2!}\left(\frac{3x}{2}\right)^2+\frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{3!}\left(\frac{3x}{2}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{2^4}\left[1-4\left(\frac{3x}{2}\right)+\frac{4.5}{2!}\left(\frac{3x}{2}\right)^2-\frac{4.5.6}{3!}\left(\frac{3x}{2}\right)^3+.....\right]=\frac{1}{2^4}\left[1-6x+\frac{45}{2}x^2-\frac{135}{2}x^3+\cdots\right]$$

उदाहरण 18: $(1-2x)^{-1/2}$ के प्रसार में व्यापक पद ज्ञात कीजिए।

हल: $(1-x)^{-n}$ के प्रसार में व्यापक पद

$$T_{r+1} = \frac{n(n+1)(n+2).....(n+r-1)}{r!}x^r$$

दिए गए द्विपद में $n = 1/2$ तथा x के स्थान पर $2x$ है। अतः $(1-2x)^{-1/2}$ के विस्तार में व्यापक पदः

$$T_{r+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right).....\left(\frac{1}{2}+r-1\right)}{r!}(2x)^r$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}......\frac{(2r-1)}{2}}{r!}(2)^r x^r = \frac{1.3.5......(2r-1)}{(2)^r\, r!}(2)^r x^r = \frac{1.3.5......(2r-1)}{r!}x^r$$

उदाहरण 19: $(1+x)^{5/2}$ के विस्तार में x^r का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल: $(1+x)^{5/2}$ के विस्तार में व्यापक पदः

$$(r+1) \text{ वां पद} = \frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right).....\left(\frac{5}{2}-r+1\right)}{r!}x^r$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)......\left(\frac{7-2r}{2}\right)}{r!}x^r$$

$$= \frac{(5)(3)(1)(-1)(-3).....(7-2r)}{(2)^r\, r!}x^r$$

$$= (-1)^{r-3}\,\frac{5.3.3.5.7......(2r-7)}{(2)^r\, r!}x^r$$

$\therefore$ x^r का गुणांक $= (-1)^{r-3}\,\dfrac{5.3.3.5.7......(2r-7)}{(2)^r\, r!}$

उदाहरण 20: $\dfrac{(1+3x)^2}{(1-2x)}$ के विस्तार में x^3 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल: $$\frac{(1+3x)^2}{(1-2x)} = (1+3x)^2(1-2x)^{-1} = \left(1+6x+9x^2\right)\left(1+2x+4x^2+8x^3+.....\right)$$

$$= 1+(6+2)x+(9+12+4)x^2+(18+24+8)x^3+.....$$

$\therefore$ x^3 का गुणांक $= (18 + 24 + 8) = 50$

उदाहरण 21: यदि $|x|<1$ हो, तो $\left(1+2x+3x^2+....\right)^{1/2}$ के प्रसार में x^4 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया व्यंजक $\left(1+2x+3x^2+....\right)^{1/2} = \left[(1-x)^{-2}\right]^{1/2} = (1-x)^{-1}$

$\therefore$ $(1-x)^{-1}$ का $(r+1)$ वां पद $= \dfrac{(-1)(-2)(-3)......(-1-r+1)}{r!}x^r = (-1)^r\,\dfrac{1.2.3......r}{r!}.x^r$

अतः x^4 का गुणांक $= (-1)^4\,\dfrac{1.2.3.4}{4!} = 1$

उदाहरण 22: यदि $y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + ...$ हो, तो सिद्ध कीजिएः

$$x = \frac{y}{3} - \frac{1.4}{3^2\ 2!}.y^2 + \frac{1.4.7}{3^3\ 3!}.y^3 - .....$$

हलः दिए गए व्यंजक के दोनों पक्षों में 1 जोड़ने पर

$$1 + y = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + ...\qquad \text{या}\qquad (1 + y) = (1 - x)^{-3}$$

अतः $(1 - x) = (1 + y)^{-1/3}$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)y + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3} - 1\right)}{2!}y^2 + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3} - 1\right)\left(-\frac{1}{3} - 2\right)}{3!}y^3 + ...$$

$$= 1 - \frac{y}{3} + \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 - \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 + ...$$

या $$-x = -\left[\frac{y}{3} - \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 - .....\right]$$

या $$x = \frac{y}{3} - \frac{1.4}{3^2.2!}y^2 + \frac{1.4.7}{3^3.3!}y^3 - .....$$

उदाहरण 23: सिद्ध कीजिएः

$$\left(1 - x + x^2 - x^3 + ...\infty\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + ...\infty\right) = \left(1 + x^2 + x^4 + ...\infty\right)$$

हलः चूँकि $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...\infty$

तथा $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...\infty$

अतः वाम पक्ष $= \left(1 - x + x^2 - x^3 + ...\infty\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + ...\infty\right)$

$$= (1 + x)^{-1}(1 - x)^{-1} = \left(1 - x^2\right)^{-1}$$

$= 1 + x^2 + x^4 + ...\infty =$ दक्षिण पक्ष

प्रश्नमाला 7.4

1. निम्नलिखित द्विपदों का चार पदों तक प्रसार कीजिएः

(i) $\left(1 + x^2\right)^{-2}$ **(ii)** $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{1/2}$ **(iii)** $\left(3 - 2x^2\right)^{-2/3}$ **(iv)** $\frac{1}{\sqrt{5 + 4x}}$

2. निम्नलिखित प्रसारों में वांछित पद ज्ञात कीजिएः

(i) $(1 - 3x)^{-1/3}$ का चौथा पद **(ii)** $(1 + x)^{5/2}$ का सातवां पद

(iii) $(1 + 2x)^{-1/2}$ का आठवां पद

3. निम्नलिखित प्रसारों का व्यापक पद ज्ञात कीजिएः

(i) $\left(a^3 - x^3\right)^{2/3}$ **(ii)** $(1 - 2x)^{-3/2}$ **(iii)** $(1 - x)^{-p/q}$

4. यदि $x < 3$ हो, तो $(3 - x)^{-8}$ के प्रसार में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

5. $\left(a + 2bx^2\right)^{-3}$ के प्रसार में x^6 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

6. $\frac{1 + 3x^2}{\left(1 - x^2\right)^3}$ के प्रसार में x^{10} का गुणांक ज्ञात कीजिए।

7. $\left(1-2x+3x^2-4x^3+.....\right)^n$ के विस्तार में x^r का गुणांक ज्ञात कीजिए तथा यदि $x=\frac{1}{2}$ और $n=1$ हो, तो व्यंजक का मान लिखिए।

8. सिद्ध कीजिए: $\left(1+x+x^2+x^3+.....\right)^2=1+2x+3x^2+.....$

9. सिद्ध कीजिए: $\left(1+x+x^2+x^3+...\right)\left(1+3x+6x^2+...\right)=\left(1+2x+3x^2+...\right)^2$

10. यदि $x=2y+3y^2+4y^3+.....$ है, तो y को x की आरोही घातों की श्रेणी के रूप में व्यक्त कीजिए।

7.12 द्विपद प्रमेय के अनुप्रयोग (Applications of binomial theorem)

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 24: $(1\cdot003)^4$ का मान दशमलव के तीन स्थान तक ज्ञात कीजिए।

हल: $(1\cdot003)^4=(1+\cdot003)^4$

$$=1+4(\cdot003)+\frac{4\times3}{2!}(\cdot003)^2+.....=1+\cdot012+.....$$

$$=1\cdot012 \text{ (अन्य पदों की उपेक्षा करते हुए)}$$

उदाहरण 25: यदि x इतना छोटा हो कि इसके वर्ग तथा उच्च घातों की उपेक्षा की जा सके, तो सिद्ध कीजिए:

$$\frac{\sqrt{(1+2x)}+(16+3x)^{1/4}}{(1-x)^2}=3+\frac{227}{32}x$$

हल: दिया गया व्यंजक $=\dfrac{\sqrt{(1+2x)}+(16+3x)^{1/4}}{(1-x)^2}$

$$=\frac{(1+2x)^{1/2}+2\left(1+\frac{3x}{16}\right)^{1/4}}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{\left[1+\frac{1}{2}(2x)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(2x)^2}{2!}+...\right]+2\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{16}\right)+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(\frac{3x}{16}\right)^2+...\right]}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{\left[1+\frac{1}{2}(2x)\right]+2\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{16}\right)\right]}{(1-x)^2}$$ [x^2 तथा उच्च घातों के पदों की उपेक्षा करते हुए]

$$=\left[(1+x)+2\left(1+\frac{3x}{64}\right)\right](1-x)^{-2}$$

$$=\left(3+\frac{35}{32}x\right)(1+2x+...)$$

$$=3+\frac{35}{32}x+6x$$ (अन्य पदों की उपेक्षा करते हुए)

$$=3+\frac{227}{32}x$$

उदाहरण 26: $(126)^{1/3}$ का मान दशमलव के 5 अंको तक ज्ञात कीजिए।

हल: $(126)^{1/3} = (126)^{1/3} = (125+1)^{1/3} = (5^3+1)^{1/3}$

$$= 5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{1/3} = 5\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{5^3}\right)^2+.....\right]$$

$$= 5\left[1+\frac{1}{3}.\frac{1}{5^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}.\frac{1}{5^6}+.....\right] = 5\left[1+\frac{1}{3}.\frac{1}{5^3}-\frac{1}{9}.\frac{1}{5^6}+.....\right]$$

$$= 5+\frac{1}{3\times 5^2}-\frac{1}{9\times 5^5}+..... = 5+\cdot 01333+\cdot 000035+..... = 5+\cdot 013298 = 5\cdot 01330$$

उदाहरण 27: यदि p और q लगभग बराबर हो, तब सिद्ध कीजिए:

$$\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/n}$$

हल: चूँकि p और q लगभग बराबर है। अतः माना कि $p = q + h$, जहाँ h बहुत छोटी राशि है जिसके वर्ग तथा उच्च घातों को नगण्य मानकर छोड़ा जा सकता है।

अतः वाम पक्ष $= \dfrac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q} = \dfrac{(n+1)(q+h)+(n-1)q}{(n-1)(q+h)+(n+1)q}$

$$= \frac{nq+q+nh+h+nq-q}{nq-q+nh-h+nq+q} = \frac{2nq+nh+h}{2nq+nh-h}$$

$$= \frac{2nq+(n+1)h}{2nq+(n-1)h} = \frac{(2nq)\left[1+\frac{(n+1)h}{2nq}\right]}{(2nq)\left[1+\frac{(n-1)h}{2nq}\right]}$$

$$= \left[1+\frac{(n+1)h}{2nq}\right]\left[1+\frac{(n-1)h}{2nq}\right]^{-1}$$

$$= \left[1+\frac{(n+1)h}{2nq}\right]\left[1-\frac{(n-1)h}{2nq}\right]$$

[h की उच्च घातों को नगण्य मानकर उपेक्षा करते हुए]

$$= 1+\frac{(n+1)h}{2nq}-\frac{(n-1)h}{2nq}$$

$$= 1+\frac{h}{2nq}(n+1-n+1) = 1+\frac{h}{2nq}(2) = 1+\frac{h}{nq}$$

दक्षिण पक्ष $= \left(\dfrac{p}{q}\right)^{1/n} = \left(\dfrac{q+h}{q}\right)^{1/n} = \left(1+\dfrac{h}{q}\right)^{1/n}$

$= 1+\dfrac{h}{nq} =$ वाम पक्ष [h की उच्च घातों को नगण्य मानकर उपेक्षा करते हुए]

प्रश्नमाला 7.5

1. यदि x की तुलना में y बहुत कम हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{(x-y)^n}{(x+y)^n} = 1 - \frac{2ny}{x}$, जहाँ y^2 एवं उच्चघात उपेक्षणीय है।

2. यदि x इतना छोटा है कि x के वर्ग एवं अन्य उच्च्व घात उपेक्षणीय है, तो निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $\frac{(9+2x)^{1/2}(3+4x)}{(1+x)^{1/5}}$ **(ii)** $\frac{\sqrt{1-2x}+(1+3x)^{4/3}}{3+x+\sqrt{4-x}}$ **(iii)** $\frac{(1+\frac{3}{4}x)^{-4}\sqrt{16-3x}}{(8+x)^{2/3}}$

3. मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $\sqrt{30}$ का दशमलव के 4 अंकों तक **(ii)** $(1\cdot 03)^{1/3}$ का दशमलव के 4 अंको तक

   (iii) $\frac{1}{(8\cdot 16)^{1/3}}$ का दशमलव के 4 अंकों तक **(iv)** 126 का घनमूल, दशमलव के 5 अंकों तक

4. यदि x लगभग 1 के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए:

   (i) $\frac{mx^m - nx^n}{m-n} = x^{m+n}$ **(ii)** $\frac{ax^b - bx^a}{x^b - x^a} = \frac{1}{1-x}$

5. यदि p और q लगभग बराबर है, तो सिद्ध कीजिए:

   $$\frac{q+2p}{p+2q} = \left(\frac{p}{q}\right)^{1/3}$$

7.13 द्विपद प्रमेय से श्रेणी का योगफल:
(Sum of series by binomial theorem)

किसी दी हुई द्विपद श्रेणी का योगफल ज्ञात करने के लिए उसके पदों की तुलना निम्नलिखित मानक द्विपद श्रेणी के संगत पदों से करते हैं।

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

सर्वप्रथम दी गई श्रेणी को मानक द्विपद प्रसार में व्यवस्थित करने के लिए द्विपद का प्रथम पद 1 तथा द्वितीय पद x, जहाँ $|x| < 1$ होना चाहिए तथा दी गई श्रेणी द्विपद x की आरोही घातों में व्यवस्थित होनी चाहिए।

इस प्रकार दी गई श्रेणी के द्वितीय तथा तृतीय पदों की मानक द्विपद प्रसार के संगत पदों से तुलना कर n तथा x में दो समीकरण ज्ञात कर लीजिए। इन समीकरणों को हल कर n तथा x के मान ज्ञात कर, इन मानों को मानक द्विपद में रखकर योगफल प्रापत कर लीजिए।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 28: निम्नलिखित श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \ldots$$

हल: श्रेणी $1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \ldots$

मानक श्रेणी $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर,

$$nx = 1/4 \quad (1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.3}{4.8} \quad (2)$$

समीकरण (1) का वर्ग करके (2) में भाग देने पर,

$$\frac{n(n-1)x^2}{2!\ n^2x^2} = \frac{1.3}{4.8}(4)^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(n-1)}{2!\ .\ n} = \frac{1.3.4.4}{4.8} \Rightarrow \frac{(n-1)}{n} = \frac{3}{1}$$

$\Rightarrow 3n = n-1 \Rightarrow n = -1/2$

n का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

अतः श्रेणी का योग $=(1+x)^n = \left[1-\frac{1}{2}\right]^{-1/2} = \left[\frac{1}{2}\right]^{-1/2} = [2]^{1/2} = \sqrt{2}$

उदाहरण 29: $1+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2.5}{3.6}\frac{1}{(2)^2}+\frac{2.5.8}{3.6.9}.\frac{1}{(2)^3}+\ldots$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः श्रेणी $1+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2.5}{3.6}\frac{1}{(2)^2}+\frac{2.5.8}{3.6.9}.\frac{1}{(2)^3}+\ldots$

मानक श्रेणी $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर,

$$nx = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}, \tag{1}$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{2.5}{3.6}.\frac{1}{(2)^2} \tag{2}$$

समीकरण (1) का वर्ग करके (2) में भाग देने पर,

$$\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{x^2}{n^2x^2} = \frac{2.5}{3.6}.\frac{1}{(2)^2}.\frac{3^2.2^2}{2^2.1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{n(n-1)}{2!\ .\ n^2} = \frac{2.5.3.2.3.2}{3.6.2.2.2.2}$$

या $\frac{(n-1)}{n} = \frac{5}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 2n-2 = 5n \quad \Rightarrow \quad n = -2/3$

n का मान समीकरण (1) में रखने पर, $-2/3x = 2/3.1/2 \Rightarrow x = -1/2$

अतः श्रेणी का योग $=(1+x)^n = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2/3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2/3} = (2)^{2/3} \quad (4)^{1/3}$

उदाहरण 30: $2+\frac{5}{2!\ .\ 3}+\frac{5.7}{3!\ .\ 3^2}+\cdots$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः श्रेणी $1+1+\frac{5}{2!\ .\ 3}+\frac{5.7}{3!\ .\ 3^2}+\cdots$

मानक श्रेणी $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर,

$$nx = 1 \tag{1}$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{5}{2!\times 3} \tag{2}$$

समीकरण (1) का वर्ग करके (2) में भाग देने पर,

$$\frac{n(n-1)x^2}{2!\,n^2x^2} = \frac{5}{2!\times 3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1)}{n} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5n = 3n - 3 \Rightarrow 2n = -3 \quad \Rightarrow \quad n = -\frac{3}{2}$$

n का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{-3}{2}x = 1,\ x = -\frac{2}{3}$$

अतः श्रेणी का योग

$$= (1+x)^n = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-3/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3/2} = (3)^{3/2} = (27)^{1/2}$$

उदाहरण 31: यदि $x = \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \ldots$ तो सिद्ध कीजिए: $x^2 + 2x - 2 = 0$

हल:
$$1 + x = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \ldots$$

दक्षिण पक्ष
$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \ldots$$

मानक श्रेणी
$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

दक्षिण पक्ष के पदों की तुलना करने पर,

$$nx = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1.3}{3.6} \qquad (2)$$

समीकरण (1) का वर्ग करके (2) में भाग देने पर,

$$\frac{n(n-1)x^2}{2!\,.\,n^2x^2} = \frac{1.3}{3.6}.3^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(n-1)}{2!\,.\,n} = \frac{1.3.3.3}{3.6} \Rightarrow \frac{(n-1)}{n} = \frac{3}{1} \Rightarrow 3n = n - 1$$

$$\Rightarrow \quad 2n = -1 \Rightarrow n = -1/2$$

n का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$-\frac{1}{2}.x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

अतः दक्षिण पक्ष $= (1+x)^n = \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = (3)^{1/2} = \sqrt{3}$

अतः $(x+1) = \sqrt{3} \Rightarrow (x+1)^2 = 3$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 2 = 0$$

उदाहरण 32: सिद्ध कीजिए : $x^n = 1+n\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{n(n+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+...$

हल: दक्षिण पक्ष $=1+n\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{n(n+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+...$

मानक श्रेणी $(1+y)^m = 1+my+\frac{m(m-1)}{2!}y^2+...$

श्रेणी के पदों की तुलना करने पर,

$$my = n\left(1-\frac{1}{x}\right) \tag{1}$$

$$\frac{m(m-1)}{2!}y^2 = \frac{n(n+1)}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 \tag{2}$$

समीकरण (1) का वर्ग करके (2) में भाग देने पर,

$$\frac{m(m-1)y^2}{2!\,m^2y^2} = \frac{n(n+1)}{2!}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}{n^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(m-1)}{m} = \frac{(n+1)}{n} \Rightarrow mn-n = mn+m \quad \Rightarrow \quad m=-n$$

m का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$-n.y = n\left(1-\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y = -\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

अतः श्रेणी का योग $=(1+y)^m = \left[1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]^{-n} = \left[\frac{1}{x}\right]^{-n} = [x]^n = x^n =$ वाम पक्ष

प्रश्नमाला 7.6

निम्नलिखित अनंत श्रेणीयों का योग ज्ञात कीजिए:

1. $1+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}+\frac{2.5}{3.6}.\frac{1}{2^2}+...$

2. $1+\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\frac{1.4}{3.6}.\frac{1}{4^2}+...$

3. $1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+...$

4. $1+\frac{1}{10}+\frac{1.4}{10.20}+\frac{1.4.7}{10.20.30}+...$

5. $1-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{2}\right)^3+...$

सिद्ध कीजिए (प्र. सं. 6–8):

6. $\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1.3}{2!\,.\,2^4}+\frac{1.3.5}{3!\,.\,2^6}+...$

7. $\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left[1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}.\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}.\frac{1}{10^6}+...\right]$

8. $\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1.4}{1.2}.\frac{1}{3^4}+\frac{1.4.7}{1.2.3}.\frac{1}{3^6}+...$

9. यदि $y=\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+...\infty$, तब सिद्ध कीजिए $y^2+2y-2=0$

10. सिद्ध कीजिए: $(1+x)^n = 2^n\left[1-\frac{n(1-x)}{(1+x)}+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2-...\right]$

विविध प्रश्नमाला – 7

1. $\left(\frac{a}{x}+bx\right)^{12}$ के विस्तार में कुल पदों की संख्या है:

(A) 11 (B) 13 (C) 10 (D) 14

2. $\left(\frac{1}{2}+a\right)^{8}$ के विस्तार में 7 वां पद है:

(A) ${}^{8}C_7\left(\frac{1}{2}\right)(a)^7$ (B) ${}^{8}C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7.a$ (C) ${}^{8}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^2(a)^6$ (D) ${}^{8}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6(a)^2$

3. $(a-x)^8$ के प्रसार में मध्य पद है:

(A) $56a^3x^5$ (B) $-56a^3x^5$ (C) $70a^4x^4$ (D) $-70a^4x^4$

4. $\left(2x+\frac{1}{3x^2}\right)^9$ के प्रसार में अचर पद है।

(A) पांचवां (B) चौथा (C) छठवां (D) सातवां

5. $(x+a)^n$ के प्रसार में व्यापक पद है:

(A) ${}^{n}C_r\, x^{n-r}.a^r$ (B) ${}^{n}C_r\, x^r.a^r$ (C) ${}^{n}C_{n-r}\, x^{n-r}.a^r$ (D) ${}^{n}C_{n-r}\, x^r.a^{n-r}$

6. $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{12}$ के विस्तार में x रहित पद का मान है:

(A) 264 (B) –264 (C) 7920 (D) –7920

7. $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में x^{-17} का गुणांक है:

(A) 1365 (B) –1365 (C) 3003 (D) –3003

8. यदि $(1+x)^{18}$ के प्रसार में $(2r+4)$ वें तथा $(r-2)$ वें पदों के गुणांक बराबर हों, तब r का मान है:

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

9. यदि $(a+b)^n$ तथा $(a+b)^{n+3}$ के प्रसार में क्रमशः दूसरे एवं तीसरे एवं तीसरे एवं चौथे पदों का अनुपात बराबर हो, तो n का मान है:

(A) 5 (B) 6 (C) 3 (D) 4

10. यदि $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में $3r$ वें तथा $(r+2)$ वें पदों के गुणांक बराबर हो, तो

(A) $n=2r$ (B) $n=2r-1$ (C) $n=2r+1$ (D) $n=r+1$

11. $(2x-1/x)^{10}$ के विस्तार में x रहित पद का मान ज्ञात कीजिए।

12. सरलीकरण के पश्चात् $(x+a)^{200}+(x-a)^{200}$ के प्रसार में पदों की संख्या लिखिए।

13. यदि $(1+x)^n$ के प्रसार में $c_0, c_1, c_2 \ldots c_n$ विभिन्न पदों के गुणांक हो, तब $c_0+c_2+c_4\ldots$ का मान ज्ञात कीजिए।

14. ${}^{30}C_1 + {}^{30}C_2 + {}^{30}C_3 + \ldots + {}^{30}C_{30}$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

16. $(1+2x)^6(1-x)^7$ के प्रसार के गुणनफल में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

17. यदि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में दूसरे, तीसरे और चौथे पदों के गुणांक समान्तर श्रेढ़ी में है, तो सिद्ध कीजिए। कि $2n^2-9n+7=0$

18. $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ का द्विपद प्रमेय से प्रसार ज्ञात कीजिए।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि n धनात्मक पूर्णांक घातांक हो, तो $(x+a)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $(n+1)$ होती है। तथा

$$(x+a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}a + {}^nC_2\, x^{n-2}a^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^{n-r}a^r + \ldots + {}^nC_n\, a^n$$

2. व्यापक पद $T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}a^r$

3. यदि n सम है, तो मध्यपद= $\left(\frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{n+2}{2}\right)$ वां पद होता है।

यदि n विषम है, तो मध्यपद $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वां तथा $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ वां पद होता है।

4. किसी भी घातांक के लिए द्विपद प्रमेयः

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

इसमें पदों की संख्या अनंत होती है।

5. $(1+x)^n$ श्रेणी का व्यापक पद$= T_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!}x^r$

6. $(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots$

7. $(1-x)^{-n} = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots$

8. $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots + (-1)^r x^r + \cdots$

9. $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^r + \cdots$

10. $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots\ldots + (-1)^r(r+1)x^r + \ldots$

11. $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots + (r+1)x^r + \cdots$

12. $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \ldots + (-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r + \ldots$

13. $(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots + \frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r + \cdots$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 7.1

1. $8-12x+6x^2-x^3$ **2.** $\frac{32}{x^5}-\frac{40}{x^3}+\frac{20}{x}-5x+\frac{5}{8}x^3-\frac{x^5}{32}$. **3.** $\frac{x^6}{729}+\frac{2x^4}{81}+\frac{5x^2}{27}+\frac{20}{27}+\frac{5}{3x^2}+\frac{2}{x^4}+\frac{1}{x^6}$

4. $81x^4+216x^3y+216x^2y^2+96xy^3+16y^4$. **5.** $\frac{x^3}{a^3}-\frac{6x^2}{a^2}+\frac{15x}{a}-20+15\frac{9}{x}-6\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}$ **6.** 884736

7. 104060401 **8.** 9509900499 **9.** 1.771516 **10.** $(1.1)^{10000}$ बड़ी है **11.** $8ab(a^2+6^2);104\sqrt{6}$

प्रश्नमाला 7.2

1. (i) ${}^{17}C_4\, a^{13}\, 16x^{12}$ (ii) $3247695\frac{y^4}{x^{12}}$ (iii) $-63x^8$ **2.** (i) $-56\frac{a^3}{b^5}$ (ii) 6435 (iii) $-120a^7b^3$

3. (i) 495 (ii) 405 (iii) $\frac{5}{4}$ (iv) -252 **4.** (i) $20x^3y^3$ (ii) $\frac{189}{8}a^{17}, \frac{-21}{16}a^{19}$. (iii) $\frac{2n!}{(n!)2}$

(iv) $\frac{-6435\times 3^8\times 2^7}{x^6}, \frac{6435\times 3^7\times 2^8}{x^9}$ **7.** 7 या 14 **8.** $x=2, a=3, n=5$ **9.** $n=55$ **10.** $m=4$

प्रश्नमाला 7.3

1. (i) $(2)^8-1$ या 255 (ii) $(2)^7$ या 128

प्रश्नमाला 7.4

1. **(i)** $1-2x^2+3x^4-4x^6$ **(ii)** $1-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{32}-\frac{x^3}{128}$ **(iii)** $\frac{1}{(3)^{2/3}}\left[1+\frac{4}{9}x^2+\frac{20}{81}x^4+\frac{320}{2187}x^6\right]$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[1-\frac{2}{5}x+\frac{6}{25}x^2-\frac{4}{25}x^3\right]$ **2. (i)** $\frac{14}{3}x^3$ **(ii)** $\frac{-5}{1024}x^6$ **(iii)** $\frac{-429}{16}x^7$

3. **(i)** $-\frac{2.1.4\ldots\ldots(3r-5)}{3^r\ r!}\cdot\frac{x^{3r}}{a^{3r-2}}$ **(ii)** $\frac{3.5.7\ldots\ldots(2r+1)}{r!}x^r$

(iii) $\frac{p(p+q)(p+2q)\ldots..\{p+(r-1)q\}}{r!}\left(\frac{x}{q}\right)^r$ **4.** $\frac{88}{(3)^{11}}$ **5.** $-80a^{-6}b^3$ **6.** 66

7. $(-1)^r\frac{2n(2n+1)(2n+2)\ldots..(2n+r-1)}{r!}, \frac{4}{9}$ **10.** $\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3-\ldots..$

प्रश्नमाला 7.5

2. **(i)** $9+\frac{56}{5}x$ **(ii)** $\frac{2}{5}+\frac{27}{50}x$ **(iii)** $\left[1-\frac{305}{96}x\right]$

3. **(i)** 5.4775 **(ii)** 1.0099 **(iii)** 0.4964 **(iv)** 5.01333

प्रश्नमाला 7.6

1. $(4)^{1/3}$ **2.** $(4/3)^{1/3}$ **3.** $(4)^{1/3}$ **4.** $(10/7)^{1/3}$ **5.** $\sqrt{2/3}$

विविध प्रश्नमाला 7

1. A **2.** C **3.** C **4.** B **5.** A **6.** C **7.** B

8. B **9.** A **10.** A **11.** -8064 **12.** 101 **13.** 2^{n-1} **14.** $2^{30}-1$

15. 252 **16.** 171 **18.** $\frac{16}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{32}{x^3}+\frac{16}{x^4}-4x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{16}-5$

8

अनुक्रम, श्रेढ़ी तथा श्रेणी
(Sequence, Progression and Series)

8.01 अनुक्रम (Sequence) :

संख्याओं के निम्नलिखित समूहों पर विचार कीजिए:

(i) 2, 5, 8, 11, . . . (ii) 3, 6, 12, 24, . . .

(iii) 1, 4, 5, 9, 14, . . . (iv) 5, 6, 2, 9, 3, . . .

स्पष्ट है कि समूह (i) में प्रत्येक संख्या अपनी पूर्व संख्या से 3 अधिक है, समूह (ii) में प्रत्येक संख्या अपनी पूर्व संख्या से 2 गुणा है, समूह (iii) में प्रथम दो संख्याओं के बाद प्रत्येक संख्या अपनी पूर्ववर्त्ती दो संख्याओं का योग है, जबकि समूह (iv) की संख्याओं में कोई क्रम या नियम नहीं है जिससे कि इस समूह में आगे की संख्याएँ ज्ञात की जा सके।

उपर्युक्त समूहों में से प्रथम तीन समूह अनुक्रम के उदाहरण है।

परिभाषा : यदि राशियाँ किसी क्रम में निश्चित, तर्क पूर्ण नियमानुसार हो, तो उसे अनुक्रम कहते हैं। अनुक्रम की प्रत्येक संख्या उसका पद कहलाती है।

समुच्चय के रूप में अनुक्रम : प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N से किसी अन्य समुच्चय S में परिभाषित फलन को अनुक्रम कहते हैं, अर्थात् किसी समुच्चय N में अनुक्रम एक नियम है जो प्रत्येक प्राकृत संख्या को S के एक अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध करता है।

यदि $N_n = \{1, 2, 3 ..., n\}$ प्राकृत संख्याओं का परिमित समुच्चय है तथा फलन $f : N_n \to S$, N_n से अन्य समुच्चय S में परिभाषित हो, तो प्राकृत संख्याओं 1,2,3,...,n के प्रतिबिंबों का समुच्चय $\{f(1), f(2), f(3), ..., f(n)\}$ एक परिमित अनुक्रम कहलाता है। इसी प्रकार यदि फलन $f : N \to S$ हो, तो समुच्चय $\{f(1), f(2), f(3), ...\}$ अपरिमित अनुक्रम कहलाता है। इसे $\{f(n)\}$ या $< f(n) >$ से व्यक्त करते हैं। $f(1), f(2), f(3), ..., f(n), ...$ अनुक्रम के क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय, . . ., n वां पद कहलाते हैं। अनुक्रम का n वां पद व्यापक पद कहलाता है। व्यापक पद को a_n, t_n अथवा T_n से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरण : अनुक्रम 1, 3, 5, 7, 9, 11 एक परिमित अनुक्रम है, जहाँ $T_n = 2n - 1$, $n \in N_6$ हैं।

उदाहरण : अनुक्रम 2, 3, 5, 7, 11, 13, . . . अभाज्य संख्याओं का अपरिमित अनुक्रम है, जहाँ n वें पद को किसी विशिष्ट सूत्र के रूप में नहीं लिख सकते हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि एक अनुक्रम को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है:

(i) अनुक्रम के कुछ प्रारंभिक पदों को लिखा जाता है जिससे बाद में आने वाले पदों को लिखने का तर्क पूर्ण नियम स्पष्ट हो जाए। जैसे 1, 8, 27, . . . अनुक्रम का व्यापक पद $T_n = n^3$ है।

(ii) अनुक्रम के कुछ प्रारंभिक पदों को लिख कर उनकी विशिष्टता व्यक्त की जा सकती है। जैसे 2, 3, 5, 7, 11, . . . अनुक्रम के पदों का अभाज्य होना उनकी विशिष्टता है।

(iii) अनुक्रम के प्रथम दो पद लिख कर अन्य पदों को उनके पूर्ववर्ती पदों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जैस अनुक्रम 1, 4, 5, 9, 14, . . . को व्यक्त करने के लिए $a_1 = 1, a_2 = 4$ तथा $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$ लिखा जा सकता है।

8.02 श्रेणी (Series) :

यदि $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ एक अनुक्रम हो तो व्यंजक $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm ... \pm a_n \pm ...$ को श्रेणी कहते हैं। अतः प्रत्येक अनुक्रम के संगत एक श्रेणी होती है, जिसमें पदों के मध्य धन या ऋण का चिह्न होता है। प्रत्येक श्रेणी का एक संगत अनुक्रम भी होता है।

8.03 श्रेढ़ी (Progression) :

एक अनुक्रम श्रेढ़ी कहलाती है यदि उसके पदों का संख्यात्मक मान किसी विशिष्ट नियम के अंतर्गत बढ़ता या घटता है।

अर्थात् यदि किसी अनुक्रम का n वां पद एक स्पष्ट सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है तो वह अनुक्रम श्रेढ़ी कहलाता है।

टिप्पणीः अनुक्रम एवं श्रेढ़ी में अन्तरः अनुक्रम में आगे के पद निश्चित, तर्क पूर्ण नियमानुसार लिखे जा सकते है इसमें n वां पद लिखना सदैव संभव नहीं होता है परन्तु श्रेढ़ी में n वां पद सदैव लिखा जाता है।

उदाहरणार्थः 2, 3, 5, 7, 11, 13 अभाज्य संख्याओं का अपरिमित अनुक्रम है परन्तु इसका n वां पद किसी गणितीय सूत्र से व्यक्त नहीं किया जा सकता अतः यह श्रेढ़ी नहीं है।

8.04 समांतर श्रेढ़ी (Arithmetical Progression) :

समांतर श्रेढ़ी वह श्रेढ़ी है जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्व पद में कोई नियत राशि जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में समांतर श्रेढ़ी एक ऐसा अनुक्रम है जिसके प्रत्येक पद का उसके पूर्ववर्ती पद से अंतर सदैव स्थिर रहता है। इस स्थिर अंतर को सार्वअंतर कहते हैं। समांतर श्रेढ़ी को संक्षेप में स.श्रे. (A.P.) से निरूपित करते हैं।

उदाहरण : 2, 5, 8, 11,..... एक स.श्रे. है जिसका प्रथम पद 2 तथा सार्वअंतर $5-2=8-5=11-8=3$ है।

8.05 समांतर श्रेढ़ी का व्यापक पद (General term of arithmetical progression)

एक स.श्रे. का n वां पद ज्ञात करना जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d हैः

मानाकि $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ एक स.श्रे. है, तब

परिभाषा से $T_2 - T_1 = d$

$$T_3 - T_2 = d$$

$$T_4 - T_3 = d$$

....

....

$$T_n - T_{n-1} = d$$

इन सभी $(n-1)$ समीकरणों को जोड़ने पर

$$T_n - T_1 = (n-1)d$$

$\Rightarrow \quad T_n = T_1 + (n-1)d \quad$ परन्तु $\quad T_1 = a$

अतः व्यापक पद $T_n = a + (n-1)d$

इसलिए यदि समान्तर श्रेढ़ी (A.P) का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d हो तो समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक रूप $a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d$ या $a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d, ...$ जो परिमित तथा अपरिमित के संगत होता है।

परिमित स.श्रे. का n वां पद अंतिम पद ℓ कहलाता है तथा $\ell = a+(n-1)d$.

किसी अनुक्रम का n वां पद दिया हुआ हो, तो अनुक्रम स.श्रे. है या नहीं, जाँचने के लिये निम्नलिखित क्रियाविधि का उपयोग करेंगे:

(i) n वें पद को T_n लिखिए।

(ii) T_n में n के स्थान पर $n+1$ लिखकर T_{n+1} ज्ञात कीजिए।

(iii) $T_{n+1} - T_n$ ज्ञात कीजिए। यदि यह अंतर n से स्वतंत्र है, तो दिया हुआ अनुक्रम समांतर श्रेढ़ी है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: दिखाइए कि अनुक्रम $\{T_n\}$, जिसका n वां पद $T_n = 2n+7$ है, एक स.श्रे. है।

हल: यहाँ $T_n = 2n+7$ है।

n के स्थान पर $n+1$ रखने पर,

$$T_{n+1} = 2(n+1)+7 = 2n+2+7 = 2n+9$$

$$\therefore \quad T_{n+1} - T_n = (2n+9)-(2n+7) = 2$$

यह अंतर n से स्वतंत्र है। अतः अनुक्रम $\{T_n\}$ एक स.श्रे. है।

उदाहरण 2: दिखाइए कि अनुक्रम $\{T_n\}$ एक स.श्रे. नहीं है, जहाँ $T_n = n^2 - 2n$.

हल: यहाँ $T_n = n^2 - 2n$ है।

n के स्थान पर $n+1$ रखने पर,

$$T_{n+1} = (n+1)^2 - 2(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 = n^2 - 1$$

$$\therefore \quad T_{n+1} - T_n = (n^2 - 2n) - (n^2 - 1) = -2n+1$$

यह अंतर n पर निर्भर है। अतः अनुक्रम स.श्रे. नहीं है।

टिप्पणी:

1. एक अनुक्रम समांतर श्रेढ़ी नहीं होगा, यदि उसका n वां पद, n में रैखिक नहीं है।
2. यदि n पदों वाली स.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d हो, तो श्रेढ़ी का अंतिम से p वां पद, प्रारंभ से $(n-p+1)$ वां पद होगा तथा इसको सूत्र $a+(n-p)d$ द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 3: दिखाइए कि अनुक्रम 2, 7, 12, 17, ... एक स. श्रे. है इसका व्यापक पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ दो क्रमागत पदों का अन्तर समान है जो कि 5 है। अतः दिया हुआ अनुक्रम एक स. श्रे. है। यहाँ प्रथम पद $a = 2$ तथा सार्व अन्तर $d = 5$ अतः स. श्रे. का व्यापक पद

$$T_n = 2+(n-1)5 = 2+5n-5 = 5n-3.$$

उदाहरण 4: किसी स. श्रे. का 5वाँ पद 18 तथा 9 वाँ पद 10 हो, तो 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $T_5 = 18 \quad \Rightarrow \quad a+4d = 18 \qquad (1)$

$T_9 = 10 \quad \Rightarrow \quad a+8d = 10 \qquad (2)$

(1) तथा (2) को हल करने पर

$a = 26 \qquad d = -2$

अतः $T_{20} = a+19d = 26 + 19\,(-2) = 26 - 38 = -12$

उदाहरण 5: क्या 105 स. श्रे. 1 + 4 + 7 + 11 + ... का एक पद है?

हल: यहाँ a = 1 तथा d = 3 है माना कि 105 सं श्रे. का nवाँ पद है, तब $T_n = 105$

या $\quad a + (n-1)\,d = 105$

$$1 + (n-1)3 = 105 \quad \Rightarrow \quad n = 35\frac{2}{3}$$

चूँकि n का मान एक प्राकृत संख्या नहीं है, अतः 105 दी गई सं श्रे. का पद नहीं है।

उदाहरण 6: एक स. श्रे. का सार्व अन्तर 4 है तथा अन्तिम पद 201 है तो अन्त से 25वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $d = 4$ तथा $\ell = 201$

$\because$ अन्त से nवाँ पद = $\ell - (n-1)d$ होता है

अतः अन्तः से 25वाँ पद = 201 – (25–1) 4 = 201 – 96 = 105.

प्रश्नमाला 8.1

1. निम्न अनुक्रमों में से कौनसे अनुक्रम स. श्रे. में है?
   (i) 2, 6, 11, 17, ... (ii) 1, 1.4, 1.8, 2.2, ... (iii) –7, –5, –3, –1, ... (iv) 1, 8, 27, 64, ...
2. उन अनुक्रमों के प्रथम पद, सार्व अन्तर तथा 5वें पद ज्ञात कीजिए। जिनके nवें पद निम्नलिखित हैः
   (i) 3n + 7 (ii) a + (n – 1)d (iii) 5 – 3n
3. दर्शाइए कि निम्नलिखित nवें पदों वाले अनुक्रम सं. श्रे. नहीं है।
   (i) $\frac{n}{n+1}$ (ii) n^2+1
4. समान्तर श्रेढ़ी 2 + 5 + 8 + 11 + ... का कौनसा पद 65 है?
5. समान्तर श्रेढ़ी 4 + 9 + 14 + 19 + ... + 124 के अन्त से 13 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
6. यदि समान्तर श्रेढ़ी 2 + 5 + 8 + 11 + ... का अन्तिम पद 95 हो, तो श्रेढ़ी के पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी का 9वाँ शून्य है तो सिद्ध कीजिए। कि 29 वाँ पद, 19वें पद का दुगुना होता है।
8. 3 से विभाज्य दो अंकों वाली प्राकृत संख्याएँ कितनी है?
9. यदि किसी स. श्रे. का p वाँ पद q तथा q वाँ पद p हों, $(p+q)$ वाँ पद ज्ञात कीजिए।
10. यदि किसी स. श्रे. का pवाँ पद $1/q$ तथा q वाँ पद $1/p$ हो, तो सिद्ध कीजिए। pq वाँ पद इकाई है।

8.06 समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल (Sum of first n terms of an A.P.)

समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल S_n से व्यक्त किया जाता है। माना कि दी हुई समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, सार्वअंतर d तथा n वां पद ℓ है। श्रेढ़ी के पद क्रमशः $a, a+d, a+2d \dots \ell-2d, \ell-d, \ell$ होंगे। अतः

$$S_n = a+(a+d)+(a+2d)+\dots+(\ell-2d)+(\ell-d)+\ell \dots \qquad (1)$$

पदों को विपरीत क्रम में लिखने पर,

$$S_n = \ell+(\ell-d)+(\ell-2d)+\dots+(a+2d)+(a+d)+a \dots \qquad (2)$$

(1) और (2) के संगत पदों का योग करने पर,

$$2S_n = (a+\ell)+(a+\ell)+\dots(a+\ell)+(a+\ell) \qquad (n \text{ पद})$$

$$= n(a+\ell)$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}(a+\ell)$$

या $$S_n = \frac{n}{2}\left[a+a+(n-1)d\right] \qquad \left[\because \ell = T_n = a+(n-1)d\right]$$

या $$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

टिप्पणीः

1. स.श्रे. के n पदों के योगफल सूत्र में चार राशियाँ हैं, इनमें से कोई तीन ज्ञात हो, तो शेष चौथी राशि की गणना की जा सकती है।
2. स.श्रे. के प्रथम n पदों का योगफल S_n हो तो उसका n वां पद सूत्र $T_n = S_n - S_{n-1}$ से ज्ञात किया जा सकता है।
3. यदि स.श्रे. के पदों का योगफल दिया हुआ हो, तो पदों का चयन निम्नलिखित प्रकार से करना चाहिए।

विषम पद $\left[\begin{array}{l} 3 \text{ पद} : a-d, a, a+d \\ 5 \text{ पद} : a-2d, a-d, a, a+d, a+2d \end{array}\right.$

सम पद $\left[\begin{array}{l} 4 \text{ पद} : a-3d, a-d, a+d, a+3d \\ 6 \text{ पद} : a-5d, a-3d, a-d, a+d, a+3d, a+5d \end{array}\right.$ इत्यादि।

8.07 समांतर माध्य (Arithmetic mean) :

यदि तीन या तीन से अधिक राशियाँ स.श्रे. में हैं, तो प्रथम तथा अंतिम राशियों के मध्य शेष सभी राशियाँ समांतर माध्य कहलाती हैं, अर्थात् यदि $a, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, b$ एक स. श्रे. हो, तो $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$; a तथा b के बीच n समांतर माध्य कहलाते हैं। समांतर माध्य को संक्षेप में स.मा. (A.M.) से व्यक्त किया जाता है।

उदाहरणार्थ : 3, 6, 9 स. श्रे. में हैं। अतः 3 तथा 9 के बीच स. मा. 6 है।

दो राशियों के मध्य एक स.मा. ज्ञात करनाः

माना कि दी हुई राशियाँ a तथा b हैं तथा उनके बीच एक समांतर माध्य A हैं तब a, A, b स.श्रे. में होंगे।

$\therefore \quad A - a = b - A \qquad$ या $\qquad 2A = a + b$

या $\quad A = \dfrac{a+b}{2}$, जो कि a तथा b का स.मा. कहलाता है।

दो राशियों के मध्य n स.मा. ज्ञात करनाः

माना कि दी हुई दो राशियाँ a तथा b हैं तथा उनके बीच n समांतर माध्य क्रमशः $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ हैं। तब $a, A_1, A_2 A_3 \ldots A_n, b$ स. श्रे. में होंगे।

इस श्रेढ़ी का प्रथम पद a अंतिम पद b तथा पदों की संख्या $(n+2)$ है। माना कि इस स.श्रे. का सार्वअंतर d है, तब

अंतिम पद $\;b = a + (n+2-1)d$

या $\quad b = a + (n+1)d \quad \Rightarrow \quad d = (b-a)/(n+1)$

अब, $\quad A_1 = a + d = a + (b-a)/(n+1)$

$$A_2 = a + 2d = a + 2\left(\frac{b-a}{n+1}\right), \ldots, A_n = a + nd = a + n\left(\frac{b-a}{n+1}\right),$$

जो कि a तथा b के मध्य अभीष्ट समांतर माध्य है।

8.08 समांतर श्रेढ़ी के गुणधर्म (Properties of A.P.) :

1. यदि किसी स.श्रे. के प्रत्येक पद में एक निश्चित संख्या जोड़ी या घटाई जाए तो प्राप्त श्रेढ़ी भी उसी सार्वअंतर वाली स.श्रे. होगी।
2. यदि किसी स.श्रे. के प्रत्येक पद को एक निश्चित अशून्य संख्या से गुणा या भाग दिया जाए तो प्राप्त श्रेढ़ी भी स.श्रे. होगी।
3. किसी परिमित स.श्रे. में प्रारंभ तथा अंत से समान दूरी वाले पदों का योग अचर होता है तथा यह पहले तथा अंतिम पदों के योग के बराबर होता है।
4. किसी स.श्रे. का प्रत्येक पद (प्रथम व अन्तिम पद को छोड़कर) उससे समान दूरी पर स्थित दो पदों के योग का आधा होता है।
5. यदि किसी स.श्रे. में पदों की संख्या विषम हो, तो इस श्रेढ़ी का योगफल, मध्य पद तथा पदों की संख्या के गुणनफल के बराबर होता है।
6. यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ तथा $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$; n पदों वाली दो समांतर श्रेढ़ियों हों, तो $(x_1 \pm y_1), (x_2 \pm y_2), (x_3 \pm y_3), \ldots, (x_n \pm y_n)$, भी स.श्रे. होगी।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 7: स. श्रे. 7 + 12 + 17 + 22 + ... के 20 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 7, d = 5$ तथा $n = 20$ है।

अतः $\quad S_n = \dfrac{20}{2}[2 \times 7 + (20-1)5]$

$= 10\,[14 + 95]$

$= 10 \times 109 = 1090.$

उदाहरण 8: यदि किसी सं. श्रे. का n वाँ पद $2n + 7$ है, तो प्रथम 12 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $T_n = 2n + 7$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ रखने पर $T_1 = 9$, $T_2 = 11$, $T_3 = 13$

$\therefore \quad a = 9, d = 11 - 9 = 2$

अतः $S_{12} = \frac{12}{2}\left[2\times 9+(12-1)\times 2\right]$

$= 6\,[18 + 22]$

$= 6 \times 40 = 240.$

उदाहरण 9: यदि किसी स.श्रे. का $\boldsymbol{p}$ वां पद $\frac{1}{q}$ तथा $\boldsymbol{q}$वां पद $\frac{1}{p}$ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि श्रेढ़ी के $\boldsymbol{pq}$ पदों का योगफल $\frac{1}{2}(pq+1)$ होगा।

हल : यहाँ दिया हुआ है:

$$T_p = \frac{1}{q} \Rightarrow a+(p-1)d = \frac{1}{q} \qquad (1)$$

$$T_q = \frac{1}{p} \Rightarrow a+(q-1)d = \frac{1}{p} \qquad (2)$$

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

$$a = \frac{1}{pq},\ d = \frac{1}{pq}$$

अतः pq पदों का योगफल

$$S_{pq} = \frac{pq}{2}\left[2\times\frac{1}{pq}+(pq-1)\frac{1}{pq}\right]$$

$$= \frac{pq}{2}\left[\frac{2+pq-1}{pq}\right] = \frac{1}{2}(pq+1)$$

उदाहरण 10: श्रेणी $\mathbf{1 - 7 + 3 - 10 + 5 - 13 + \ldots}$ के 30 पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दी हुई श्रेणी, दो समांतर श्रेणीयों का संयुक्त रूप है।

अतः श्रेणी को दो भागों में लिखने पर,

$$S = (1+3+5+\ldots 15\,\text{पद}) - (7+10+13+\ldots 15\,\text{पद})$$

$$= \frac{15}{2}\left[2\times 1+(15-1)\times 2\right] - \frac{15}{2}\left[7\times 2+(15-1)\times 3\right]$$

$$= \frac{15}{2}[2+28] - \frac{15}{2}[14+42] = \frac{15}{2}\times 30 - \frac{15}{2}\times 56 = -195$$

उदाहरण 11: यदि $\boldsymbol{x^2, y^2, z^2}$ स. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए:

(i) $\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}$ स. श्रे. में हैं। **(ii)** $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$ स. श्रे. में हैं।

हलः (i) $\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}$ स. श्रे. में होंगे, यदि

$$\frac{1}{z+x} - \frac{1}{y+z} = \frac{1}{x+y} - \frac{1}{z+x}$$

या $$\frac{y-x}{y+z} = \frac{z-y}{x+y}$$

या $$y^2 - x^2 = z^2 - y^2$$

या $$2y^2 = x^2 + z^2$$

या x^2, y^2, z^2 स. श्रे. में हैं, जो कि दिया हुआ है।

अतः x^2, y^2, z^2 स. श्रे. में हैं, तो $\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}$ भी स. श्रे. में होंगे।

(ii) $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$ स. श्रे. में होंगे, यदि

$\frac{x}{y+z}+1, \frac{y}{z+x}+1, \frac{z}{x+y}+1$ स. श्रे. में हैं। [प्रत्येक पद में 1 जोड़ने पर]

या $\frac{x+y+z}{y+z}, \frac{x+y+z}{z+x}, \frac{x+y+z}{x+y}$ स. श्रे. में हैं।

या $\frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}, \frac{1}{x+y}$ स. श्रे. में हैं। [प्रत्येक पद में $x+y+z$ से भाग देने पर]

या $2y^2 = x^2 + z^2$, [भाग (i) से]

जो कि दिया हुआ है। अतः x^2, y^2, z^2 स. श्रे. में हैं तो $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$ भी स.श्रे. में होंगे।

उदाहरण 12: यदि एक स. श्रे. में m पदों का योगफल n तथा n पदों का योगफल m है, तो सिद्ध कीजिए कि $(\boldsymbol{m+n})$ पदों का योगफल $-(\boldsymbol{m+n})$ होगा।

हल : माना कि दी गई स. श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअंतर d है। तब

$$S_m = n \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{2}\{2a+(m-1)d\} = n \quad \Rightarrow \quad 2am + m(m-1)d = 2n \qquad (1)$$

$$S_n = m \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} = m \quad \Rightarrow \quad 2an + n(n-1)d = 2m \qquad (2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$$2a(m-n) + \{m(m-1) - n(n-1)\}d = 2n - 2m$$

या $$2a(m-n) + \{(m^2-n^2) - (m-n)\}d = -2(m-n)$$

या $$2a + (m+n-1)d = -2 \qquad \text{[दोनों ओर } (m-n) \text{ से भाग देने पर]} \qquad (3)$$

अब, $$S_{m+n} = \frac{m+n}{2}\{2a + (m+n-1)d\}$$

$$= \frac{m+n}{2}(-2) = -(m+n) \qquad \text{[(3) के प्रयोग से]}$$

उदाहरण 13: दो स. श्रे. के n पदों के योगफल का अनुपात $(3n + 13) : (5n + 3)$ है श्रेढ़ियों के 17वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि श्रेढ़ियों के प्रथम पद तथा सार्वअन्तर क्रमशः a, A तथा d, D है। तो प्रतिबन्ध के अनुसार,

$$\frac{\text{प्रथम स. श्रे. के } n \text{ पदों का योगफल}}{\text{द्वितीय स. श्रे. के } n \text{ पदों का योगफल}} = \frac{3n+13}{5n+3}$$

या $$\frac{\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}{\frac{n}{2}[2A+(n-1)D]} = \frac{3n+13}{5n+3}$$

या $$\frac{2a+(n-1)d}{2A+(n-1)D} = \frac{3n+13}{5n+3}$$

या $$\frac{a+\left(\frac{n-1}{2}\right)d}{A+\left(\frac{n-1}{2}\right)D} = \frac{3n+13}{5n+3} \qquad (1)$$

पुनः $$\frac{\text{प्रथम स. श्रे. का 17वाँ पद}}{\text{द्वितीय स. श्रे. का 17वाँ पद}} = \frac{a+16d}{A+16D} \qquad (2)$$

(1) में $\frac{n-1}{2} = 16$ या $n = 33$ रखने पर

$$\frac{a+16d}{A+16D} = \frac{3\times 33+13}{5\times 33+3} = \frac{99+13}{165+3}$$

या $$\frac{a+16d}{A+16D} = \frac{112}{168} = \frac{2}{3}$$

अतः वांछित अनुपात $= 2 : 3$ है।

उदाहरण 14: संख्याओं 18 तथा 30 के बीच 3 समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि 18 तथा 30 के बीच तीन समान्तर माध्य A_1, A_2, A_3 है। अतः $18, A_1, A_2, A_3$ 30 सं श्रे. में है।

यहाँ $d = \frac{30-18}{3+1} = \frac{12}{4} = 3$ $\left[\because d = \frac{b-a}{n+1}\right]$

$A_1 = a + d = 18 + 3 = 21$

$A_2 = a + 2d = 18 + 6 = 24$

$A_3 = a + 3d = 18 + 9 = 27$

अतः अभीष्ट समान्तर माध्य 21, 24 तथा 27 है।

उदाहरण 15: n के किस मान के लिए व्यंजक $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a तथा b का समांतर माध्य है।

हल: चूँकि a तथा b का समांतर माध्य $\frac{a+b}{2}$ है। अतः

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\frac{a+b}{2}$$

या $\quad 2\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)=\left(a^n+b^n\right)(a+b)$

या $\quad 2a^{n+1}+2b^{n+1}=a^{n+1}+a^nb+b^na+b^{n+1}$

या $\quad a^{n+1}+b^{n+1}=a^nb+b^na$

या $\quad a^n(a-b)=b^n(a-b)$

या $\quad a^n=b^n \qquad [\because a\neq b]$

यह तभी संभव है जब n=0 $\qquad \left[\because a^0=b^0=1\right]$

प्रश्नमाला 8.2

1. निम्नलिखित श्रेढ़ियों का योगफल ज्ञात कीजिए।
   (i) $7+11+15+19+\ldots$ 20 पदों तक।
   (ii) $\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+\ldots$ 10 पदों तक।
   (iii) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\ldots$ 6 पदों तक।
2. 1 से 101 तक के विषम पूर्णांकों का योगफल ज्ञात कीजिये जो 3 से विभाज्य है।
3. उस स.श्रे. के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिसका r वां पद $2r+3$ है।
4. किसी स.श्रे. के n पदों का योगफल n^2+2n है। प्रथम पद तथा सार्वअंतर ज्ञात कीजिए।
5. यदि स.श्रे. 1, 6, 11, . . . के n पदों का योगफल 148 है, तो पदों की संख्या तथा अंतिम पद ज्ञात कीजिए।
6. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के p पदों का योगफल तथा q पदों का योगफल समान है, तो $(p+q)$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।
7. यदि किसी स.श्रे. के n, $2n$, $3n$ पदों का योगफल क्रमशः S_1, S_2 तथा S_3 हों, तो सिद्ध कीजिए कि $S_3=3\left(S_2-S_1\right)$ होगा।
8. यदि n पदों वाली m समांतर श्रेढ़ियों के योगफल $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m$ हैं। इनके प्रथम पद क्रमशः $1, 2, 3, \ldots, m$ तथा सार्वअंतर क्रमशः $1, 3, 5, \ldots, (2m-1)$ है, तो सिद्ध कीजिए:
$$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_m=\frac{mn}{2}(mn+1)$$
9. यदि किस स.श्रे. के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः a, b, c हैं, तो सिद्ध कीजिए:
$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$$
10. स.श्रे. में वे तीन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 12 है तथा उनके घनों का योगफल 408 है।
11. यदि 1 तथा 51 के मध्य n स.मा. इस प्रकार प्रविष्ट किये गये हों कि चौथे तथा सातवें समांतर माध्य का अनुपात 3 : 5 है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि x, y, z स.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिएः

(i) $y+z,\ z+x,\ x+y$ स.श्रे. में हैं।

(ii) $\frac{1}{yz}, \frac{1}{zx}, \frac{1}{xy}$ स.श्रे. में हैं।

(iii) $(x-y)(y-z)=\frac{(z-x)^2}{4}$

(iv) $(x-z)^2=4(y^2-xz)$

(v) $xy+yz+zx=\frac{x^2+z^2+4xz}{2}$

13. यदि $x^2(y+z), y^2(z+x), z^2(x+y)$ स.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि या तो x, y, z स.श्रे. में हैं या $xy+yz+zx=0$ होगा।

14. समान्तर श्रेढ़ी $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{30}$ का योगफल ज्ञात कीजिये, दिया हुआ है

$$a_1+a_7+a_{10}+a_{21}+a_{24}+a_{30}=540$$

15. एक बहुभुज के अन्तः कोण समान्तर श्रेढ़ी में हैं सबसे छोटा अन्तः कोण 52° तथा क्रमिक अन्तः कोणों का अन्तर 8° हो, तो बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

8.09 गुणोत्तर श्रेढ़ी (Geometrical Progression) :

यदि किसी अशून्य संख्याओं की श्रेढ़ी का प्रत्येक पद उससे पूर्व पद को, किसी निश्चित राशि से गुणा करने पर प्राप्त होता है, तो श्रेढ़ी गुणोत्तर श्रेढ़ी कहलाती है। अर्थात् श्रेढ़ी के प्रत्येक पद का उससे पूर्व पद से अनुपात एक निश्चित राशि होती है, तो श्रेढ़ी गुणोत्तर श्रेढ़ी कहलाती है। इस निश्चित राशि को सार्वअनुपात (common ratio) कहते हैं। गुणोत्तर श्रेढ़ी को संक्षेप में गु.श्रे. (G.P.) से व्यक्त करते हैं।

निम्नलिखित अनुक्रमों पर विचार कीजिएः

(i) 2, 4, 8, 16, . . .   (ii) 1, –3, 9, –27, . . .   (iii) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ (iv) $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

उपर्युक्त सभी अनुक्रमों में प्रत्येक पद उसके पूर्व पद को एक निश्चित राशि (i) में 2 (ii) में –3 (iii) में $\frac{1}{2}$ तथा (iv) में r से गुणा करने पर प्राप्त होता है। अतः उपर्युक्त सभी अनुक्रम गु.श्रे. हैं।

टिप्पणी :

1. गुणोत्तर श्रेढ़ी में प्रथम पद तथा सार्वअनुपात सदैव अशून्य होते हैं।
2. यदि गु.श्रे. के पद एकांतर धन तथा ऋण चिह्न के हों, तो श्रेढ़ी का सार्वअनुपात ऋणात्मक होता है।

8.10 गुणोत्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद (General term of G.P.) :

एक गु.श्रे. का n वां पद ज्ञात करना जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है:

मानाकि $T_1, T_2, \ldots, T_n$ एक गु.श्रे. है, तब

$$T_1 = \text{प्रथम पद} = a = ar^{1-1},$$

परिभाषा स

$$\frac{T_2}{T_1}=r \quad \Rightarrow \quad T_2=T_1r=ar=ar^{2-1},$$

$$\frac{T_3}{T_2}=r \quad \Rightarrow \quad T_3=T_2r=ar.r=ar^2=ar^{3-1},$$

इसी प्रकार $T_4=ar^{4-1}, \ldots\ldots, T_n=ar^{n-1}$

अतः यदि किसी गु.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r हो, तो उसका n वां पद $T_n=ar^{n-1}$ होता है।

परिमित गु.श्रे. में n वां पद अंतिम पद ℓ कहलाता है तथा $\ell=ar^{n-1}$

यदि किसी गु.श्रे. में पदों की संख्या n हो, तो श्रेढ़ी के अंत से p वां पद प्रारंभ से $(n-p+1)$ वां पद होता है। अब यदि इस गु.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअंतर r हो, तो अंत से p वां पद $=ar^{n-p}$ होता।

यदि अंतिम पद ℓ हो, तो अंतिम पद से प्रारंभिक पद की ओर एक गु.श्रे. होगी जिसका सार्वअनुपात $\frac{1}{r}$ होगा तथा अंत से n वां पद $= \ell\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ होगा।

टिप्पणी :

1. यदि गु.श्रे. के पदों का गुणनफल नहीं दिया गया हो, तो श्रेढ़ी के क्रमागत पद $a, ar, ar^2, \ldots$ के रूप में माने जाते हैं।
2. यदि गु.श्रे. के पदों का गुणनफल दिया गया हो, तो श्रेढ़ी के पदों का चयन निम्नलिखित प्रकार से करना चाहिएः

विषम पद 3 पद : $\frac{a}{r}, a, ar$

5 पद : $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

सम पद 4 पद : $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$

6 पद $\frac{a}{r^5}, \frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3, ar^5$ इत्यादि।

8.11 गुणोत्तर माध्य (Geometric mean) :

यदि तीन या तीन से अधिक राशियाँ गु.श्रे. में हैं, तो प्रथम तथा अंतिम राशि के बीच शेष सभी राशियाँ गुणोत्तर माध्य कहलाती हैं। गुणोत्तर माध्य को संक्षेप में गु.मा. (G.M.) द्वारा व्यक्त करते हैं। अर्थात् यदि $a, G_1, G_2, \ldots, G_n, b$ एक गु.श्रे. है तो $G_1, G_2, \ldots, G_n$ को a तथा b के मध्य गुणोत्तर माध्य कहते हैं।

दो राशियों के बीच एक गु.मा. ज्ञात करनाः

माना कि a तथा b दो दी हुई राशियाँ है तथा G इनके बीच एक गु.मा. है। तब a, G, b गु.श्रे. में होंगे एवं परिभाषा से

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \qquad \text{या} \qquad G^2 = ab$$

या $G = \pm\sqrt{ab}$, जो कि a तथा b का गु.मा. कहलाता है।

उदाहरण 1: यदि 2, 6, 18 गु.श्रे. में हैं, तो राशि 6, 2 तथा 18 के मध्य एक गु.मा. है।

उदाहरण 2: 3 तथा 27 के मध्य गु.मा. $G = \sqrt{3 \times 27} = 9$ होगा।

उदाहरण 3: –8 तथा –2 के मध्य गु.मा. $G = \pm\sqrt{(-8)\times(-2)} = -4$ होगा।

दो राशियों के मध्य n गु.मा. ज्ञात करनाः

माना कि a तथा b दो दी हुई राशियाँ हैं तथा $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$ इनके बीच n गु.मा. हैं, तो $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ एक गु.श्रे. होगी।

माना कि इस गु.श्रे. का सार्वअनुपात r है। इस श्रेढ़ी में कुल $(n + 2)$ पद है अतः b श्रेढ़ी का $(n + 2)$ वां पद है।

$$\therefore \qquad b = ar^{n+2-1} \qquad \text{या} \qquad r^{n+1} = b/a \qquad \text{या} \qquad r = (b/a)^{\frac{1}{n+1}}$$

अतः अभीष्ट गु.मा. निम्नलिखित होंगेः

$$G_1 = ar = a(b/a)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_2 = ar^2 = a(b/a)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$G_n = ar^n = a(b/a)^{\frac{n}{n+1}}$$

टिप्पणी : यदि दो संख्याएँ a तथा b विपरीत चिह्न की हो, तो उनके मध्य कोई गु.मा. नहीं होगा।

8.12 दो राशियों के मध्य स.मा. तथा गु.मा. के महत्त्वपूर्ण गुणधर्म (Important properties & A.M. and GM between two quantities)

गुणधर्म 1. यदि दो धनात्मक राशियों a तथा b के मध्य स.मा. तथा गु.मा. क्रमशः A एवं G हैं, तब $A > G$.

प्रमाणः यहाँ $A = \dfrac{a+b}{2}$ तथा $G = \sqrt{ab}$

अब $\quad A - G = \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} > 0 \qquad \therefore \qquad A > G$

गुणधर्म 2. यदि दो धनात्मक राशियों a तथा b के मध्य स.मा. तथा गु.मा. क्रमशः A एवं G हैं, तब a, b मूलों वाला द्विघात समीकरण $x^2 - 2Ax + G^2 = 0$ है।

प्रमाणः यहाँ $A = \dfrac{a+b}{2}$ तथा $G = \sqrt{ab}$ (1)

एक द्विघात समीकरण जिसके मूल a तथा b हैं, होता हैः

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

या $\quad x^2 - 2Ax + G^2 = 0$ [(1) के प्रयोग से]

गुणधर्म 3. यदि दो धनात्मक राशियों के मध्य स.मा. तथा गु.मा. क्रमशः A एवं G हैं, तब ये राशियाँ $A \pm \sqrt{A^2 - G^2}$ हैं।

हलः द्विघात समीकरण जिसके मूल दी गई राशियाँ हैं, होता हैः

$$x^2 - 2Ax + G^2 = 0$$ [गुणधर्म 2 से]

या $\quad x = \dfrac{2A \pm \sqrt{4A^2 - 4G^2}}{2}$ [श्रीधराचार्य सूत्र से]

या $\quad x = A \pm \sqrt{A^2 - G^2}$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 16: गु.श्रे. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$ का 10 वां पद तथा व्यापक पद ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ प्रथम पद $\dfrac{1}{2}$ तथा सार्वअनुपात $\dfrac{1}{2}$ है। अतः

$$T_{10} = ar^{10-1} = ar^9 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

तथा व्यापक पद $\quad T_n = ar^{n-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2^n}$

उदाहरण 17: किसी गु.श्रे. का दूसरा पद 10 तथा पांचवां पद 80 है। श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

हलः गु.श्रे. का दूसरा पद $T_2 = ar = 10$

गु.श्रे. का पांचवां पद $T_5 = ar^4 = 80$ (1)

(2) में (1) का भाग देने पर, (2)

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{80}{10}$$

या $\quad r^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad r = 2$

r का यह मान (1) में रखने पर,

$2a = 10 \quad \Rightarrow \quad a = 5$

अतः अभीष्ट गु.श्रे. 5, 10, 20, 40, . . . है।

उदाहरण 18: गु.श्रे. में तीन संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका गुणनफल 1000 तथा योगफल 35 है।

हल: माना कि अभीष्ट संख्याएँ $\frac{a}{r}, a, ar$ हैं। तब दिया हुआ है:

$$\frac{a}{r} \times a \times ar = 1000 \text{ से } a^3 = 1000$$

या $\quad a = 10 \quad (1)$

तथा $\quad \frac{a}{r} + a + ar = 35$ से $\frac{10}{r} + 10 + 10r = 35 \quad$ [(1) के प्रयोग से]

सरल करने पर, $\quad 2r^2 - 5r + 2 = 0$

या $\quad (r-2)(2r-1) = 0$

या $\quad r = 2, r = 1/2$

अतः अभीष्ट संख्याएँ 5, 10, 20 हैं।

उदाहरण 19: यदि किसी गु.श्रे. का p वां, q वां तथा r वां पद क्रमशः x, y, z हैं, तो सिद्ध कीजिए:

$$x^{q-r}\, y^{r-p}\, z^{p-q} = 1$$

हल: माना कि गु.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात R है। तब दिया हुआ है:

$$T_p = a\,R^{p-1} = x,$$

$$T_q = a\,R^{q-1} = y,$$

$$T_r = a\,R^{r-1} = z$$

$$\therefore \quad x^{q-r}\, y^{r-p}\, z^{p-q} = \left(aR^{p-1}\right)^{q-r} \left(aR^{q-1}\right)^{r-p} \left(aR^{r-1}\right)^{p-q}$$

$$= a^{(q-r)+(r-p)+(p-q)} R^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$$

$$= a^0 R^0 = 1$$

उदाहरण 20: यदि दो राशियों a तथा b के बीच स.मा., गु.मा. का n गुणा है, तो सिद्ध कीजिए:

$$a/b = \left(2n^2 - 1\right) + 2n\sqrt{n^2 - 1}$$

हल: a तथा b के मध्य स.मा. $= \frac{a+b}{2}$ तथा a तथा b के मध्य गु.मा. $= \sqrt{ab}$

दिया हुआ है:

$\frac{a+b}{2} = n\sqrt{ab} \quad$ या $\quad a + b = 2n\sqrt{ab} \quad (1)$

अब, $\quad a - b = \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} \quad$ या $\quad a - b = \sqrt{4n^2ab - 4ab}$

या $\quad a - b = 2\sqrt{ab}\sqrt{n^2 - 1} \quad (2)$

(1) में (2) का भाग देने पर, $\quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$

या $\quad \frac{a}{b} = \frac{n + \sqrt{n^2 - 1}}{n - \sqrt{n^2 - 1}} \quad$ [योगांतरानुपात से]

$$= \frac{\left(n + \sqrt{n^2 - 1}\right)^2}{n^2 - \left(n^2 - 1\right)} \quad \text{[परिमेयकरण करने पर]}$$

$$= \left(2n^2 - 1\right) + 2n\sqrt{n^2 - 1}$$

प्रश्नमाला 8.3

1. (i) श्रेढ़ी $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$ का 7वाँ पद ज्ञात कीजिए।

   (ii) $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots$ का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

2. (i) श्रेढ़ी $64 + 32 + 16 + 8 + \ldots$ का कौनसा पद $1/64$ है?

   (ii) श्रेढ़ी $6 + 3 + 3/2 + 3/4 + \ldots$ का कौनसा $3/256$ है?

3. गुणोत्तर श्रेढ़ी $5 + 10 + 20 + 40 + \ldots$ का सार्व अनुपात तथा n वाँ पद ज्ञात कीजिए।
4. गुणोत्तर श्रेढ़ी 2, 6, 18, 54, ..., 118098 का अन्त से 5 वाँ पद ज्ञात कीजिए।
5. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का तीसरा पद 32 तथा 7वाँ पद 8192 है तो श्रेढ़ी का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।
6. गुणोत्तर श्रेढ़ी ज्ञात कीजिये जिसका तीसरा पद 1 तथा सातवाँ पद 16 है।
7. (i) 3 तथा 48 के मध्य 3 गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

   (ii) 2 व 256 के मध्य 6 गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

8. x के किस मान के लिए संख्याएँ $x, x + 3, x + 9$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है?
9. ऐसे चार पद ज्ञात कीजिए। जो गुणोत्तर श्रेढ़ी में हो, जिसका तीसरा पद प्रथम पद से 4 अधिक है तथा दूसरा पद चौथे पद से 36 अधिक है।
10. किसी गु.श्रे. का चौथा पद p, सातवां पद q, तथा दसवां पद r है, तो सिद्ध कीजिएः $q^2 = pr$.
11. यदि गु.श्रे. में $(p + q)$ वां पद x तथा $(p - q)$ वां पद y है, तो p वां पद ज्ञात कीजिए।
12. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेढ़ी में तथा $a^x = b^y = z^z$ है तो सिद्ध कीजिए। कि $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$.
13. यदि a तथा b के बीच n गु.मा. प्रविष्ट किये जाए तो सिद्ध कीजिए कि सभी गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल $\left(\sqrt{ab}\right)^n$ होगा।
14. x, y, z गु.श्रे. में हैं। x, y का स.मा. A_1 तथा y, z का स.मा. A_2 है, तो सिद्ध कीजिएः

    (i) $\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} = \frac{2}{y}$ **(ii)** $\frac{x}{A_1} + \frac{z}{A_2} = 2$

8.13 गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल
(Sum of first n terms of a G.P.)

माना कि किसी गु.श्रे. का प्रथम पद a, सार्वअनुपात r तथा प्रथम n पदों का योगफल S_n है। तब

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \quad (1)$$

दोनों पक्षों को r से गुणा करने पर

$$r S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n \quad (2)$$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$$S_n - r S_n = a - ar^n$$

या $S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$

फलतः $$S_n = a\left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right) = \frac{a - lr}{1 - r}$$

या $a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) = \frac{lr - a}{r - 1}$, जहाँ $\ell = ar^{n-1}$ $[r \neq 1]$

टिप्पणीः कुछ लेखक S_n के लिए निम्नलिखित दो भिन्न सूत्रों का प्रयोग करते हैं:

$$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right), r < 1$$

तथा
$$S_n = a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right), r > 1$$

वास्तव में ये दोनों सूत्र पूर्णतया एकसमान है। ध्यान में रखने योग्य बात यह है कि उपर्युक्त सूत्र $r = 1$ के लिए लागू नहीं होता है। $r = 1$ के लिए $S_n = na$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 21: गुणोत्तर श्रेढ़ी $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$ का प्रथम 10 पदों तक का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a = \sqrt{3}, r = \sqrt{3}$ तथा $n = 10$

$\therefore$ 10 पदों का योगफल $= S_{10} = \dfrac{\sqrt{3}\left[(\sqrt{3})^{10}-1\right]}{\sqrt{3}-1}$

$$\Rightarrow \quad S_{10} = \frac{\sqrt{3}[243-1]}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(242)}{2} \times (\sqrt{3}+1)$$

$$\Rightarrow \quad S_{10} = 121(3+\sqrt{3})$$

उदाहरण 22: गु.श्रे. **3, 6, 12, ...** के कितने पदों का योगफल 189 होगा?

हल: यहाँ $a = 3$, $r = 2$ तथा $S_n = 189$ हैं। अतः

सूत्र
$$S_n = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$$

से,
$$189 = \frac{3\left(2^n-1\right)}{2-1}$$

या $\quad 2^n - 1 = 189/3 = 63$

या $\quad 2^n = 64 = 2^6 \quad \Rightarrow \quad n = 6$

उदाहरण 23: किसी गु.श्रे. का प्रथम पद 7, अंतिम पद 567 तथा पदों का योगफल 847 हैं, श्रेढ़ी का सार्वअनुपात ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $a = 7$, $T_n = 567$ तथा $S_n = 847$ हैं।

$\therefore \quad T_n = ar^{n-1} = 567$ [दिया हुआ है]

या $\quad r^{n-1} = \dfrac{567}{7} = 81$

या $\quad r^n = 81r$ [दोनों ओर r से गुणा करने पर] (1)

अब, $\quad S_n = \dfrac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$ से $\quad 847 = \dfrac{7\left(81r-1\right)}{r-1}$ [(1) के प्रयोग से]

या $\quad 121\left(r-1\right) = 81r-1$

या $\quad 40r = 120 \quad \Rightarrow \quad r = 3$

उदाहरण 24: श्रेणी 5 + 55 + 555 + 5555 + . . . के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल,

$$S_n = 5+55+555+5555+.....n \text{ पद}$$

$$= 5[1+11+111+1111+.....n \text{ पद}]$$

$$= \frac{5}{9}[9+99+999+9999+.....n \text{ पद}]$$

$$= \frac{5}{9}\left[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+.....n \text{ पद}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\left(10+10^2+10^3+.....n \text{ पद}\right)-\left(1+1+1+.....n \text{ पद}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10\left(10^n-1\right)}{10-1}-n\right] = \frac{50}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{5n}{9}$$

उदाहरण 25: किसी गु.श्रे. के $n, 2n$ तथा $3n$ पदों का योगफल क्रमशः $\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}, \boldsymbol{S_3}$ है, तो सिद्ध कीजिए: $S_1^2+S_2^2 = S_1\left(S_2+S_3\right)$

हल: माना कि गु.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है। तब

$$S_1 = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}, S_2 = \frac{a\left(r^{2n}-1\right)}{r-1}, S_3 = \frac{a\left(r^{3n}-1\right)}{r-1}$$

अब $$S_1^2+S_2^2 = \frac{a^2\left(r^n-1\right)^2}{(r-1)^2}+\frac{a^2\left(r^{2n}-1\right)^2}{(r-1)^2} = \frac{a^2}{(r-1)^2}\left\{\left(r^n-1\right)^2+\left(r^{2n}-1\right)^2\right\}$$

$$= \frac{a^2}{(r-1)^2}\left\{\left(r^n-1\right)^2+\left(r^n-1\right)^2\left(r^n+1\right)^2\right\} = \frac{a^2}{(r-1)^2}\left(r^n-1\right)^2\left\{1+\left(r^n+1\right)^2\right\}$$

या $$S_1^2+S_2^2 = \frac{a^2}{(r-1)^2}\left(r^n-1\right)^2\left(r^{2n}+2r^n+2\right)$$

तथा $$S_1\left(S_2+S_3\right) = \frac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}\left[\frac{a\left(r^{2n}-1\right)}{r-1}+\frac{a\left(r^{3n}-1\right)}{r-1}\right] = \frac{a^2\left(r^n-1\right)}{(r-1)^2}\left[\left(r^{2n}-1\right)+\left(r^{3n}-1\right)\right]$$

$$= \frac{a^2\left(r^n-1\right)}{(r-1)^2}\left[\left(r^n-1\right)\left(r^n+1\right)+\left(r^n-1\right)\left(r^{2n}+r^n+1\right)\right] = \frac{a^2\left(r^n-1\right)^2}{(r-1)^2}\left[r^n+1+r^{2n}+r^n+1\right]$$

$$= \frac{a^2\left(r^n-1\right)^2}{(r-1)^2}\left(r^{2n}+2r^n+2\right) \qquad \ldots(2)$$

फलतः $S_1^2+S_2^2 = S_1\left(S_2+S_3\right)$

उदाहरण 26: श्रेणी 0.2 + 0.22 + 0.222 + ... के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल,

$$S_n = 0.2+0.22+0.222+.....n \text{ पद}$$

$$= 2(0.1+0.11+0.111+.....n \text{ पद})$$

$$= \frac{2}{9}(0.9+0.99+0.999+.....n \text{ पद})$$

$$= \frac{2}{9}\left[(1-0.1)+(1-0.01)+(1-0.001)+.....n \text{ पद}\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[(1+1+.....n \text{ पद})-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+....n \text{ पद}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[n-\frac{1}{10}\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right] = \frac{2}{81}\left[9n-1+\frac{1}{10^n}\right]$$

उदाहरण 27: सिद्ध कीजिए कि श्रेणी 11 + 103 + 1005 + . . . का n पदों का योगफल $\frac{10}{9}(10^n-1)+n^2$ है।

हल: माना कि दी गई श्रेणी के n पदों का योगफल S_n है। तब

$$S_n = 11+103+1005+.....n \text{ पद}$$

$$= (10+1)+(10^2+3)+(10^3+5)+....+\{10^n+(2n-1)\}$$

$$= (10+10^2+.....+10^n)+\{1+3+.....+(2n-1)\}$$

$$= \frac{10(10^n-1)}{10-1}+\frac{n}{2}\{1+2n-1\} = \frac{10}{9}(10^n-1)+n^2$$

[गु.श्रे. तथा स.श्रे. के योगफल सूत्र से]

8.14 अनंत गु.श्रे. का योगफल (Sum of an infinite G.P.) :

माना कि एक अनंत गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है, जहाँ $-1<r<1$ अर्थात् $|r|<1$ है। तब अनुच्छेद 9.12 से इस गु.श्रे. के प्रथम n पदों का योगफल S_n दिया जाता है:

$$S_n = a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}\right)$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \qquad [\because |r|<1 \text{ तथा } \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \text{ यदि } |r|<1]$$

फलतः अनंत गु.श्रे. का योगफल $S_\infty = \frac{a}{1-r}$, यदि $|r|<1$.

टिप्पणीः

1. यदि $|r| \geq 1$, तब अनंत गु.श्रे. का योगफल अनंत की ओर प्रवृत होता है। अतः अनंत गु.श्रे. के योगफल का उपर्युक्त सूत्र r का संख्यात्मक मान 1 से कम अर्थात् $|r| < 1$ होने पर ही सार्थक है।
2. उपर्युक्त सूत्र के प्रयोग से किसी परिमेय संख्या को, आवर्ती दशमलव विस्तार रूप से भिन्नात्मक रूप में व्यक्त किया जा सकता है। किसी परिमेय संख्या को दशमलव रूप में व्यक्त करने पर यदि दशमलव के बाद कोई एक अंक या अंकों का समूह अनंत बार आता है, तो इसे आवर्ती दशमलव विस्तार कहते हैं। जैसे 2·454545........, 0·3565656........ इनको क्रमशः $2\cdot\overline{45}$ तथा $0\cdot 3\overline{56}$ के रूप में लिखते हैं। आवर्ती दशमलव में पुनरावृति वाले अंक समूह पर एक रेखा (bar) या बिन्दु (dot) लगाकर लिखा जाता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 28: निम्नलिखित अनंत गु.श्रे. का योगफल ज्ञात कीजिएः

(i) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ (ii) $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\ldots$

हलः (i) यहाँ $a=1$ तथा $r=\frac{1}{3}$ $\therefore$ $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

(ii) यहाँ $a=\frac{2}{3}$ तथा $r=-\frac{2}{3}$ $\therefore$ $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{2/3}{1-(-2/3)}=\frac{2/3}{1+(2/3)}=\frac{2}{5}$

उदाहरण 29: एक अनंत गु.श्रे. के प्रथम दो पदों का योगफल 20 है तथा प्रत्येक पद अपने बाद आने वाले सभी पदों के योगफल का तीन गुणा हैं। श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि अनंत गु.श्रे. $a, ar, ar^2, \ldots$ है। तब

प्रथम दो पदों का योगफल $= a + ar = 20$,

या $a(1+r)=20$ (1)

तथा प्रत्येक पद अपने आगे के पदों के योग का तीन गुणा है। अतः

$$a=3\left(\frac{ar}{1-r}\right) \quad \text{या} \quad 1-r=3r \quad \Rightarrow \quad r=\tfrac{1}{4}$$

r का यह मान (1) में रखने पर,

$$a=\frac{20}{1+\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad a=16$$

अतः अभीष्ट गु.श्रे. $16, 4, 1, \frac{1}{4}$ है।

उदाहरण 30: परिमेय संख्या (भिन्नात्मक रूप) ज्ञात कीजिए, जिसका दशमलव विस्तार रूप $0\cdot 3\overline{75}$ है।

हलः $0\cdot 3\overline{75}=\cdot 375\ 75\ 75\ldots$

$$=\cdot 3+\cdot 075+\cdot 00075+\ldots$$

$$=\frac{3}{10}+\left(\frac{75}{1000}+\frac{75}{100000}+\frac{75}{10000000}+\ldots\right)$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{75}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right)$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{75}{10^3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}\right)$$ [सूत्र $S_\infty=\frac{a}{1-r}$ के प्रयोग से]

$$=\frac{3}{10}+\frac{75}{1000}\times\frac{100}{99}=\frac{3}{10}+\frac{75}{990}=\frac{372}{990}=\frac{62}{165}$$

प्रश्नमाला 8.4

1. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी का योगफल ज्ञात कीजिए।

(i) $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots$ 7 पदों तक। (ii) $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \ldots 8$ पदों तक।

(iii) $a^8 - a^7 b + a^6 b^2 - a^5 b^3 + \ldots 10$ पदों तक।

2. निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेढ़ी का योगफल ज्ञात कीजिए।

(i) $2 + 6 + 18 + 54 + \ldots + 486.$ (ii) $64 + 32 + 16 + \ldots + \frac{1}{4}$

3. गु.श्रे. 4, 12, 36, ... के कितने पदों का योगफल 484 है?

4. किसी गु.श्रे. के प्रथम 5 पदों का योगफल 124 तथा सार्वअनुपात 2 हैं। श्रेढ़ी का प्रथम पद ज्ञात कीजिए।

5. किसी गु.श्रे. का सार्वअनुपात 2, अंतिम पद 160 तथा योगफल 310 है। श्रेढ़ी का प्रथम पद ज्ञात कीजिए।

6. निम्नलिखित श्रेढ़ियों के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

(i) $7 + 77 + 777 + \ldots$ (ii) $\cdot 5 + \cdot 55 + \cdot 555 + \ldots$ (iii) $\cdot 9 + \cdot 99 + \cdot 999 + \ldots$

7. निम्नलिखित आवर्ती दशमलव विस्तार वाली परिमेय संख्याओं का भिन्नात्मक रूप ज्ञात कीजिए:

(i) $2 \cdot 3\overline{5}$ (ii) $\cdot 6\overline{25}$ (iii) $2 \cdot \overline{752}$

8. किसी अनंत गु.श्रे. का प्रथम पद 64 है तथा प्रत्येक पद उसके बाद आने वाले पदों के योगफल का तीन गुणा है। श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए।

9. यदि $y = x + x^2 + x^3 + \ldots \infty$, जहाँ $|x| < 1$ हो, तब सिद्ध कीजिए $x = \frac{y}{1+y}$.

10. यदि $x = 1 + a + a^2 + \ldots \infty$, जहाँ $|a| < 1$ तथा

$y = 1 + b + b^2 + \ldots \infty$, जहाँ $|b| < 1$ हो, तब

सिद्ध कीजिए: $1 + ab + a^2 b^2 + \ldots \infty = \frac{xy}{x + y - 1}$

11. श्रेढ़ी का योग ज्ञात कीजिये।

$\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6}\right) + \ldots \infty$ तक

8.15 समांतरीय गुणोत्तर श्रेणी (Arithmetico Geometric Series) :

किसी समांतर श्रेढ़ी तथा गुणोत्तर श्रेढ़ी के संगत पदों के गुणनफल से प्राप्त पदों की श्रेणी को समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी कहते हैं।

उदाहरण : $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$ एक समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी है, जिसमें 1, 3, 5, 7,... स.श्रे. है, तथा $1, x, x^2, \ldots$ गु.श्रे. है। इस स.श्रे. का n वां पद $(2n - 1)$ है तथा गु.श्रे. का n वां पद x^{n-1} है। अतः समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी का n वां पद $(2n-1)x^{n-1}$ होगा।

समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक रूप $a, (a+d)r, (a+2d)r^2, \ldots$ होता है तथा इसका व्यापक पद $T_n = \{a + (n-1)d\} r^{n-1}$ होता है।

समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात करना:

माना कि किसी स.गु.श्रे. के प्रथम n पदों का योगफल S_n है। तब

$$S_n = a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + (a+3d)r^3 + \ldots + [a + (n-1)d] r^{n-1} \quad (1)$$

दोनों पक्षों को r से गुणा करने पर,

$$r S_n = ar + (a+d)r^2 + (a+2d)r^3 + \ldots + [a + (n-2)d] r^{n-1} + [a + (n-1)d] r^n \quad (2)$$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$$(1-r)S_n = a+\left[dr+dr^2+dr^3+.....+dr^{n-1}\right]-\left[a+(n-1)d\right]r^n$$

$$= a+\frac{dr\left(1-r^{n-1}\right)}{1-r}-\left[a+(n-1)d\right]r^n$$

या $$S_n = \frac{a}{1-r}+\frac{dr\left(1-r^{n-1}\right)}{(1-r)^2}-\frac{\left[a+(n-1)d\right]r^n}{1-r} \qquad (3)$$

यदि r का संख्यात्मक मान इकाई से कम हो अर्थात् $|r|<1$ तथा श्रेणी में पदों की संख्या अनंत हो, तो $r^n, nr^n \to 0$

अतः $S_n \to \dfrac{a}{1-r}+\dfrac{dr}{(1-r)^2}$, जब $n\to\infty$

फलतः जब $|r|<1$ हो, तब अनंत स.गु.श्रे. का योगफल $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}+\dfrac{dr}{(1-r)^2}$ (4)

टिप्पणी : उपर्युक्त परिणाम (3) तथा (4) को सूत्र की भांति प्रयोग न करके इसमें दी गई विधि से योगफल ज्ञात करना चाहिए।

8.16 अंतर विधि से श्रेणी का योगफल (Sum of series by difference method)

यदि किसी श्रेणी में क्रमागत पद युग्मों का अंतर गु.श्रे. में हो, तो ऐसी श्रेणी का योगफल ज्ञात करने के लिये दी हुई श्रेणी के पदों के नीचे उसी श्रेणी के पदों को एक–एक पद आगे बढ़ाकर लिखा जाता है, फिर घटाने पर प्राप्त श्रेणी के पद गु.श्रे. में होंगे। इससे श्रेणी का n वां पद प्राप्त किया जाता है तथा $n = 1, 2, 3, \ldots$ रखकर प्रत्येक पद को प्राप्त कर उनका योग करने से श्रेणी का योगफल ज्ञात किया जाता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 31: श्रेणी $\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{4^2}+\dfrac{11}{4^3}+\ldots$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दी हुई श्रेणी समांतरीय–गुणोत्तर श्रेणी है जिसकी संगत स.श्रे.

$3, 7, 11, \ldots$ तथा गु.श्रे. $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4^2}, \dfrac{1}{4^3}, \ldots$ है।

सं.श्रे. का n वां पद $=\left[3+(n-1)4\right]=4n-1$ तथा

गु.श्रे. का n वां पद $=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{4^n}$ है।

अतः दी गई स.गु.श्रे. का n वां पद $\dfrac{4n-1}{4^n}$ होगा।

$$\therefore \qquad S_n = \frac{3}{4}+\frac{7}{4^2}+\frac{11}{4^3}+\ldots+\frac{4n-5}{4^{n-1}}+\frac{4n-1}{4^n} \qquad (1)$$

दोनों पक्षों को $\dfrac{1}{4}$ से गुणा करने पर,

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{3}{4^2}+\frac{7}{4^3}+\frac{11}{4^4}+\ldots+\frac{4n-5}{4^n}+\frac{4n-1}{4^{n+1}} \qquad (2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = \frac{3}{4} + \left\{\frac{4}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \ldots + \frac{4}{4^n}\right\} - \frac{4n-1}{4^{n+1}}$$

या $$S_n\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} + \left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right\} - \frac{4n-1}{4^{n+1}}$$

या $$S_n\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} + \frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{4}} - \frac{4n-1}{4^{n+1}}$$

या $$S_n = 1 + \frac{4}{9}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right) - \frac{4n-1}{3.4^n}$$

उदाहरण 32: श्रेणी $1+\frac{3}{4}+\frac{7}{4^2}+\frac{15}{4^3}+\ldots$ के अनंत पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: मानाकि $S_\infty = 1+\frac{3}{4}+\frac{7}{4^2}+\frac{15}{4^3}+\ldots$ (1)

दोनों पक्षों को $\frac{1}{4}$ से गुणा करने पर,

$$\frac{1}{4}S_\infty = \frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{7}{4^3}+\frac{15}{4^4}+\ldots \quad (2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर

$$S_\infty - \frac{1}{4}S_\infty = 1+\frac{2}{4}+\frac{4}{4^2}+\frac{8}{4^3}+\ldots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

या $$S_\infty\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$ [सूत्र $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ के प्रयोग से]

$\therefore$ $$S_\infty = 2.\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

उदाहरण 33: श्रेणी $1 + 5 + 13 + 29 + 61 + \ldots$ का n वां पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल: दी गई श्रेणी के क्रमागत पद युग्मों का अंतर 4, 8, 16, . . . गु.श्रे. में हैं अतः इसके n पदों का योगफल अंतर विधि से ज्ञात करेंगे।

माना कि श्रेणी का n वां पद T_n तथा n पदों का योग S_n है। तब

$$S_n = 1+5+13+29+61+\ldots+T_n \quad (1)$$

एक स्थान आगे बढ़ाकर लिखने पर

$$S_n = 1+5+13+29+\ldots+T_{n-1}+T_n \quad \ldots(2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$$0 = 1+\{4+8+16+\ldots+(n-1) \text{ पद}\} - T_n$$

या $$T_n = 1+\{4+8+16+\ldots+(n-1) \text{ पद}\} = 1+\frac{4\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1} = 2^{n+1}-3$$

अब $n = 1, 2, 3, \ldots$ रखने पर,

$$T_1 = 2^2 - 3,\ T_2 = 2^3 - 3,\ T_3 = 2^4 - 3, \ldots,$$

$$\therefore \quad S_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n = (2^2 - 3) + (2^3 - 3) + (2^4 - 3) + \ldots + (2^{n+1} - 3)$$

$$= (2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n+1}) - 3(1 + 1 + \ldots n \text{ पद}) = \frac{2^2(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n$$

फलतः $S_n = 2^{n+2} - 3n - 4$

प्रश्नमाला 8.5

1. निम्नलिखित श्रेणियों का n पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए:

(i) $1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \ldots$ **(ii)** $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$ **(iii)** $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \ldots$

2. निम्नलिखित श्रेणियों का अनंत पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए:

(i) $\frac{3}{7} + \frac{5}{21} + \frac{7}{63} + \frac{9}{189} + \ldots$ **(ii)** $\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \ldots$ **(iii)** $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots, |x| < 1$

3. निम्नलिखित श्रेणियों का n वां पद तथा n पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए:

(i) $2 + 5 + 14 + 41 + 122 + \ldots$ **(ii)** $3.2 + 5.2^2 + 7.2^3 + \ldots$ **(iii)** $1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + \ldots$

4. श्रेणी $2 + 5x + 8x^2 + 11x^3 + \ldots$ का n पदों तक योगफल ज्ञात कीजिए तथा इससे अनंत श्रेणी के योगफल का भी निगमन कीजिए, यदि $|x| < 1$.

8.17 प्रथम n प्राकृत संख्या, उनके वर्गों तथा घनों से बनी श्रेणीयों का योगफल (Sum to n terms of series of natural numbers, their squares and cubes)

(i) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योगफल (Sum of first n natural numbers) :

माना कि S_n (या $\sum n$) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के योगफल को निरूपित करता है तो

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

यहाँ $a = 1$ तथा $d = 1$

$$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2.1 + (n-1)1\} = \frac{n(n+1)}{2}$$

अतः $\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योगफल
(Sum of squares of first n natural numbers)

माना कि $\quad S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \sum n^2$

सर्वसमिका $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$ में $x = 1, 2, 3, \ldots, (n-1), n.$

रखने पर

$$2^3 - 1^3 = 3.1^2 + 3.1 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3.2^2 + 3.2 + 1$$
$$4^3 - 3^3 = 3.3^2 + 3.3 + 1$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$$

तथा $\quad (n+1)^3 - n^3 = 3.n^2 + 3.n + 1$

स्तम्भानुसार जोड़ने पर,

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3.\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2\right) + 3\left(1 + 2 + ... + n\right) + \left(1 + 1 + ... + 1, n \text{ पद}\right)$$

या $\quad (n+1)^3 - 1^3 = 3S_n + 3\sum n + n \qquad$ या $\quad n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_n + 3\dfrac{n(n+1)}{2} + n$

या $$3S_n = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3n^2 + 3n}{2} - n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\therefore \quad S_n = \sum n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योगफल
(Sum of cubes of first n natural numbers)

माना कि $\quad S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ...n^3 = \sum n^3$

सर्वसमिका $\quad (x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ में $\quad x = 1, 2, 3, ..., (n-1), n$ रखने पर,

$$2^4 - 1^4 = 4.1^3 + 6.1^2 + 4.1 + 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4.2^3 + 6.2^2 + 4.2 + 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4.3^3 + 6.3^2 + 4.3 + 1$$
$$....... \qquad ....$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1,$$

तथा $\quad (n+1)^4 - n^4 = 4.n^3 + 6.n^2 + 4.n + 1$

स्तम्भानुसार जोड़ने पर,

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3\right) + 6\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2\right)$$
$$+4\left(1 + 2 + 3 + ... + n\right) + \left(1 + 1 + ... + 1, n \text{ पद}\right)$$

या $\quad n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4S_n + 6.\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4.\dfrac{n(n+1)}{2} + n$

या $\quad 4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n$

सरल करने पर, $4S_n = n^2\left(n^2 + 2n + 1\right)$

या $\quad S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad$ या $\quad \sum n^3 = S_n = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

8.18 अंतर विधि से श्रेणी का योगफल (Sum of series by difference method)

यदि किसी श्रेणी में क्रमागत पद युग्मों का अंतर स.श्रे. में हो, तो ऐसी श्रेणी का योगफल ज्ञात करने के लिए दी गई श्रेणी के पदों के नीचे उसी श्रेणी के पदों को एक–एक पद आगे बढ़ाकर लिखा जाता है, फिर घटाने पर प्राप्त श्रेढ़ी के पद सं. श्रेढ़ी में होंगे। इससे श्रेढ़ी का n वां पद ज्ञात किया जाता है और फिर $\sum n, \sum n^2$ तथा $\sum n^3$ सूत्रों का प्रयोग कर श्रेणी का योगफल ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण : निम्नलिखित श्रेणी का n वां पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

$1 + 6 + 13 + 22 + \ldots$

हलः दी गई श्रेणी के क्रमागत पद युग्मों का अंतर 5, 7, 9, ... स.श्रे. में है। अतः इसका n वां पद तथा n पदों का योगफल अंतर विधि से ज्ञात करेंगे।

माना कि श्रेणी का n वां पद T_n तथा n पदों का योगफल S_n है। तब

$$S_n = 1 + 6 + 13 + 22 + \ldots + T_n \qquad (1)$$

एक स्थान आगे बढ़ाकर लिखने पर,

$$S_n = 1 + 6 + 13 + \ldots + T_{n-1} + T_n \qquad (2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$$0 = 1 + \{5 + 7 + 9 + \ldots + (n-1) \text{ पद}\} - T_n$$

या $$T_n = 1 + \{5 + 7 + 9 + \ldots + (n-1) \text{ पद}\} = 1 + \frac{(n-1)}{2}\{2 \cdot 5 + (n-2)2\} = 1 + (n-1)(n+3)$$

सरल करने पर,

$$T_n = n^2 + 2n - 2$$

$$\therefore \quad S_n = \sum T_n = \Sigma(n^2 + 2n - 2) = \Sigma n^2 + 2\Sigma n - 2\Sigma 1$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2.\frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 6n - 12n}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 - 5n}{6}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 34 : उस श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका n वां पद $n(n+1)(3n-1)$ है।

हलः यहाँ $$T_n = n(n+1)(3n-1) = 3n^3 + 2n^2 - n$$

$$\therefore \quad S_n = \Sigma T_n$$

या $$S_n = \Sigma(3n^3 + 2n^2 - n) = 3\Sigma n^3 + 2\Sigma n^2 - \Sigma n$$

$$= 3.\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[9n(n+1) + 4(2n+1) - 6\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}\left[9n^2 + 17n - 2\right] = \frac{n(n+1)(n+2)(9n-1)}{12}$$

उदाहरण 35: निम्नलिखित श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

$\mathbf{1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9} + \ldots$

हलः यह श्रेणी अनुक्रमों 1, 3, 5, . . . ; 3, 5, 7, . . . तथा 5, 7, 9, . . . के संगत पदों के गुणनफल से बनी है सभी स.श्रे. हैं अतः श्रेणी का n वां पद अनुक्रमों के n वें पदों का गुणनफल

$$\therefore \quad T_n = (2n-1)(2n+1)(2n+3) = 8n^3 + 12n^2 - 2n - 3$$

$\therefore \quad S_n = \sum T_n$

या $\quad S_n = \sum\left(8n^3 + 12n^2 - 2n - 3\right)$

$$= 8\sum n^3 + 12\sum n^2 - 2\sum n - 3\sum 1$$

$$= 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} - 3n$$

$$= n(n+1)\left[2n(n+1) + 2(2n+1) - 1\right] - 3n = n(n+1)\left(2n^2 + 6n + 1\right) - 3n$$

प्रश्नमाला 8.6

1. उस श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका n वां पद है:

   (i) $3n^2 + 2n + 5$ **(ii)** $4n^3 + 7n + 1$ **(iii)** $n(n+1)(n+2)$

2. निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $3^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2 + \ldots$ **(ii)** $2^3 + 5^3 + 8^3 + 11^3 + \ldots$ **(iii)** $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots$

3. निम्नलिखित श्रेणियों का n वां पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots$ **(ii)** $1.2.4 + 2.3.7 + 3.4.10 + \ldots$

4. निम्नलिखित श्रेणियों का n वां पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $3 + 8 + 15 + 24 + \ldots$ **(ii)** $1 + 6 + 13 + 22 + \ldots$

5. निम्नलिखित श्रेणियों का n वां पद तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $1 + (1+2) + (1+2+3) + \ldots$ **(ii)** $1^2 + \left(1^2 + 2^2\right) + \left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) + \ldots$

8.19 हरात्मक श्रेढ़ी (Harmonic Progression) :

यदि किसी श्रेढ़ी के पदों के व्युत्क्रम (reciprocal) उसी क्रम में लिखने पर समांतर श्रेढ़ी में हों, तो उसे हरात्मक श्रेढ़ी कहते हैं। निम्नलिखित श्रेढ़ियों पर विचार कीजिए:

(i) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$ **(ii)** $\frac{1}{20}, \frac{1}{17}, \frac{1}{14}, \frac{1}{11} \ldots$

उपर्युक्त श्रेढ़ियां हरात्मक श्रेढ़ियां हैं, क्योंकि इनके व्युत्क्रम अर्थात् 3,5,7,9, . . .; 20,17,14,11, . . . समांतर श्रेढ़ी में हैं।

व्यापक पद (General term): हरात्मक श्रेढ़ी का मानक रूप है:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \ldots, \frac{1}{a+(n-1)d}, \ldots$$

इसके संगत समांतर श्रेढ़ी होगी:

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d, \ldots$$

स.श्रे. का n वां पद $a+(n-1)d$ होता हैं अतः हरात्मक श्रेढ़ी का व्यापक (n वां) पद होगा:

$$T_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$$

टिप्पणी

1. हरात्मक श्रेढ़ी के प्रश्न हल करने के लिए इसके पदों का क्रमिक रूप से व्युत्क्रम लेकर इसके संगत स.श्रे. बनाते हैं, इसके बाद स.श्रे. के संबंधित सूत्रों का प्रयोग करके उसका हल निकालते हैं।
2. हरात्मक श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात करने के लिए कोई व्यापक सूत्र नहीं हैं।

8.20 हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) :

यदि तीन या तीन से अधिक राशियाँ ह.श्रे. में हैं, तो प्रथम तथा अंतिम राशि के मध्य शेष सभी राशियाँ, उनके मध्य हरात्मक माध्य कहलाती हैं।

उदाहरणः यदि $a, H_1, H_2, H_3, \ldots\ldots, H_n, b$ ह.श्रे. में हैं, तो $H_1, H_2, H_3, \ldots\ldots, H_n$; a तथा b के मध्य n हरात्मक माध्य कहलाते हैं। हरात्मक माध्य को संक्षेप में ह.मा. (H.M.) से व्यक्त किया जाता है।

दी हुई दो राशियों के मध्य एक हरात्मक माध्य ज्ञात करनाः

माना कि दी हुई दो राशियाँ a तथा b हैं। उनके मध्य एक ह.मा. H है। अतः a, H, b ह.श्रे. में हैं। अर्थात्

$\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ स.श्रे. में हैं। $\quad \therefore \quad \frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H}$

या $\frac{2}{H} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ $\quad$ या $\frac{2}{H} = \frac{a+b}{ab}$ $\quad$ या $H = \frac{2ab}{a+b}$

दी हुई दो राशियों के मध्य n हरात्मक माध्य ज्ञात करनाः

माना कि दी हुई दो राशियाँ a तथा b हैं। उनके मध्य n हरात्मक माध्य क्रमशः $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ हैं।

अतः $a, H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n, b$ हे. श्रे. में हैं। अर्थात्

$\frac{1}{a}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}, \frac{1}{H_3}, \ldots, \frac{1}{H_n}, \frac{1}{b}$ स.श्रे. में हैं।

इस स.श्रे. का अंतिम पद $1/b, (n+2)$ वां पद हैं। अतः

$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + (n+2-1)d$ $\quad$ या $\quad \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + (n+1)d$

सरल करने पर, $d = \frac{a-b}{ab(n+1)}$

$\therefore \quad \frac{1}{a}$ तथा $\frac{1}{b}$ के मध्य n स.मा. निम्नलिखित होंगेः

$\frac{1}{a} + d, \frac{1}{a} + 2d, \frac{1}{a} + 3d, \ldots, \frac{1}{a} + nd$

या $\quad \frac{1+ad}{a}, \frac{1+2ad}{a}, \frac{1+3ad}{a}, \ldots, \frac{1+nad}{a}$

अतः a तथा b के मध्य n ह. मा. निम्नलिखित होंगेः

$\frac{a}{1+ad}, \frac{a}{1+2ad}, \frac{a}{1+3ad}, \ldots, \frac{a}{1+nad}$, $\quad$ जहाँ $d = \frac{a-b}{ab(n+1)}$.

टिप्पणीः उपर्युक्त से स्पष्ट है कि हरात्मक माध्य ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम संगत स.श्रे. के समांतर माध्य ज्ञात करेंगे। इस प्रकार प्राप्त समांतर माध्यों के व्युत्क्रम अभीष्ट हरात्मक माध्य होंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 36: निम्नलिखित हरात्मक श्रेढ़ियों के सम्मुख दिया गया पद ज्ञात कीजिएः

(i) $\frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{15}, \frac{1}{19}, \ldots 10$ वां पद $\quad$ (ii) $\frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \ldots 15$ वां पद

हलः (i) दी गई ह.श्रे. के संगत स.श्रे. निम्नलिखित हैः

7, 11, 15, 19, ...

इस स.श्रे. के लिए $a = 7, d = 11 - 7 = 4$

$\therefore \quad T_{10} = a + 9d = 7 + 9 \times 4 = 43$

अतः संगत हरात्मक श्रेणी का 10 वां पद $= 1/43$

(ii) दी गई ह.श्रे. के संगत स.श्रे. निम्नलिखित है:

$$5, \frac{9}{2}, 4, \frac{7}{2}, ...$$

इस स.श्रे. के लिये $a = 5, d = 9/2 - 5 = -1/2$

$\therefore \quad T_{15} = a + 14d = 5 + 14 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

अतः संगत हरात्मक श्रेढ़ी का 15 वां पद $= -1/2$

उदाहरण 37: वह हरात्मक श्रेढ़ी ज्ञात कीजिए जिसका चौथा पद $1/2$ तथा 10 वां पद $1/4$ है।

हलः संगत स.श्रे. का चौथा पद 2 तथा 10 वां पद 4 होगा।

$\therefore \quad T_4 = 2 \Rightarrow a + 3d = 2$ (1)

तथा $\quad T_{10} = 4 \Rightarrow a + 9d = 4$ (2)

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर,

$a = 1$ तथा $d = 1/3$

अतः स.श्रे. $1, \left(1 + \frac{1}{3}\right), \left(1 + \frac{2}{3}\right), ...$ है।

फलतः संगत ह.श्रे. $1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, ...$ होगी।

उदाहरण 38: श्रेणी $\frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{\sqrt{5}} + ...$ का कौनसा पद $\frac{\sqrt{5}}{13}$ है।

हलः माना कि $\frac{\sqrt{5}}{13}$ दी हुई श्रेणी का n वां पद है।

दी हुई श्रेणी के पदों को व्युत्क्रम रूप में लिखने पर प्राप्त श्रेणी $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{1} + ...$ एक स.श्रे. है क्योंकि

सार्वअंतर $= \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, एक नियत राशि है।

अतः दी हुई श्रेणी के पद ह.श्रे. में है तथा इसके संगत स.श्रे.का n वां पद $\frac{13}{\sqrt{5}}$ होगा।

$\therefore \quad \frac{3}{\sqrt{5}} + (n-1)\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$ या $\quad \frac{n-1}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}$

या $\quad n - 1 = 10 \quad \Rightarrow \quad n = 11$

अतः $\frac{\sqrt{5}}{13}$ दी हुई श्रेणी का 11 वां पद है।

उदाहरण 39: $1/2$ तथा 3 के मध्य 4 ह.मा. ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि $1/2$ तथा 3 के मध्य ह.मा. H_1, H_2, H_3, H_4 हैं।

अतः $1/2, H_1, H_2, H_3, H_4, 3$ ह.श्रे. में हैं।

संगत स.श्रे. का प्रथम पद 2 तथा छठा पद $1/3$ होगा

$\therefore \quad a + 5d = 1/3 \qquad [\because T_6 = a + 5d]$

या $\quad 5d = 1/3 - 2 \Rightarrow d = -1/3 \qquad [\because a = 2]$

अतः 2 तथा $1/3$ के मध्य चार स.मा. निम्नलिखित होंगेः

$$2 + d, 2 + 2d, 2 + 3d, 2 + 4d$$

या $\quad 2 - \frac{1}{3}, 2 - \frac{2}{3}, 2 - \frac{3}{3}, 2 - \frac{4}{3} \quad$ या $\quad \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}$

अतः अभीष्ट ह.मा. $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}$ होंगे।

उदाहरण 40: यदि दो संख्याओं के मध्य स.मा. 4 तथा ह.मा. 3 हैं, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि संख्याएँ a तथा b हैं। तब

स.मा. $= \frac{a+b}{2} = 4$ (दिया हुआ है)

या $a + b = 8$ (1)

तथा ह.मा. $= \frac{2ab}{a+b} = 3$ (दिया हुआ है)

या $2ab = 3(a+b)$

या $2ab = 3 \times 8 = 24$ [(1) के प्रयोग से] (2)

अब, $a - b = \pm\sqrt{(a+b)^2 - 4ab}$

या $a - b = \pm\sqrt{64 - 48}$ [(1) तथा (2) से]

या $a - b = \pm 4$

धनात्मक चिह्न लेने पर,

$a - b = 4$ (3)

समीकरण (1) व (3) को हल करने पर

$$a = 6, b = 2$$

ऋणात्मक चिह्न लेने पर,

$a - b = -4$ (4)

समीकरण (1) व (4) को हल करने पर,

$$a = 2, b = 6$$

अतः अभीष्ट संख्याएँ 6, 2 या 2, 6 होंगी।

उदाहरण 41: यदि ***a, b, c*** ह. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ ह.श्रे. में हैं।

हलः $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ ह.श्रे. में होंगे यदि $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ स.श्रे. में हैं।

अर्थात् $\quad \frac{c+a}{b} - \frac{b+c}{a} = \frac{a+b}{c} - \frac{c+a}{b}$

या $\quad \frac{ac + a^2 - b^2 - bc}{ab} = \frac{ab + b^2 - c^2 - ac}{bc}$

या $\quad \dfrac{(a-b)(a+b+c)}{a} = \dfrac{(b-c)(a+b+c)}{c}$ [गुणनखण्ड करने से]

सरल करने पर $\quad 2ac = b(a+c)$

या $\quad b = \dfrac{2ac}{a+c}$

या $\quad a, b, c$ ह.श्रे. में हैं, जो कि दिया हुआ है।

फलतः $\dfrac{a}{b+c}, \dfrac{b}{c+a}, \dfrac{c}{a+b}$ ह.श्रे. में हैं।

उदाहरण 42: यदि एक मोटर कार 200 किमी. दूरी 40 किमी. प्रति घं. की गति से तथा अगले 200 किमी. दूरी 50 किमी. प्रति घं. की गति से जाती है, तो उसकी औसत गति ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

हलः यहाँ $a = 40$ किमी. प्रति घं. तथा $b = 50$ किमी. प्रति घं.

$\therefore$ माध्य $H = \dfrac{2ab}{a+b}$

$= \dfrac{2.40.50}{40+50} = \dfrac{4000}{90} = 44.4$ किमी प्रति घं.

सत्यापनः पहले 200 किमी. दूरी तय करने का समय $= \dfrac{200}{40} = 5$ घं.

अगले 200 किमी. दूरी तय करने का समय $= \dfrac{200}{50} = 4$ घं.

अतः मोटर कार कुल दूरी 400 किमी. 9 घं. में तय करती है।

$\therefore$ औसत गति $= \dfrac{400}{9} = 44.4$ किमी. प्रति घं.

टिप्पणीः यहाँ औसत गति के लिए स.मा. $= \dfrac{40+50}{2} = 45$ किमी. प्रति घं. लेना गलत होगा, क्योंकि कुल समय 9 घंटे में कार $45 \times 9 = 405$ किमी. दूरी तय करेगी, जो कि गलत हैं। अतः यदि अलग–अलग अंतराल में गति दी हुई हो, तो औसत गति के लिए हरात्मक माध्य लिया जाता है।

उदाहरण 43: यदि किसी ह.श्रे. का $\boldsymbol{p}$ वां पद $\boldsymbol{q}$ और $\boldsymbol{q}$ वां पद $\boldsymbol{p}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि इसका $\boldsymbol{r}$ वां पद $\dfrac{\boldsymbol{pq}}{\boldsymbol{r}}$ होगा।

हलः चूँकि ह.श्रे. का p वां पद q तथा q वां पद p है।

$\therefore$ संगत स.श्रे. का p वां पद $1/q$ तथा q वां पद $1/p$ होगा।

माना कि संगत स.श्रे. का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है। तब

$$a+(p-1)d = 1/q \quad (1) \qquad \text{तथा} \qquad a+(q-1)d = 1/p \quad (2)$$

(1) में से (2) को घटाने पर,

$(p-q)d = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$ या $(p-q)d = \dfrac{p-q}{pq}$ या $d = 1/pq$

d का यह मान (1) में रखने पर,

$a = \dfrac{1}{q} - \dfrac{(p-1)}{pq}$ या $a = 1/pq$

$\therefore$ स.श्रे. का r वां पद $= a + (r-1)d = \dfrac{1}{pq} + (r-1)\dfrac{1}{pq} = \dfrac{r}{pq}$

फलतः ह.श्रे. का r वां पद pq/r होगा।

प्रश्नमाला 8.7

1. निम्नलिखित हरात्मक श्रेढ़ियों के सम्मुख दिया गया पद ज्ञात कीजिएः

(i) $\frac{1}{2},\frac{1}{5},\frac{1}{8},\frac{1}{11},\ldots 6$ वां पद **(ii)** $\frac{1}{9},\frac{1}{19},\frac{1}{29},\frac{1}{39},\ldots 18$ वां पद **(iii)** $\frac{1}{14},\frac{2}{29},\frac{1}{15},\frac{2}{31},\ldots 10$ वां पद

2. निम्नलिखित ह.श्रे. के n वें पद ज्ञात कीजिएः

(i) $\frac{1}{5},\frac{2}{9},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\ldots$ **(ii)** $\frac{2}{a+b},\frac{1}{a},\frac{2}{3a-b},\ldots$

3. वह ह. श्रे. ज्ञात कीजिए जिसका दूसरा पद $\frac{2}{5}$ तथा सातवां पद $\frac{4}{25}$ है।

4. यदि एक ह.श्रे. का 7 वां पद $17/2$ एवं 11 वां पद $13/2$ हो, तो उसका 20 वां पद ज्ञात कीजिए।

5. ज्ञात कीजिएः

(i) 1 तथा $1/16$ के मध्य 4 ह.मा. **(ii)** $1/19$ तथा $1/7$ के मध्य 5 ह.मा. **(iii)** $-2/5$ तथा $4/25$ के मध्य एक ह.मा.

6. यदि ह. श्रे. का p वां, q वां तथा r वां पद क्रमशः a, b, c हैं, तो सिद्ध कीजिएः

$$bc(q-r)+ca(r-p)+ab(p-q)=0$$

7. यदि a, b, c ह.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $a, a-c, a-b$ ह.श्रे. में होंगे।

8. यदि a, b, c ह. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिएः $\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$

9. समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूलों का ह.मा. ज्ञात कीजिए।

10. यदि किसी ह. श्रे. का p वां पद q तथा q वां पद p हो, तो सिद्ध कीजिए कि उसका $(p+q)$ वां पद $pq/p+q$ होगा।

11. यदि समीकरण $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ के मूल समान हों, तो सिद्ध कीजिए कि a, b, c ह. श्रे. में होंगे।

12. यदि एक छात्र अपने घर से विद्यालय 8 किमी. प्रति घं. की गति से जाता है तथा 6 किमी. प्रति घं. की गति से लौटता है, तो उसकी औसत गति ज्ञात कीजिए जबकि घर से विद्यालय की दूरी 6 किमी. है। अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

8.21 समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य में संबंध (Relation between A.M., G.M. and H.M.)

माना कि A, G तथा H दो राशियों a तथा b के मध्य क्रमशः स.मा., गु.मा., तथा ह.मा. हैं। तब

$$A=\frac{a+b}{2}, G=\sqrt{ab} \text{ एवं } H=\frac{2ab}{a+b}$$

अतः $AH=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$

$\therefore \quad G^2=AH$

अर्थात् A तथा H के मध्य G एक गु.मा. है।

पुनः $A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}>0$

$\therefore \quad A>G$ (1)

तथा $G-H=\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)=\frac{\sqrt{ab}}{(a+b)}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2>0$

$\therefore \quad G>H$

अतः $A>G>H$ [(1) तथा (2) से]

8.22 तीन राशियाँ *a, b, c* स.श्रे., गु.श्रे. तथा ह.श्रे. में होंगी, यदि क्रमशः

(i) $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{a}$ **(ii)** $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{b}$ **(iii)** $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{c}$

(i) $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{a} \Rightarrow a-b=b-c \quad \Rightarrow \quad b=\dfrac{a+c}{2}$

$\therefore$ a, b, c स.श्रे. में हैं।

(ii) $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{b} \Rightarrow ab-b^2=ab-ac \quad \Rightarrow \quad b^2=ac$

$\therefore$ a, b, c गु.श्रे. में हैं।

(iii) $\dfrac{a-b}{b-c}=\dfrac{a}{c} \Rightarrow ac-bc=ab-ac \quad \Rightarrow \quad b=\dfrac{2ac}{a+c}$

$\therefore$ a, b, c ह.श्रे. में हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 44: यदि दो संख्याओं का स.मा. उनके गु.मा. से 2 अधिक है तथा उनका अनुपात 4 : 1 है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि संख्याएँ a तथा b हैं। तब दिया हुआ हैः

$$\frac{a+b}{2}=\sqrt{ab}+2 \qquad (1)$$

तथा $\dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{1}$ या $a=4b$ (2)

समीकरण (2) से a का मान (1) में रखने पर,

$\dfrac{4b+b}{2}=\sqrt{4b^2}+2$ या $5b=4b+4$ या $b=4$

$\therefore$ $a=4b=4\times 4=16$

अतः अभीष्ट संख्याएँ 16, 4 होंगी।

उदाहरण 45: यदि दो राशियों a तथा b का ह.मा. $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि दो राशियों a तथा b का ह.मा. $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ है। तब

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=\frac{2ab}{a+b}$$

या $a\,a^{n+1}+a\,b^{n+1}+b\,a^{n+1}+b\,b^{n+1}=2a^{n+1}b+2b^{n+1}a$

या $a\,a^{n+1}+b\,b^{n+1}=a^{n+1}b+b^{n+1}a$

या $a^{n+1}(a-b)=b^{n+1}(a-b)$

या $a^{n+1}=b^{n+1}$ $[\because a\neq b]$

या $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}=1$

यह तभी संभव है जब $n+1=0$ अर्थात् $n=-1$.

उदाहरण 46: तीन राशियाँ ***a, b, c*** ह.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $a(b+c), b(c+a), c(a+b)$ स.श्रे. में होंगे।

हल: $a(b+c), b(c+a), c(a+b)$ स.श्रे. में होंगे, यदि

या $$b(c+a)-a(b+c)=c(a+b)-b(c+a)$$

या $$bc+ba-ab-ac=ca+cb-bc-ba$$

या $$bc+ab=2ac$$

या $$b=\frac{2ac}{a+c}$$, जो कि सही है क्योंकि a, b, c ह.श्रे. में हैं।

फलतः $a(b+c), b(c+a), c(a+b)$ स.श्रे. में हैं।

प्रश्नमाला 8.8

1. दो संख्याओं का स.मा. 50 तथा ह.मा. 18 हैं। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
2. यदि दो संख्याओं के ह.मा. और गु.मा. में अनुपात 12 : 13 हो, तो सिद्ध कीजिए कि संख्याओं में अनुपात 4 : 9 है।
3. दो संख्याओं के स.मा. तथा गु.मा. का अंतर 2 है, गु.मा. तथा ह.मा. का अंतर 1.2 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
4. तीन राशियाँ a, b, c गु.श्रे. में हैं तथा $a^x = b^y = c^z$ है, तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z ह.श्रे. में होंगे।
5. तीन राशियाँ a, b, c ह. श्रे. में हैं। सिद्ध कीजिए कि $2a-b$, b, $2c-b$ गु. श्रे. में होंगे।
6. यदि a, b, c स.श्रे. में हैं, x, y, z ह.श्रे. में हैं तथा ax, by, cz गु.श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए:
   $$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$$
7. दो धनात्मक राशियों a तथा b के मध्य दो स.मा. A_1, A_2; दो गु.मा. G_1, G_2; तथा दो ह.मा. H_1, H_2; हो तो सिद्ध कीजिए:
   (i) $A_1H_2 = A_2H_1 = G_1G_2 = ab$
   (ii) $G_1G_2 : H_1H_2 = (A_1+A_2):(H_1+H_2)$
8. यदि a, b, c स.श्रे. में हैं b, c, d गु. श्रे. में हैं तथा c, d, e ह. श्रे. में है, तो सिद्ध कीजिए कि a, c, e गु. श्रे. में होंगे।
9. यदि तीन राशियाँ a, b, c स.श्रे. तथा ह.श्रे. दोनों में हो, तो सिद्ध कीजिए कि वे गु.श्रे. में भी होंगी।

विविध प्रश्नमाला–8

1. श्रेढ़ी $-4, -1, +2, +5, \ldots$ का 10 वां पद है
   (A) 23 (B) –23 (C) 32 (D) –32
2. एक स.श्रे. का 9 वां पद 35 तथा 19 वां पद 75 हो, तो इसका 20 वां पद होगा:
   (A) 78 (B) 79 (C) 80 (D) 81
3. श्रेढ़ी 1, 3, 5, . . . के n पदों का योगफल है:
   (A) $(n-1)^2$ (B) $(n+1)^2$ (C) $(2n-1)^2$ (D) n^2
4. यदि किसी स.श्रे. का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 तथा पदों का योगफल 400 हो, तो पदों की संख्या है:
   (A) 8 (B) 10 (C) 16 (D) 20
5. यदि किसी स.श्रे. का तीसरा पद 18 तथा सातवाँ पद 30 है, तो उसके प्रथम 17 पदों का योगफल होगा:
   (A) 600 (B) 612 (C) 624 (D) 636
6. यदि $(x+1), 3x, (4x+2)$ स.श्रे. में हो, तो इस श्रेढ़ी का पांचवां पद होगा:
   (A) 14 (B) 19 (C) 24 (D) 28
7. a, b, c स. श्रे. में हैं। a तथा b का स.मा. x, b तथा c का स.मा. y हों, तो x तथा y का स.मा. होगा:
   (A) a (B) b (C) c (D) $a+c$

8. किसी स.श्रे. के n पदों का योगफल $3n^2 + 5n$ है। इसका 27 वां पद है:

(A) 160 (B) 162 (C) 164 (D) 166

9. 20 तथा 30 के मध्य 50 समांतर माध्यों का योगफल है:

(A) 1255 (B) 1205 (C) 1250 (D) 1225

10. गु.श्रे. $\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \ldots$ का सार्वअनुपात है:

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 3

11. श्रेढ़ी 96, 48, 24, 12, . . ., $\frac{3}{16}$ में पदों की संख्या है:

(A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 15

12. $9^{1/3} \times 9^{1/9} \times 9^{1/27} \times \ldots \infty$ का मान है:

(A) 1 (B) 3 (C) 9 (D) 27

13. श्रेढ़ी $\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots$ के अनंत पदों का योगफल है:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

14. श्रेणी $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \ldots$ के अनंत पदों का योगफल है:

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{7}{16}$

15. यदि गु.श्रे. का तीसरा पद 2 है, तो उसके प्रथम पांच पदों का गुणनफल है:

(A) 4 (B) 16 (C) 32 (D) 64

16. n के किस मान के लिए व्यंजक $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$, a तथा b के बीच गु.मा. होगा

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) $-\frac{1}{2}$

17. यदि a और b के मध्य G_1 तथा G_2 दो गु.मा. हो, तो G_1G_2 का मान है:

(A) $\sqrt{ab}$ (B) ab (C) $(ab)^2$ (D) $(ab)^3$

18. -9 और -4 के मध्य गु.मा. है:

(A) -36 (B) 6 (C) -6 (D) 36

19. श्रेढ़ी $\frac{1}{2}, \frac{5}{13}, \frac{5}{16}, \ldots$ है:

(A) स.श्रे. (B) गु.श्रे. (C) ह. श्रे. (D) अन्य श्रेणी

20. श्रेढ़ी $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \ldots$ का छठा पद है:

(A) $\frac{1}{13}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) इनमें से कोई नहीं

21. यदि a, b, c, d ह. श्रे. में हैं तो सत्य कथन है:

(A) $ab > cd$ (B) $ac > bd$ (C) $ad > bc$ (D) इनमें से कोई नहीं

22. दो संख्याओं का ह.मा. 4, स.मा. A तथा गु.मा. G है। यदि $2A + G^2 = 27$ है तो संख्याएँ हैं:

(A) 6, 4 (B) 8, 2 (C) 8, 6 (D) 6, 3

23. दो संख्याओं के ह.मा. तथा गु.मा. का अनुपात 12 : 13 है, तो संख्याओं का अनुपात होगा:

(A) 1 : 2 (B) 2 : 3 (C) 3 : 5 (D) 4 : 9

24. यदि दो संख्याओं a तथा b के बीच स.मा., गु.मा. एवं ह.मा. क्रमशः A, G एवं H हों, तो A, G, H होंगे:

(A) ह.श्रे. में (B) गु.श्रे. में (C) स.श्रे. में (D) इनमें से कोई नहीं

25. यदि संख्याएँ a तथा b के बीच ह.मा. H हो, तो $\frac{H}{a} + \frac{H}{b}$ का मान है:

(A) 2 (B) $\frac{a+b}{ab}$ (C) $\frac{ab}{a+b}$ (D) इनमें से कोई नहीं

26. यदि a, b, c ह.श्रे. में हों, तो सत्य कथन है:

(A) $ac = b^2$ (B) $\sqrt{ac} < b$ (C) $a + c = 2b$ (D) $\sqrt{ac} > b$

27. यदि किसी श्रेणी का n वां पद $\frac{n^2}{3^n}$ हो, तो अनुक्रम के प्रथम 3 पद लिखिए।

28. श्रेढ़ी 72, 70, 68, 66, . . . का कौन सा पद 40 है?

29. यदि एक स.श्रे. में m तथा n पदों के योगफल का अनुपात $m^2 : n^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि m वें तथा n वें पदों का अनुपात $(2m-1):(2n-1)$ होगा।

30. यदि किसी समकोण त्रिभुज की भुजाएँ स.श्रे. में हैं, तो उसकी भुजाओं की लंबाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

[संकेत: $(a+d)^2 = (a-d)^2 + a^2 \Rightarrow \frac{a}{d} = 4$]

31. $-\frac{2}{7}, a, -\frac{7}{2}$ गु.श्रे. में हो तो, a का मान लिखिए:

32. श्रेणी $1 - 1 + 1 - 1 + . . .$ का n पदों तक योगफल लिखिए:

33. $2^{1/2}.4^{1/8}.16^{1/32}...\infty$ का मान लिखिए:

34. n के किस मान के लिए व्यंजक $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, दो राशियों a तथा b का ह.मा. होगा?

35. यदि a तथा b के स.मा. और ह.मा. क्रमशः A एवं H हों, तो सिद्ध कीजिए:

$$\frac{a-A}{a-H} \times \frac{b-A}{b-H} = \frac{A}{H}$$

36. यदि a, b, c स.श्रे. में हैं और b, c, d ह. श्रे. में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $ad = bc$ होगा।

[संकेत: $b = \frac{a+c}{2}$ तथा $c = \frac{2bd}{b+d}$ $\therefore bc = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{2bd}{b+d}$ या $c(b+d) = (a+c)d$ या $bc = ad$

37. यदि $a + b + ... + \ell$ गुणोत्तर श्रेढ़ी है तो सिद्ध कीजिए इसका योग $= \frac{b\ell - a^2}{b-a}$

38. अनुक्रम 3, 33, 333, ... के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिये।

39. अनुक्रम 1, 2, 4, 8, 16, 32 तथा अनुक्रम 32, 8, 2, 1 / 2, 1 / 8, 1 / 32 के संगत पदों के गुणनफल से बने अनुक्रम का योगफल ज्ञात कीजिये।

40. यदि G_1 तथा G_2, a और b के बीच दो गुणोत्तर माध्य है तो सिद्ध कीजिए।
$G_1 \, G_2 = a \, b.$

41. यदि दो संख्याओं a तथा b के बीच के समांतर माध्य (A.M) तथा गुणोत्तर माध्य (G.M) में अनुपात $m : n$ है तो सिद्ध कीजिए कि $a : b = m + \sqrt{m^2 - n^2} : m - \sqrt{m^2 - n^2}$ है।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. अनुक्रम से हमारा तात्पर्य है, ''किसी तर्क पूर्ण नियम के अनुसार एक परिभाषित (निश्चित) क्रम में संख्याओं की व्यवस्था''। पुनः हम एक अनुक्रम को फलन के रूप में परिभाषित कर सकते है, जिसका प्रांत प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो या उसका उपसमुच्चय $N_k = \{1, 2, 3 ..., k\}$ के प्रकार का होगा। अनुक्रम की संख्या उसका पद कहलाती है। पदों की संख्या परिमित या अपरिमित होने पर अनुक्रम क्रमशः ''परिमित अनुक्रम'' या ''अपरिमित अनुक्रम'' कहलाते है।
2. $a_1, a_2, a_3, ...$ एक अनुक्रम है तो योगरूप $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ श्रेणी कहलाता है। जिस श्रेणी के पदों की संख्या परिमित (सीमित) होती है उसे परिमित श्रेणी कहते है।
3. श्रेढ़ीः एक अनुक्रम श्रेढ़ी कहलाती है यदि उसके पदों का संख्यात्मक मान किसी विशिष्ट नियम के अन्तर्गत बढ़ता या घटता है। अर्थात् यदि किसी अनुक्रम का n वां पद एक स्पष्ट सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है तो वह अनुक्रम श्रेढ़ी कहलाता है।
4. किसी अनुक्रम के पद एक समान नियतांक से लगातार बढ़ते या घटते है, समांतर श्रेढ़ी होती है। नियतांक को श्रेढ़ी का सार्व अन्तर कहते है सामान्यतः हम समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a, सार्व अंतर d तथा अन्तिम पद ℓ से प्रदर्शित करते हैं समान्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद भी n वाँ पद $T_n = a + (n-1)d$ है।
   समान्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल S_n निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त होता है।
   $$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \text{ या } S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$
5. किन्हीं दो संख्याओं a तथा b का समांतर माध्य $A = \dfrac{a+b}{2}$ होता है।
6. किसी अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेढ़ी कहते है, यदि किसी पद का अपने पिछले पद से अनुपात अचर रहता है। इस अचर अनुपात को सार्व अनुपात कहते है साधारणतः हम गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद को a, सार्वअनुपात को r से निरूपित करते है। गुणोत्तर श्रेढ़ी का व्यापक पद या nवाँ पद $T_n = ar^{n-1}$ होता है।
7. गुणोत्तर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ या $\dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ यदि $r \neq 1$ होता है।
8. किसी दो धनात्मक संख्याएँ a तथा b का गुणोत्तर माध्य $G = \sqrt{ab}$ है।
9. यदि किसी अनुक्रम के पदों का व्युत्क्रम संमातर श्रेढ़ी होतो अनुक्रम को हरात्मक श्रेढ़ी कहते है।
10. हरात्मक श्रेढ़ी का व्यापक पद या nवाँ पद $T_n = \dfrac{1}{a + (n-1)d}$ जहाँ a, d संगत समांतर श्रेढ़ी के प्रथम पद तथा सार्वअन्तर है।
11. दो राशियाँ a तथा b का हरात्मक माध्य $H = \dfrac{2ab}{a+b}$
12. दो राशियों a तथा b के मध्य स. मा., गु. मा. तथा ह.मा. क्रमशः A, G, H है, तथा
   (i) $G^2 = AH$ (B) $A \geq G \geq H$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 8.1

1. (i), (ii), (iii) स. क्षे. है। (iv) स. श्रे. नहीं है।

2. (i) a = 10: d = 3 $T_5 = 22$ (ii) a = a : d = d $T_5 = a + 4d$
(iii) a = 2 : d = 3 $T_5 = -10$

4. 22 5. 64 6. 32 8. 30

प्रश्नमाला 8.2

1. (i) 900 (ii) $\frac{100}{3}$ (iii) $\frac{3(7+5\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1}$ 2. 33, 1683 3. n (n + 4)

4. 3,2 5. 8, 36 6. शून्य 10. 1,4,7 11. 24 14. 2700 15. 3

प्रश्नमाला 8.3

1. (i) 729 (ii) $\frac{\sqrt{2}}{512}$ 2. (i) n = 13 (ii) n = 0 3. 5.2^{n-1} 4. 1458 5. r = 4 6. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2.$

7. (i) 6,12, 24 (ii) 4, 8, 16, 32, 64, 128 8. $x = 3,$ 9. $\frac{1}{20}, \frac{-9}{20}, \frac{81}{20}, \frac{-729}{20}$ 11. $\sqrt{xy}$

प्रश्नमाला 8.4

1. (i) 2186 (ii) $-\frac{6305}{2880}$ (iii) $\frac{a^{10}-b^{10}}{a(a+b)}$ 2. (i) 728 (ii) $\frac{511}{4}$

3. 5 पद 4. 4 5. 10

6. (i) $\frac{70}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{7n}{9}$ (ii) $\frac{5}{81}\left(9n-1+\frac{1}{10^n}\right)$ (iii) $n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

7. (i) $\frac{106}{45}$ (ii) $\frac{619}{990}$ (iii) $\frac{2750}{999}$ 8. 64, 16, 4, 1, $\frac{1}{4}, \ldots$ 11. $\frac{7}{3}$

प्रश्नमाला 8.5

1. (i) $4-\frac{2+n}{2^{n-1}}$ **(ii)** $\frac{1-(2n-1)x^n}{1-x}+\frac{2x\left(1-x^{n-1}\right)}{(1-x)^2}$ **(iii)** $\frac{5}{36}+(-1)^{n-1}\frac{5+6n}{6^2\,5^n}$

2. (i) $\frac{6}{7}$ **(ii)** $\frac{3}{16}$ **(iii)** $\frac{1}{(1+x)^2}$

3. (i) $\frac{3^n+1}{2}, \frac{3^{n+1}+2n-3}{4}$ **(ii)** $(2n+1)2^n, (2n-1)2^{n+1}+2$

(iii) $(3n-2)x^{n-1}, \left[\frac{1}{1-x}+\frac{3x\left(1-x^{n-1}\right)}{(1-x)^2}-\frac{(3n-2)x^n}{1-x}\right]$

4. $\frac{2+x}{(1-x)^2}-\frac{3x^n}{(1-x)^2}-\frac{(3n-1)x^n}{1-x}, \frac{2+x}{(1+x)^2}$

प्रश्नमाला 8.6

1. (i) $\frac{n(n+1)(2n+3)}{2}+5n$ (ii) $\frac{n(n+1)\left(2n^2+2n+7\right)}{2}+n$ (iii) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

2. (i) $\frac{4}{3}n(n+1)(4n-1)+n$ (ii) $\frac{9}{4}n^2(n+1)(3n-1)-n$ (iii) $\frac{n}{12}(n+1)(n+2)(3n+5)$

3. (i) $(2n-1)(2n+1), \ \frac{n}{3}\left(4n^2+6n-1\right)$ (ii) $n(n+1)(3n+1), \ \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(9n+7)$

4. (i) $n(n+2), \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ (ii) $n^2+2n-2, \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}-2n$

5. (i) $\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n}{6}(n+1)(n+2)$ (ii) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \frac{n}{12}(n+1)^2(n+2)$

प्रश्नमाला 8.7

1. (i) $\frac{1}{17}$ (ii) $\frac{1}{179}$ (iii) $\frac{2}{37}$

2. (i) $\frac{2}{11-n}$ (ii) $\frac{2}{na+(2-n)b}$

3. $\frac{4}{7}, \frac{4}{10}, \frac{4}{13} \ldots\ldots$

4. $\frac{17}{4}$

5. (i) $\frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{10}, \frac{1}{13}$ (ii) $\frac{1}{17}, \frac{1}{15}, \frac{1}{13}, \frac{1}{11}, \frac{1}{9}$ (iii) $\frac{8}{15}$

9. $-\frac{2c}{b}$

12. $6\frac{6}{7}$ किमी. प्रति घं.

प्रश्नमाला 8.8

1. 90, 10

3. 1, 9

विविध उत्तरमाला–8

1. (A)	**2.** (B)	**3.** (D)	**4.** (C)	**5.** (B)	**6.** (C)	**7.** (B)
8. (C)	**9.** (C)	**10.** (A)	**11.** (B)	**12.** (B)	**13.** (C)	**14.** (B)
15. (C)	**16.** (D)	**17.** (B)	**18.** (C)	**19.** (C)	**20.** (B)	**21.** (C)
22. (D)	**23.** (D)	**24.** (B)	**25.** (A)	**26.** (D)	**27.** $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}$	**28.** 17 वां

30. 3 : 4 : 5 **31.** ± 1 **32.** $\frac{1-(-1)^n}{2}$ **33.** 2 **34.** $n = -1$ **39.** $\frac{30}{81}\left[10^n - 1\right] - \frac{n}{3}$

9

लघुगणक
(Logarithm)

9.01 प्रस्तावना (Introduction)

गणित के माध्यम से समस्याओं को हल करते समय कई बार हमें ऐसे व्यंजकों को काम में लेना होता है जिसमें बड़ी संख्याओं का गुणा, भाग या परिमेय घातों का प्रयोग होता है। सामान्य प्रचलित विधि से इनको हल करने में समय अधिक लगता है तथा अशुद्धियाँ रहने की आशंका रहती है। गणित के विद्वानों ने इस ओर ध्यान दिया तथा जॉन नैपियर (John Napier) ने 1614 ई. में लघुगणक की संकल्पना दी। लघुगणक का प्रयोग कर गुणा, भाग अथवा घातांकों से युक्त समस्याओं को क्रमशः योग, व्यवकलन व गुणन में परिवर्तित कर लिया जाता है। परिणामतः जटिल समस्याओं का सरलता से तथा अपेक्षाकृत कम समय में ही हल करना सम्भव हो जाता है। इस अध्याय में हम लघुगणक के विभिन्न नियमों का अध्ययन करेंगे तथा कई व्यवहारिक समस्याओं में इनका प्रयोग कर लघुगणक तकनीक के महत्व को जानेंगे।

9.02 लघुगणक (Logarithm)

हम जानते हैं कि समान संख्याओं के सतत गुणन जैसे $2\times 2\times 2=8$ को संक्षेप में 2^3 भी लिखते हैं।
संख्या 2^3 में 2 को आधार (base) तथा 3 को घातांक (Index) कहते हैं।

व्यापक रूप में यदि तीन संख्याओं a, x तथा n के मध्य संबंध $a^x=n$ हो तो a आधार तथा x घातॉंक कहलाता है।

परिभाषा : यदि a और n वास्तविक धन संख्याएँ हों (जबकि $a\neq 1$) तथा $a^x=n$ (घातॉंक रूप), तब घातॉंक x को आधार a पर n का लघुगणक कहते हैं। इसे $\log_a n=x$ (लघुगणकीय रूप) लिख कर व्यक्त करते हैं।

अतः $a^x=n \Leftrightarrow \log_a n=x, \quad [a>0,\ a\neq 1,\ n>0]$

टिप्पणी: (i) यहाँ log को logarithm के 'संक्षिप्त रूप' से व्यक्त किया है।

(ii) 0 तथा ऋणात्मक संख्याओं के लघुगणक के मान वास्तविक (Real) नहीं होते। यदि $k<0$ तो $\log_a k$ काल्पनिक होगा।

(iii) $\log_a 1=0$, जहाँ $0<a<1$ या $a>1$

(iv) $\log_a a=1$, जहाँ $0<a<1$ या $a>1$

(v) आगे के अध्ययन में लघुगणक का आधार सदैव $a>0$ तथा $a\neq 1$ देखेंगे।

घातॉंकीय रूप को लघुगणकीय रूप तथा लघुगणकीय रूप को घातॉंकीय रूप में लिखने के उदाहरण नीचे दिए गए हैं :

उदाहरण 1: निम्नलिखित संख्याओं के घातांकीय रूप को लघुगणकीय रूप में लिखिए।

(i) $3^4=81$ (ii) $2^{-5}=1/32$ (iii) $(81)^{\frac{1}{4}}=3$

हलः (i) $3^4=81$ का लघुगणकीय रूप है $\log_3 81=4$.

(ii) $2^{-5}=\frac{1}{32}$ का लघुगणकीय रूप है $\log_2\left(\frac{1}{32}\right)=-5$.

(iii) $(81)^{\frac{1}{4}}=3$ का लघुगणकीय रूप है $\log_{81} 3=\frac{1}{4}$.

उदाहरण 2: निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणकीय रूप को घातांकीय रूप में परिवर्तित कीजिए।

(i) $\log_7 1=0$ (ii) $\log_{128} 2=\frac{1}{7}$ (iii) $\log_{10} 1000=3$

हलः (i) $\log_7 1 = 0$ का घाताँकीय रूप है $7^0 = 1$.

(ii) $\log_{128} 2 = \frac{1}{7}$ का घाताँकीय रूप है $128^{1/7} = 2$.

(iii) $\log_{10} 1000 = 3$ का घाताँकीय रूप है $10^3 = 1000$.

टिप्पणीः $\log_m 1 = \log_n 1 = 0 \left(m \neq n\right)$

प्रश्नमाला 9.1

निम्नलिखित को लघुगणकीय रूप में लिखिए [प्रश्न संख्या 1 से 6]

1. $2^6 = 64$ 2. $10^4 = 10000$ 3. $2^{10} = 1024$

4. $5^{-2} = \frac{1}{25}$ 5. $10^{-3} = 0 \cdot 001$ 6. $4^{3/2} = 8$

निम्नलिखित को घातॉकीय रूप में लिखिए [प्रश्न संख्या 7 से 12]

7. $\log_5 25 = 2$ 8. $\log_3 729 = 6$ 9. $\log_{10} 0 \cdot 001 = -3$

10. $\log_{10} 0 \cdot 1 = -1$ 11. $\log_3 \left(\frac{1}{27}\right) = -3$ 12. $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$

13. यदि $\log_{81} x = \frac{3}{2}$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $\log_{125} p = 1/6$ हो तो p का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि $\log_4 m = 1 \cdot 5$ हो तो m का मान ज्ञात कीजिए।

16. सिद्ध कीजिए $\log_4 \left[\log_2 \left\{\log_2 \left(\log_3 81\right)\right\}\right] = 0$

9.03 लघुगणक के मूल नियम (Fundamental laws of logarithms):

नियम 1. दो संख्याओं के गुणनफल का लघुगणक, उनके अलग–अलग लघुगणक के योगफल के बराबर होता है, अर्थात्

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N.$$

उपपत्ति : मान लीजिए

$$M = a^x$$

$\therefore$ $\log_a M = x$ (i)

तथा $N = a^y$

$\therefore$ $\log_a N = y$ (ii)

अब $MN = a^x \times a^y$

या $MN = a^{(x+y)}$ (iii)

(iii) में लघुगणक की परिभाषा का उपयोग करने पर

$$\log_a MN = x + y$$

या $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ [(i) और (ii) से]

नियम 1 को व्यापक रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\log_a \left(A \times B \times C \times D \times \cdots \times Z\right) = \log_a A + \log_a B + \log_a C + \cdots + \log_a Z.$$

टिप्पणी : व्यापक रूप में $\log_a \left(M + N + P\right) \neq \log_a M + \log_a N + \log_a P$

परन्तु यदि $M + N + P = MNP$ हो, तो

$$\log_a \left(M + N + P\right) = \log_a M + \log_a N + \log_a P$$

नियम 2. किसी भिन्न का लघुगणक उस भिन्न के अंश के लघुगणक में से हर का लघुगणक घटाने पर प्राप्त होता है, अर्थात्

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

उपपत्ति : मान लीजिए

$M = a^x \quad \therefore \quad \log_a M = x$ (i)

तथा $N = a^y \quad \therefore \quad \log_a N = y$ (ii)

अब $\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$ (iii)

(iii) में लघुगणक की परिभाषा का उपयोग करने पर

$$\log_a (M/N) = (x - y)$$

या $\log_a (M/N) = \log_a M - \log_a N,$ [(i) और (ii) से]

टिप्पणी : $\log_a (M - N) \neq \log_a M - \log_a N$

नियम 3. किसी भी घातॉंक (पूर्णांक अथवा भिन्नात्मक) वाली संख्या का लघुगणक, घातॉंक और उस संख्या के लघुगणक के गुणनफल के बराबर होता है,

अर्थात् $\log_a M^N = N \log_a M$

उपपत्ति : मान लीजिए

$M = a^x \quad \therefore \quad \log_a M = x$ (i)

अब $M^N = (a^x)^N$

या $M^N = a^{Nx}$ (ii)

(ii) में लघुगणक की परिभाषा का उपयोग करने पर

$\log_a M^N = Nx$

या $\log_a M^N = N \log_a M,$ [(i) से]

N के भिन्न होने पर, माना $M = \dfrac{p}{q}$

तब $\log_a M^{(p/q)} = \dfrac{p}{q} \log_a M$

नियम 4. आधार $a > 1$ पर, शून्य का लघुगणक $-\infty$ और आधार $0 < a < 1$ पर यह $+\infty$ होता है, अर्थात्

$\log_a 0 = -\infty,$ यदि $a > 1$ **तथा** $\log_a 0 = +\infty,$ यदि $0 < a < 1$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि $3^{-\infty} = \dfrac{1}{3^{\infty}} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

अतः यदि $a^x = 0$ और $a > 1$, तो $x = -\infty$

अर्थात् $a > 1$ हो तो $a^{-\infty} = 0$

अतः लघुगणक की परिभाषा से

$\log_a 0 = -\infty$ (जहाँ $a > 1$)

इसी प्रकार हम जानते हैं कि

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

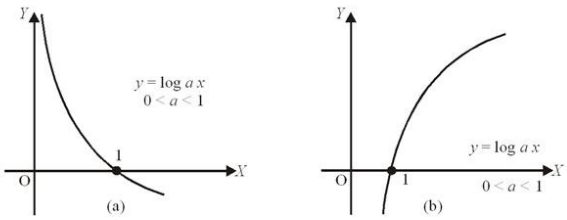
अतः यदि $a^x = 0$ और $a < 1$, तो $x = +\infty$

अर्थात् $a < 1$ हो, तो $a^{+\infty} = 0$

अतः लघुगणक की परिभाषा से

$$\log_a 0 = +\infty \quad (\text{जहाँ } a < 1)$$

टिप्पणी: इसे ग्राफ के माध्यम से निम्न प्रकार व्यक्त कर समझा जा सकता हैः



चित्र 9.01

नियम 5. सिद्ध करना $M = a^{\log_a M}$

उपपत्ति : मान लीजिए आधार a पर M का लघुगणक x है तब लघुगणक की परिभाषा से

$\log_a M = x$ या $a^x = M$

अब $M = a^x$ में x का मान रखने पर

$$M = a^{\log_a M}$$

विशेष स्थिति में a के स्थान पर e लेने पर

$$M = e^{\log_e M}$$

9.04 आधार परिवर्तन सूत्र (Base changing formula)

सिद्ध करना : $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b}$

उपपत्ति : मान लीजिए $\log_b M = x$ $\therefore$ $M = b^x$ (i)

तथा $\log_a b = y$ $\therefore$ $b = a^y$ (ii)

अब (i) से $M = b^x = \left(a^y\right)^x$ [(ii) से]

या $M = \left(a^y\right)^x$ या $M = a^{xy}$

या $\log_a M = xy$ (परिभाषा से)

या $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ [(i) व (ii) से]

अतः $\log_b M = \dfrac{\log_a M}{\log_a b}$

सिद्ध करना : $\log_b a \times \log_a b = 1$

उपपत्ति : मान लीजिए $\log_b a = x$ (i)

$\therefore$ $b^x = a$

या $b = a^{1/x}$

या $\log_a b = 1/x$ (परिभाषा से) (ii)

अब (i) एवं (ii) से $\log_b a \times \log_a b = x \times 1/x = 1$

टिप्पणी : जिनमें आधार नहीं दर्शाया जाता है वहाँ लघुगणक का आधार 10 मान कर हल किया जाता है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 3: सिद्ध कीजिए : $\log 540 = 2\log 2 + 3\log 3 + \log 5.$

हल : वाम पक्ष $= \log 540$

$= \log\left(2^2 \times 3^3 \times 5\right)$

$= \log 2^2 + \log 3^3 + \log 5$

$= 2\log 2 + 3\log 3 + \log 5 =$ दक्षिण पक्ष

उदाहरण 4: सिद्ध कीजिए : $\log(1+2+3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$

हल : वाम पक्ष $= \log(1+2+3)$

$= \log 6$

$= \log(1 \times 2 \times 3)$

$= \log 1 + \log 2 + \log 3 =$ दक्षिण पक्ष

उदाहरण 5: यदि $\log_{10} 2 = 0\cdot 3010$ और $\log_{10} 3 = 0\cdot 4771$ हो तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\log_{10} 5$ (ii) $\log_{10} 24$ (iii) $\log_{10} 8/9$

हल : (i) $\log_{10} 5 = \log_{10}\dfrac{5\times 2}{2} = \log_{10}\dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0\cdot 3010 = \cdot 6990$

(ii) $\log_{10} 24 = \log_{10}\left(2^3 \times 3\right) = 3\log_{10} 2 + \log_{10} 3$

$= 3(0\cdot 3010) + 0\cdot 4771 = 0\cdot 9030 + 0\cdot 4771 = 1\cdot 3801$

(iii) $\log_{10} 8/9 = \log_{10} 8 - \log_{10} 9 = \log_{10} 2^3 - \log_{10} 3^2 = 3\log_{10} 2 - 2\log_{10} 3$

$= 3(0\cdot 3010) - 2(0\cdot 4771) = \cdot 9030 - 0\cdot 9542 = -0\cdot 0512$

उदाहरण 6. सिद्ध कीजिए : $4\log\dfrac{24}{25} - 16\log\dfrac{9}{10} + 7\log\dfrac{81}{80} = \log 5.$

हल : वाम पक्ष $= 4\log\dfrac{24}{25} - 16\log\dfrac{9}{10} + 7\log\dfrac{81}{80}$

$= 4(\log 24 - \log 25) - 16(\log 9 - \log 10) + 7(\log 81 - \log 80)$

$= 4\log 24 - 4\log 25 - 16\log 9 + 16\log 10 + 7\log 81 - 7\log 80$

$= 4\log\left(2^3 \times 3\right) - 4\log 5^2 - 16\log 3^2 + 16\log(2\times 5) + 7\log 3^4 - 7\log\left(2^4 \times 5\right)$

$= 4\left\{\log 2^3 + \log 3\right\} - 8\log 5 - 32\log 3 + 16\left(\log 2 + \log 5\right) + 28\log 3 - 7\left(\log 2^4 + \log 5\right)$

$= 12\log 2 + 4\log 3 - 8\log 5 - 32\log 3 + 16\log 2 + 16\log 5 + 28\log 3 - 28\log 2 - 7\log 5$

$= 28\log 2 - 28\log 2 + 32\log 3 - 32\log 3 + 16\log 5 - 15\log 5$

$= \log 5 =$ दक्षिण पक्ष

उदाहरण 7. निम्नलिखित समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$\log(x+1)+\log(x-1)=\log 11+2\log 3.$$

हल : $\log(x+1)+\log(x-1)=\log 11+2\log 3$

या $\log\{(x+1)(x-1)\}=\log 11+\log 3^2$

या $\log\left(x^2-1\right)=\log 11+\log 9$

या $\log\left(x^2-1\right)=\log(11\times 9)$

या $\log\left(x^2-1\right)=\log 99$

या $x^2-1=99$

या $x^2=100$

$\therefore$ $x=10$ $(\because x>0)$

उदाहरण 8: सिद्ध कीजिए :

$$\log_b a\times\log_c b\times\log_a c=1.$$

हल : सभी लघुगणकों को समान आधार e में बदलने पर

$$\log_b a=\frac{\log_e a}{\log_e b};\ \log_c b=\frac{\log_e b}{\log_e c}\ ;\ \log_a c=\frac{\log_e c}{\log_e a}$$ $[\because\ 6=1\times 2\times 3]$

अतः वाम पक्ष $=\dfrac{\log_e a}{\log_e b}\times\dfrac{\log_e b}{\log_e c}\times\dfrac{\log_e c}{\log_e a}$

$=1=$ दक्षिण पक्ष

प्रश्नमाला 9.2

(इस प्रश्नमाला के उन प्रश्नों में जिनमें आधार नहीं दर्शाया गया है उनमें लघुगणक का आधार 10 मान कर हल करना है।)

1. सिद्ध कीजिए : $\log 630=\log 2+2\log 3+\log 5+\log 7$.
2. सिद्ध कीजिए : $\log\dfrac{9}{14}+\log\dfrac{35}{24}-\log\dfrac{15}{16}=0$
3. सिद्ध कीजिए : $\log 10+\log 100+\log 1000+\log 10000=10$.
4. यदि $\log 2=0\cdot 3010$, $\log 3=0\cdot 4771$, $\log 7=0\cdot 8451$ तथा $\log 11=1\cdot 0414$ तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $\log 36$ (ii) $\log\dfrac{42}{11}$ (iii) $\log\left(\dfrac{11}{7}\right)^5$

   (iv) $\log 70$ (v) $\log\dfrac{121}{120}$ (vi) $\log 5^{1/3}$
5. निम्नलिखित समीकरण से x का मान ज्ञात कीजिए :

   $\log_x 4+\log_x 16+\log_x 64=12.$
6. समीकरण $\log(x+1)-\log(x-1)=1$ का हल ज्ञात कीजिए।
7. मान ज्ञात कीजिए : $3^{2-\log_3 4}$.
8. निम्नलिखित प्रश्नों का हल एक पद के रूप में लिखिए :

   (i) $\log 2+1$ (ii) $\log 2x+2\log x$
9. सिद्ध कीजिए :

   (i) $\log_5 3\cdot\log_3 4\cdot\log_2 5=2.$ (ii) $\log_a x\times\log_b y=\log_b x\times\log_a y.$

9.05 लघुगणक की पद्धतियाँ (System of logarithms):

लघुगणक का आधार कोई भी राशि हो सकती है, परन्तु e तथा 10 आधार वाली दो पद्धतियाँ सर्वाधिक उपयोग में लायी जाती है।

(i) स्वाभाविक या नैपियर की लघुगणक पद्धति
(Natural or Napierian system of logarithm) :

इस पद्धति का नाम गणितज्ञ नैपियर के नाम पर रखा गया है। इसमें आधार 'e' लिया जाता है, जहाँ e निम्न अनन्त श्रेणी का योग है

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \cdots = 2\cdot 71828183 \text{ (लगभग)}$$

इसका प्रयोग उच्च गणितीय गणनाओं तथा सैद्धान्तिक खोजों के समय किया जाता है परन्तु प्रायोगिक तथा व्यवहारिक संख्यात्मक गणनाओं में यह अनुपयोगी है क्योंकि e असम्मेय राशि है।

(ii) साधारण या ब्रिग की लघुगणक पद्धति
(Common or Brigg's system of logarithm) :

इस पद्धति में लघुगणक का आधार 10 लिया जाता है। जब आधार दिया हुआ नहीं होता तब हम 10 को ही आधार मान कर लघुगणक का प्रयोग करते हैं। साधारण लघुगणक का उपयोग समस्त व्यवहारिक संख्यात्मक गणनाओं में अधिक किया जाता है। ब्रिग ने सर्व प्रथम 10 के आधार पर लघुगणक सारणी (Logarithmic Table) तैयार की। इसलिए इसको ब्रिग पद्धति भी कहते है।

टिप्पणी : सभी प्रायोगिक गणनाओं में जहाँ आधार नहीं दिया गया हो वहाँ इसे 10 माना जाता है।

9.06 नैपियर लघुगणक तथा साधारण लघुगणक में संबंध
(Relation between Napierian logarithm and common logarithm) :

$$\log_{10} n = \log_e n \times \frac{1}{\log_e 10}, \text{ [आधार परिवर्तन नियम से]}$$

परन्तु $\quad \log_e 10 = 2\cdot 30258509$

$\therefore \quad \dfrac{1}{\log_e 10} = \dfrac{1}{2\cdot 30258509} = 0\cdot 43429448$

अतः $\quad \log_{10} n = 0\cdot 43429448 \times \log_e n$

9.07 लघुगणकों का पूर्णांश एवं भिन्नांश
(Characteristic and mantissa of the logarithms):

प्रत्येक संख्या का लघुगणक दो संख्याओं का योगफल होता है जिनमें एक संख्या पूर्णांक तथा दूसरी भिन्नात्मक या दशमलव में होती है, जैसे

$$\log 532 = 2 + \cdot 7259 = 2\cdot 7259$$

दशमलव से पूर्व पूर्ण संख्या को पूर्णांश (Characteristic) तथा दशमलव के पश्चात् की संख्या को अपूर्णांश या भिन्नांश (Mantissa) कहते हैं। अतः यहाँ पूर्णांश 2 तथा भिन्नांश 7259 है।

टिप्पणी :

(i) पूर्णांश धनात्मक या ऋणात्मक संख्या हो सकती है जबकि भिन्नांश को सदैव धनात्मक रखा जाना चाहिए। भिन्नांश यदि ऋणात्मक है तो इसको धनात्मक बनाने के लिए पूर्णांश में से एक कम करके इसे भिन्नांश में जोड़ा जाता है।

(ii) यदि पूर्णांश ऋणात्मक है तो इसके ऊपर बार चिह्न लगाकर दर्शाया जाता है।

उदाहरण 9: यदि $\log 142 = 2\cdot 1523$ तो पूर्णांक भाग 2 को पूर्णांश तथा दशमलव भाग $\cdot 1523$ को भिन्नांश कहेंगे।

उदाहरण 10: यदि $\log M = -2\cdot 1423$ है तो इसका पूर्णांश ज्ञात करने के लिए पहले भिन्नांश को धनात्मक बनाया जाना चाहिए। यह निम्न प्रकार से किया जाना चाहिए :

$$-2\cdot 1423 = -2 - \cdot 1423 = (-2-1) + (1 - \cdot 1423) = -3 + \cdot 8577$$

अतः यहाँ पूर्णांश -3 तथा भिन्नांश $\cdot 8577$ है।

टिप्पणीः रेखिका चिह्न (ऋणात्मक पूर्णांश के लिए) : उपर्युक्त उदाहरण 10 में पूर्णांश ऋणात्मक है अतः इसे $\overline{3}\cdot8577$ के रूप में लिखा जाना चाहिए एवं इसे रेखिका (Bar) 3 दशमलव 8577 पढ़ा जाना चाहिए। अतः $\log M=-2\cdot1423$ के स्थान पर $\log M=\overline{3}\cdot8577$ लिखा जाना चाहिए।

9.08 किसी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश ज्ञात करने की विधि
(Method of find the of logarithm of a number)

(i) **1 या इससे बड़ी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश :** घातांक के नियम से हम जानते हैं कि

$$10^0=1 \qquad \therefore \qquad \log_{10}1=0$$
$$10^1=10 \qquad \therefore \qquad \log_{10}10=1$$
$$10^2=100 \qquad \therefore \qquad \log_{10}100=2$$
$$10^3=1000 \qquad \therefore \qquad \log_{10}1000=3$$

उपर्युक्त परिणामों से स्पष्ट है कि 1 और 10 के मध्य की संख्याओं के लघुगणक 0 और 1 के मध्य होंगे, अर्थात् पूर्णांक में एक अंक रखने वाली संख्या के लघुगणक $0+$ एक धनात्मक भिन्न होगी जिसमें पूर्णांश 0 है। 10 और 100 के मध्य की संख्याओं के लघुगणक 1 और 2 के मध्य होंगे, अर्थात् पूर्णांश 1 होगा। इसी प्रकार 100 और 1000 के मध्य की संख्याओं के लघुगणक 2 और 3 के मध्य होंगे, अर्थात् पूर्णांश 2 होगा।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि 1 या इससे बड़ी किसी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश सदैव धनात्मक होता है एवं संख्या के लघुगणक का पूर्णांक भाग के अंको की संख्या से एक कम होता है। जैसे लघुगणक के पूर्णांक भाग में n अंक हैं तो इसका पूर्णांश $(n-1)$ होगा।

उदाहरणार्थ : संख्या $42\cdot5$ के पूर्णांक भाग (42) में दो अंक हैं अतः इसके लघुगणक अर्थात् $\log 42\cdot5$ पूर्णांश $2-1=1$ होगा। इसी प्रकार $\log 425\cdot23$ का पूर्णांश $3-1=2$ होगा।

(ii) **0 से बड़ी और 1 से छोटी संख्याओं के लघुगणक का पूर्णांश :**

हम जानते हैं कि

$$10^0=1 \qquad \therefore \qquad \log_{10}1=0$$
$$10^{-1}=\frac{1}{10}=\cdot1 \qquad \therefore \qquad \log_{10}\cdot1=-1$$
$$10^{-2}=\frac{1}{100}=\cdot01 \qquad \therefore \qquad \log_{10}\cdot01=-2$$
$$10^{-3}=\frac{1}{1000}=\cdot001 \qquad \therefore \qquad \log_{10}\cdot001=-3$$

इस प्रकार 1 से कम किसी धनात्मक संख्या के लघुगणक का पूर्णांश सदैव ऋणात्मक एवं दशमलव बिन्दु और प्रथम सार्थक अंक के मध्य आए हुए शून्य की संख्याओं से एक अधिक होता है, जैसे दशमलव व प्रथम सार्थक अंक के मध्य n शून्य आयें तो इसके लघुगणक का पूर्णांश $-(n+1)$ या $(\overline{n+1})$ होगा।

उदाहरणार्थ : $\log 0\cdot035$ का पूर्णांश -2 तथा $\log 0\cdot00035$ का पूर्णांश -4 होगा।

टिप्पणीः सार्थक अंक (Significant digit): दशमलव बिन्दु के पश्चात् शून्येतर संख्या से पहले के अथवा अंत के सभी शून्यों को हटा देने पर जो अंक बचते है वे सार्थक अंक कहलाते है, जैसे $\cdot000123$ अथवा $\cdot123000$ में सार्थक अंक 123 हैं। तथा 1 प्रथम सार्थक अंक है।

अब यदि 1 से छोटी धन संख्याओं जैसे $0\cdot0003$ अथवा $0\cdot007294$ का लघुगणक ज्ञात करना हो तो हम देखते हैं कि

$$\log 0\cdot0003 = \log\frac{3}{10000} = \log\left(3\times10^{-4}\right)$$

$$= \log 10^{-4} + \log 3$$

$$= -4 + 0\cdot4771 = \bar{4}\cdot4771 \qquad [\log 3 = 0.4771 \text{ सारणी * से}]$$

और $$\log 0\cdot007294 = \log\frac{7\cdot294}{1000} = \log\left(7\cdot294\times10^{-3}\right)$$

$$= \log 10^{-3} + \log 7\cdot294 = -3 + 0\cdot8629$$

$$= \bar{3}\cdot8629 \qquad [\log 7.294 = 0.86291 \text{ सारणी * से}]$$

पूर्णांश ज्ञात करने की क्रिया विधिः

(i) यदि दी गई संख्या दशमलव भिन्न में न हो तो इसमें परिवर्तित करें।

(ii) यदि (i) में प्राप्त संख्या 1 से बड़ी या बराबर हो तो पूर्णांश को लिए सूत्र होगा :

पूर्णांश = (दशमलव बिन्दु के बाईं ओर अंको की संख्या) -1

(iii) यदि (i) में प्राप्त संख्या 1 से छोटी एवं धनात्मक हो तो पूर्णांश के लिए सूत्र होगा :

पूर्णांश = $-$ [(दशमलव बिन्दु और प्रथम सार्थक अंक के मध्य शून्यों की संख्या) + 1]

9.09 किसी संख्या के लघुगणक का भिन्नांश ज्ञात करने की विधि

(Method to find the maintissa of logarithm of a number)

किसी संख्या के लघुगणक का भिन्नांश ज्ञात करने के लिए हम लघुगणक सारणी (Logarithm table) को प्रयोग में लाते है। यह सारणी पुस्तक के अन्त में **परिशिष्ट 'अ'** पर दी गई है।

लघुगणक सारणी की विशेषताएँ:

लघुगणक सारणी की निम्नलिखित विशेषताएँ होती हैं :

(1) इनमें किसी संख्या के लघुगणक के भिन्नांश ही होते हैं।

(2) सारणी के तीन भाग होते हैं :

(i) **प्रथम स्तम्भ :** इसमें 10 से 99 तक की संख्याएँ होती हैं।

(ii) **अगले दस स्तम्भ :** इसका प्रतिनिधित्व $0, 1, 2, \ldots, 9$ तक की संख्याएँ करती हैं।

(iii) **माध्य अन्तर के स्तम्भ :** अन्त के तीन स्तम्भ जो प्रत्येक तीन उपस्तम्भों में विभक्त होते हैं एवं इनका प्रतिनिधित्व 1,2,3; 4,5,6 तथा 7,8,9 संख्याएँ करती हैं।

भिन्नांश ज्ञात करने की क्रिया विधि :

भिन्नांश ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित क्रिया विधि का प्रयोग करते है, इसे एक उदाहरण $\log 38\cdot56$ के माध्यम से स्पष्ट किया गया है।

(i) दी गई संख्या में यदि कोई दशमलव है तो उसे हटा दें अतः यहाँ नयी संख्या 3856 हो जाएगी।

(ii) चरण (i) से प्राप्त संख्या के प्रथम दो अंकों से बनी संख्या सारणी के बाँयी ओर प्रथम स्तम्भ में देखते है । यहाँ यह संख्या 38 है अतः प्रथम स्तम्भ में हम 38 पर पहुँचते हैं।

(iii) चरण (i) में प्राप्त संख्या के तीसरे अंक 5 को सारणी के अगले दस स्तम्भों में देखते हैं।

(iv) संख्या 38 की पंक्ति तथा अंक 5 का स्तम्भ जहाँ मिलते हैं उस मान को लिख लेते हैं यहाँ पर यह मान 5855 है।

(v) चरण (i) में प्राप्त आनुपातिक संख्या के चौथे अंक 6 को सारणी के दांयी ओर दी गई माध्य अन्तरिकी संख्याओं में देखते हैं।

(vi) संख्या 38 की पंक्ति तथा अनुपातिक अंक 6 के स्तम्भ जहां परस्पर मिलते हैं वह मान 7 हैं।

(vii) इस प्रकार चरण (iv) तथा (vi) में प्राप्त संख्याओं का योग $5855 + 7 = 5862$ है। दशमलव बिन्दु के पश्चात् यह संख्या लिखने पर हमें अभीष्ट भिन्नांश प्राप्त होता है

अतः $\log 38\cdot56$ का भिन्नांश $\cdot5862$ है।

टिप्पणीः

(i) उपर्युक्त परिणाम से स्पष्ट है कि भिन्नाँश के लिए प्राप्त संख्या के बाईं ओर दशमलव बिन्दु लगाते हैं।

(ii) यदि जिस संख्या का लघुगणक ज्ञात करना है वह एक अंक की हो तो उसके आगे शून्य लिख कर उसका भिन्नाँश ज्ञात करते हैं। उदाहरणार्थ $\log 3$ का भिन्नाँश ज्ञात करना है तो हम $\log 30$ या $\log 300$ का भिन्नांश सारणी से ज्ञात करते हैं। यही $\log 3$ का भिन्नाँश होगा।

(iii) यदि किसी लघुगणक में चार सार्थक अंकों से अधिक अंक हो तो चार अंकों की लघुगणक सारणी का उपयोग करते समय

(क) आगे के अंक 5 से कम होने पर छोड़ देते हैं।

(ख) आगे के अंक 5 या अधिक होने पर पूर्व के अंक में 1 जोड़कर लिख देते हैं।

अतः प्राप्त चार अंकों की संख्या से भिन्नाँश ज्ञात करते हैं।

(iv) किसी संख्या का लघुगणक ज्ञात करने के लिए :

(क) अनुच्छेद 9.08 में बतायी गयी विधि से पूर्णांश ज्ञात करते हैं।

(ख) अनुच्छेद 9.09 में बतायी गयी विधि से भिन्नांश ज्ञात करते हैं।

जैसे $38\cdot56$ का पूर्णांश 1 तथा भिन्नाँश $\cdot5862$ है।

अतः $\log 38\cdot56 = 1\cdot5862$

(v) एक जैसी संख्याओं के लघुगणकों के भिन्नाँश समान होते है। उदाहरणार्थ 2834, $28\cdot34$ और $0\cdot002834$ के पूर्णांश तो क्रमशः 3, 1 और -3 है परन्तु सभी का भिन्नाँश $\cdot4524$ ही होगा।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 11: नीचे दी गयी संख्याओं के लघुगणक के पूर्णांश ज्ञात कीजिए :

(i) 5970 (ii) $125\cdot35$ (iii) $2\cdot5795$ (iv) $0\cdot7598$ (v) $0\cdot0074$

हल :

(i) संख्या 5970 में 4 अंक है अतः इसके लघुगणक का पूर्णांश $4-1=3$ होगा।

(ii) संख्या $125\cdot35$ में पूर्णांक 125 है जिसमें 3 अंक है। अतः संख्या 125.35 के लघुगणक का पूर्णांश $3-1=2$ होगा।

(iii) संख्या $2\cdot5795$ में पूर्णांक 2 है जो कि एक ही अंक है अतः लघुगणक में पूर्णांश $1-1=0$ होगा।

(iv) संख्या $0\cdot7595$ में दशमलव बिन्दु तथा प्रथम सार्थक अंक 7 के मध्य एक भी शून्य नहीं है अतः इस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश $-(0+1)=-1$ या $\bar{1}$ होगा।

(v) संख्या $0\cdot0074$ में दशमलव बिन्दु तथा प्रथम सार्थक अंक 7 के मध्य 2 शून्य है अतः इस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश $-(2+1)=-3$ या $\bar{3}$ होगा।

उदाहरण 12: लघुगणक की सारणी की सहायता से निम्नलिखित संख्याओं का लघुगणक ज्ञात कीजिएः

(i) 25794 (ii) $5\cdot3498$ (iii) $0\cdot3582$ (iv) $0\cdot003$ (v) $0\cdot000125$

हल :

(i) संख्या 25794 में 5 अंक है अतः $\log 25794$ का पूर्णांश $=5-1=4$ होगा।

दी गई संख्या के प्रथम दो अंको 25 के संगत पंक्ति तथा तीसरे अंक 7 के संगत स्तम्भ परस्पर जहाँ मिलते हो वह मान 4099 है। अब चौथा अंक 9 जो अनुपातिक अंक है (तथा उसके आगे का अंक 4 जो कि 5 से कम होने के कारण इसे छोड़ा जा सकता है) के संगत स्तम्भ तथा अंक 25 के संगत पंक्ति परस्पर जहाँ मिलते हो वह मान 15 है।

$\therefore \quad 4099+15 = 4114$

अतः उपर्युक्त संख्या के लघुगणक का भिन्नांश $=\cdot4114$

$\therefore \quad \log 25794 = 4\cdot4114$

(ii) $\log 5\cdot3498$ के लिए पूर्णांक $= 1-1 = 0$

स्पष्टतः इसका पूर्णांश 0 है तथा हमें यहाँ पाँच अंक दिए गए हैं जबकि हमें चार अंको वाली सारणी से इसका मान ज्ञात करना है अतः पाँचवा अंक 5 से अधिक होने के कारण चौथे अंक में एक जोड़ने पर यह 10 हो जाता है, अतः चौथा अंक शून्य तथा तीसरा अंक 4 से 1 अधिक होकर 5 हो जाएगा इस प्रकार हमें $5\cdot350$ का लघुगणक ज्ञात करना है। अब लघुगणक सारणी में 53 वाली पंक्ति में एवं

शीर्ष 5 वाले स्तम्भ के कटान बिन्दु देखने पर यह 7284 आता है। अतः इसका भिन्नांश ·7284 होगा

$\therefore \quad \log 5\cdot 3498 = 0\cdot 7284$

(iii) $\log(0\cdot 3582)$ के लिए पूर्णांश $= -(0+1) = -1 = \overline{1}$

भिन्नांश $= \cdot(5539+2) = \cdot 5541$

$\therefore \quad \log 0\cdot 3582 = \overline{1}\cdot 5541$

(iv) $\log 0\cdot 003$ के लिए पूर्णांश $= -(2+1) = -3 = \overline{3}$

भिन्नांश $= \cdot(4771)$

$\therefore \quad \log 0\cdot 003 = \overline{3}\cdot 4771$

(v) $\log 0\cdot 000125$ के लिए पूर्णांश $= -(3+1) = -4 = \overline{4}$

भिन्नांश $= \cdot(0969) = \cdot 0969$

$\therefore \quad \log 0\cdot 000125 = \overline{4}\cdot 0969$

प्रश्नमाला 9.3

1. निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक के पूर्णांश ज्ञात कीजिएः

(i) 1270	(ii) 20·125	(iii) 7·985	(iv) 431·5
(v) 0·02	(vi) 0·02539	(vii) 70	(viii) 0·000287
(ix) 0·005	(x) 0·00003208	(xi) 0·000485	(xii) 0·007
(xiii) 0·0005309			

2. लघुगणक सारणी का प्रयोग कर निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक ज्ञात कीजिएः

(i) 2813	(ii) 400	(iii) 27·28	(iv) 9
(v) 0·678	(vi) 0·0035	(vii) 0·08403	(viii) 0·000287
(ix) 1·234	(x) 0·00003258	(xi) 0·000125	(xii) 0·00003208

9.10 प्रति लघुगणक तथा इनकी सारणी (Antilogarithms and their tables):

लघुगणक की विपरीत क्रिया को प्रतिलघुगणक कहते है। इस प्रकार एक धनात्मक संख्या n किसी अन्य संख्या m का प्रतिलघुगणक होती है, यदि $\log n = m$ अर्थात् n, m का प्रतिलघुणक होता है तो $n = \text{anti}\log m \Leftrightarrow \log n = m$.

(i) $\log 300 = 2\cdot 4771 \Leftrightarrow \text{antilog } 2\cdot 4771 = 300$

(ii) $\log 432\cdot 5 = 2\cdot 6360 \Leftrightarrow \text{antilog } 2\cdot 6360 = 432\cdot 5$

(iii) $\log 0\cdot 1257 = \overline{1}\cdot 0993 \Leftrightarrow \text{antilog}\left(\overline{1}\cdot 0993\right) = 0\cdot 1257$

(iv) $\log 0\cdot 000425 = \overline{4}\cdot 6284 \Leftrightarrow \text{antilog}\left(\overline{4}\cdot 6284\right) = 0\cdot 0004250$

लघुगणक सारणी से भी लघुगणक ज्ञात करने की विपरीत प्रक्रिया अपना कर प्रतिलघुगणक ज्ञात किए जा सकते हैं। परन्तु सरलता एवं शीघ्रता से प्रतिलघुगणक ज्ञात करने की दृष्टि से **परिशिष्ट "ब"** में प्रतिलघुगणक सारणी दी गई है।

इस सारणी के प्रथम स्तम्भ में ·00 से ·99 तक की संख्याएँ दी गयी हैं तथा अन्य स्तम्भ लघुगणक की भांति ही दिए गए हैं।

प्रतिलघुगणक ज्ञात करने की क्रिया विधि :

(i) दी गयी संख्या के पूर्णांश भाग को छोड़ते हुए दशमलव भिन्न के प्रथम दो अंकों के संगत प्रतिलघुगणक सारणी में पंक्ति का चयन करते हैं।

(ii) चरण (i) में चयनित पंक्ति में उस संख्या को देखते हैं जो दशमलव भिन्न के तीसरे अंक के संगत शीर्ष वाले स्तम्भ में हो।

(iii) चरण (i) में चयन की गई पंक्ति में ही उस संख्या को देखते है जो दशमलव भिन्न के चौथे अंक के संगत शीर्ष वाले अनुपातिक अन्तर के स्तम्भ में है। इस संख्या को चरण (ii) में प्राप्त संख्या में जोड़ देते हैं।

(iv) अब दी गई संख्या के पूर्णांशः पर ध्यान देंगे। यदि यह पूर्णांश धनात्मक, माना n है तो चरण (iii) में प्राप्त संख्या के $(n+1)$ अंकों के पश्चात् दशमलव बिन्दु लगाएँगे।

यदि पूर्णांश ऋणात्मक, माना n है तो दशमलव बिन्दु के दाईं और $(n-1)$ शून्य लिख कर उसके पश्चात् चरण (iii) में प्राप्त संख्या को लिखेंगे।

टिप्पणी : जिस संख्या का प्रति लघुगणक ज्ञात करना है वह ऋणात्मक हो तो इसके दशमलव भिन्न वाले भाग को धनात्मक बनाने के लिए इसमें 1 जोड़ कर पूर्णांश भाग में से 1 घटा देंगे। इस प्रकार प्राप्त संख्या का ही हम प्रतिलघुगणक ज्ञात करते हैं।

उदाहणार्थ : $-3\cdot6432$ में दशमलव भिन्न $-0\cdot6432$ ऋणात्मक है अतः हम $-3\cdot6432$ को नीचे लिखे रूप में परिवर्तित करेंगे :

$$-3\cdot6432=-3-1+1-0\cdot6432=-4+0\cdot3568=\overline{4}\cdot3568$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 13: $3\cdot7523$ का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) दी गयी संख्या का भिन्नाँश $\cdot7523$ है।

(ii) प्रतिलघुगणक सारणी में बायी ओर के प्रथम स्तम्भ में $\cdot75$ के संगत पंक्ति तथा तीसरे अंक 2 के संगत शीर्ष वाले स्तम्भ की उभयनिष्ठ संख्या 5649 है।

(iii) अनुपातिक अंतर में 3 के नीचे इसी पंक्ति में संख्या 4 है।

(iv) चरण (ii) तथा (iii) की संख्याओं का योग $=5649+4=5653$

(v) दी गई संख्या का पूर्णांश 3 है अतः संख्या का प्रति लघुगणक 4 अंको वाली संख्या होगी।

(vi) चरण (iv) में प्राप्त संख्या चार अंको की संख्या बनाने के लिए उपयुक्त स्थान का दशमलव बिन्दु लगाकर इसे $5653\cdot0$ लिखेंगे।

अतः $\text{antilog } 3\cdot7523=5653\cdot0$

उदाहरण 14: $\text{antilog } \overline{2}\cdot0258$ ज्ञात कीजिए।

हल :

(i) दी गई संख्या का भिन्नाँश $\cdot0258$ है।

(ii) $\cdot02$ की पंक्ति तथा शीर्ष 5 वाले स्तम्भ की उभयनिष्ठ संख्या 1059 है।

(iii) इसी पंक्ति में वह संख्या जो शीर्ष 8 वाले अनुपातिक अंतर के स्तम्भ में हो, 2 है।

(iv) $\therefore \quad 1059+2=1061.$

(v) दी गई संख्या का पूर्णांश $\overline{2}$ है अतः $2-1=1.$

अर्थात् दशमलव बिन्दु के दांयी ओर एक शून्य लगाकर उसके आगे चरण (iv) से प्राप्त संख्या $\cdot01061$ लिखते हैं।

उदाहरण 15: $\log x=0\cdot5428$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\log x=0\cdot5428$

या $x=\text{antilog } 0\cdot5428$

$=3\cdot489$

प्रश्नमाला 9.4

1. निम्न लिखित संख्याओं का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए।

   (i) $1\cdot3210$ (ii) $2\cdot4127$ (iii) $0\cdot084$

   (iv) $\overline{1}\cdot301$ (v) $\overline{3}\cdot2462$ (vi) $\overline{2}\cdot0258$

2. मान ज्ञात कीजिए।

   (i) $\text{antilog } 3\cdot1234$ (ii) $\text{antilog } \overline{2}\cdot5821$ (iii) $\text{antilog } 0\cdot3$

   (iv) $\text{antilo } 2\cdot466$

3. निम्नलिखित में x का मान ज्ञात कीजिए।

   (i) $\log x=\overline{2}\cdot6727$ (ii) $\log x=0\cdot452$

विविध उदाहरण

उदाहरण 16: यदि $\text{antilog}\ 1\cdot4339 = 27\cdot16$ हो तो $\text{antilog}\ \overline{2}\cdot4339$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि $1\,.\,4339$ तथा $\overline{2}\cdot4339$ के भिन्नाँश समान हैं।

अतः दोनों संख्याओं के antilog एक जैसे अंको वाली संख्याएँ होंगी।

अब जिस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश $\overline{2}$ है तब antilog में दशमलव बिन्दु के बाद एक शून्य होगा।

अतः अभीष्ट $\text{antilog}\ \overline{2}\cdot4339 = \cdot02716$ होगा।

उदाहरण 17: यदि $\log 0\cdot723 = \overline{1}\cdot8591$ हो तो $\sqrt[3]{72\cdot3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $x = \sqrt[3]{72\cdot3}$

$\therefore \quad \log x = \log(72\cdot3)^{1/3}$ या $\log x = \frac{1}{3}\log(72\cdot3)$

या $\log x = \frac{1}{3}(1\cdot8591)$ [$\because \log 0\cdot723$ तथा $\log 7\cdot23$ के भिन्नांश समान हैं]

या $\log x = 0\cdot6197$

या $x = \text{antilog}\,(\cdot6197)$ $\therefore$ $x = 4\cdot166$

उदाहरण 18: $\log\left(\frac{2^3\times3}{5^2\times7^3}\right)$ को लघुगणक के योग और अन्तर के रूप में लिखिए।

हल : $\log\left(\frac{2^3\times3}{5^2\times7^3}\right) = \log\left(2^3\times3\right) - \log\left(5^2\times7^3\right)$

$$= \log 2^3 + \log 3 - \log 5^2 - \log 7^3$$
$$= 3\log 2 + \log 3 - 2\log 5 - 3\log 7$$

उदाहरण 19: यदि $\log_{\sqrt{8}} b = 3\frac{1}{3}$ हो तो b का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\log_{\sqrt{8}} b = 3\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{10}{3}} = b$

$\Rightarrow$ $b = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{10}{3}} = 2^{\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} = 2^5 = 32$ अतः $b = 32$ होगा।

उदाहरण 20: यदि $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$ सिद्ध कीजिए: $a^a\cdot b^b\cdot c^c = 1$

हल : माना $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = k$

तब $\log a = k(b-c)$, $\log b = k(c-a)$ और $\log c = k(a-b)$

अतः $a\log a + b\log b + c\log c = a\cdot k(b-c) + b\cdot k(c-a) + ck(a-b) = 0$

$\therefore \quad \log a^a + \log b^b + \log c^c = 0$

$\log a^a b^b c^c = \log 1$ या $a^a\cdot b^b\cdot c^c = 1$ $[\because \log 1 = 0]$

विविध प्रश्नमाला–9

1. $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ हो तो x का मान होगा :

(A) $4^{\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) 4 (D) $4\times\sqrt{2}$

2. $\log_x 243 = 2\cdot 5$ हो तो x का मान होगा :

(A) 9 (B) 3 (C) 1 (D) 81

3. $\log(1+2\times 3)$ का मान है :

(A) $2\log 3$ (B) $\log 1\cdot\log 2\cdot\log 3$ (C) $\log 1+\log 2+\log 3$ (D) $\log 7$

4. $\log(m+n)$ का मान है :

(A) $\log m+\log n$ (B) $\log mn$ (C) $\log m\times\log n$ (D) इनमें से कोई नहीं

5. $\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c$ का मान है :

(A) 0 (B) $\log abc$ (C) 1 (D) $\log\left(b^a\cdot c^b\cdot a^c\right)$

6. यदि $a>1$ तो $\log_a 0$ का मान है :

(A) $-\infty$ (B) ∞ (C) 0 (D) 1

7. यदि $a<0$ तो $\log_a 0$ का मान है :

(A) $-\infty$ (B) ∞ (C) 0 (D) 1

8. $\log_a b$ का अन्य रूप है :

(A) a^b (B) b^a (C) $\frac{1}{\log_b a}$ (D) $\log_b a$

9. संख्या $\log_2 7$ है :

(A) पूर्णांक (B) परिमेय (C) अपरिमेय (D) अभाज्य

10. यदि $a=\log_3 5$ तथा $b=\log_7 25$ तब सही विकल्प है :

(A) $a<b$ (B) $a>b$ (C) $a=b$ (D) इनमें से कोई नहीं

11. यदि $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$ हो, तो x का मान लिखिए।

12. यदि $\log(a-b)=\log a-\log b$ हो तो a का मान b के पदों में क्या होगा ?

13. यदि $\frac{1}{\log_a x}+\frac{1}{\log_c x}=\frac{2}{\log_b x}$ हो, तो a, b तथा c में परस्पर संबंध बताइए।

14. यदि $\log 2=0\cdot 3010$ हो, तो $\log 200$ का मान लिखिए।

15. $\log 0\cdot 001$ का मान लिखिए।

16. यदि $\log 7=0\cdot 8451$ और $\log 3=0\cdot 4771$ हो, तो $\log(21)^5$ का मान लिखिए।

17. $\log 6+2\log 5+\log 4-\log 3-\log 2$ का मान लिखिए।

18. यदि $\frac{\log 144}{\log 12}=\log x$ हो, तो x का मान लिखिए।

19. सिद्ध कीजिए : $\log_{10}\tan 1^0\cdot\log_{10}\tan 2^0\ldots\ldots\log_{10}\tan 89^0=0$

20. सिद्ध कीजिए : $\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 9=2$

21. यदि $\log 52\cdot04 = 1\cdot7163$, $\log 80\cdot65 = 1\cdot9066$ और $\log 9\cdot753 = 0\cdot9891$ हो, तो $\log\dfrac{52\cdot04\times80\cdot65}{9\cdot753}$ का मान ज्ञात कीजिए।

22. यदि $\log 32\cdot9 = 1\cdot5172$, $\log 568\cdot1 = 2\cdot7544$ और $\log 13\cdot28 = 1\cdot1232$ हो, तो $\log\dfrac{(13\cdot28)^3}{32\cdot9\times568\cdot1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. यदि $\log 2 = 0\cdot3010$ और $\log 3 = 0\cdot4771$ हो, तो $\log(0\cdot06)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

24. सिद्ध कीजिए : $\log\left(\dfrac{x^y y^x}{z^x x^z}\right) = x(\log y - \log z) + (y - z)\log x.$

25. $\log\dfrac{11^3}{5^7\times7^5}$ को लघुगणक के योग और अन्तर के रूप में लिखिए।

26. (a) यदि $\text{antilog } 1\cdot5662 = 36\cdot83$ हो, तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\text{antilog } \bar{1}\cdot5662$ (ii) $\text{antilog } 2\cdot5662$ (iii) $\text{antilog } \bar{2}\cdot5662$

(b) $\text{antilog}(\log x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

27. $(17)^{\frac{1}{2}}$ ज्ञात कीजिए जबकि $\log 17 = 1\cdot2304$ और $\text{antilog } 0\cdot6152 = 4\cdot123$ हो।

28. $\log_{10} 3 = 0{\cdot}4771$ हो तो $\log_{10} 0{\cdot}027$ का मान ज्ञात कीजिए।

29. लघुगणक सारणियों के प्रयोग से $\dfrac{520\cdot4\times8\cdot065}{97\cdot53}$ का मान ज्ञात कीजिए।

30. $\log x - \log(x-1) = \log 3$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. यदि $a^x = n$ हो तो $\log_a n = x$ $\quad [a > 0,\ a \neq 1,\ n > 0]$

2. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

3. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

4. $\log_a (M)^N = N\log_a M$

5. $\log_a a = 1$

6. $\log_a 1 = 0$

7. $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

8. $\log_b a \times \log_a b = 1$

9. $\log_a 0 = -\infty$, यदि $a > 1$

10. $\log_a 0 = +\infty$, यदि $a < 1$

11. $M = e^{\log_e M}$

12. $\log_{10} n = \log_e n \times 0\cdot43429$

13. लघुगणक की विपरीत क्रिया प्रतिलघुगणक कहलाती है।

14. $m = \log n \Leftrightarrow n = \text{antilog } m$

15. $\text{antilog}(\log n) = n$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 9.1

1. $\log_2 64=6$ 2. $\log_{10} 10000=4$ 3. $\log_2 1024=10$
4. $\log_5\left(\frac{1}{25}\right)=-2$ 5. $\log_{10} 0{\cdot}001=-3$ 6. $\log_4 8=\frac{3}{2}$
7. $5^2=25$ 8. $3^6=729$ 9. $10^{-3}=0{\cdot}01$
10. $10^{-1}=0{\cdot}1$ 11. $3^{-3}=\frac{1}{27}$ 12. $\left(\sqrt{2}\right)^4=4$
13. 729 14. $\sqrt{5}$ 15. 8

प्रश्नमाला 9.2

4. (i) $1{\cdot}5562$ (ii) $0{\cdot}5818$ (iii) $0{\cdot}9815$ (iv) $1{\cdot}8451$ (v) $0{\cdot}0037$ (vi) 0.2330

5. 2 6. $1\frac{2}{9}$ 7. $2\frac{1}{4}$ 8. (i) $\log 20$ (ii) $\log 2x^3$

प्रश्नमाला 9.3

1. (1) 3 (ii) 1 (iii) 0 (iv) 2 (v) $\overline{2}$ (vi) $\overline{2}$
(vii) 1 (viii) $\overline{4}$ (ix) $\overline{3}$ (x) $\overline{5}$ (xi) $\overline{4}$ (xii) $\overline{3}$
(xiii) $\overline{4}$

1. (1) 3.4492 (ii) 2.6021 (iii) 1.4359 (iv) 0.9542 (v) $\overline{1}.8312$
(vi) $\overline{3}.5441$ (vii) $\overline{2}.9245$ (viii) $\overline{4}.4579$ (ix) 0.0913 (x) $\overline{5}.5130$
(xi) $\overline{4}.0969$ (xii) $\overline{5}.5062$

प्रश्नमाला 9.4

1. (i) $20{\cdot}94$ (ii) $258{\cdot}6$ (iii) $1{\cdot}213$ (iv) $0{\cdot}2000$ (v) $0{\cdot}001763$ (vi) 0.01061
2. (i) $1328{\cdot}0$ (ii) $0{\cdot}03820$ (iii) $1{\cdot}995$ (iv) $2{\cdot}924$
3. (i) $0{\cdot}04707$ (ii) $2{\cdot}831$

विविध प्रश्नमाला 9

1. (C) 2. (A) 3. (D) 4. (D) 5. (C) 6. (A) 7. (B)
8. (C) 9. (C) 10. (A)

11. 2 12. $\frac{b^2}{b-1}$ 13. $b^2=ac$

14. $2{\cdot}3010$ 15. $\overline{3}$ या -3 16. $6{\cdot}611$

17. 2 18. 100 21. $2{\cdot}6338$

22. $-0{\cdot}9020$ या $\overline{1}{\cdot}0980$ 23. $-7{\cdot}3314$ या $\overline{8}{\cdot}6686$
25. $3\log 11-7\log 5-5\log 7$
26. (a) (i) $0{\cdot}3683$ (ii) $368{\cdot}3$ (iii) $0{\cdot}03683$ (b) x

27. $4{\cdot}123$ 28. $\overline{2}{\cdot}4313$ 29. $43{\cdot}03$ 30. $\frac{3}{2}$

10

सीमा एवं अवकलज
(Limit and Derivatives)

10.01 प्रस्तावना (Introduction)

यहाँ हम सीमा की सहज परिभाषा एवं उसके बीजगणितीय अध्ययनों के आधार पर गणित की उस शाखा का अध्ययन करेंगे जिसमें प्रांत के बिन्दुओं के परिवर्तन से फलन के मान में परिवर्तन होता है। इस प्रविधि को कलन कहते है। इसके अध्ययन हेतु सहजानुभूत बोध का उपयोग करेंगे। अन्त में अवकलज के बीजगणित की सामान्य जानकारी से परिचय करेंगे।

10.02 सीमाएँ, एक दृष्टिकोण (Limits, a view point)

एक नियमित बहुभुज जो एक वृत्त के अन्तर्गत है, के क्षेत्रफल पर विचार करने पर हम देखते हैं कि–

(i) बहुभुज की भुजाओं की संख्या कितनी भी हो उसका क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल से अधिक नहीं होता है।

(ii) जैसे–जैसे बहुभुज की भुजाओं की संख्या बढ़ाते जाते है तो उसका क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल के नजदीक पहुँचता चला जाता है।

(iii) बहुभुज की भुजाओं की संख्याओं को और बढ़ाने पर वृत्त एवं बहुभुज के क्षेत्रफलों का अन्तर बहुत छोटा होता चला जाता है।

इसे कलन में सीमा के रूप में परिभाषित किया जाता है।

10.03 $x \to a$ का अर्थ (Meaning of $x \to a$)

माना x एक चर है और a एक अचर है। जब x, a के अत्यन्त निकट से भी निकट मान ग्रहण करता हुआ a की ओर अग्रसर होता है तो हम कहते हैं x, a की ओर प्रवृत्त है किन्तु x, a के बराबर नहीं हैं और इसे लिखते हैं– $x \to a$.

यदि x दायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है, अर्थात् x, a से बड़ी संख्याओं से a की ओर प्रवृत्त होता है तो इसे हम लिखते हैं $x \to a^+$

इसी प्रकार यदि x बायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है, अर्थात् x, a से छोटी संख्याओं से a की ओर प्रवृत्त होता है तो इसे हम लिखते हैं: $x \to a^-$

अब यदि δ एक धनात्मक संख्या है जो कितनी भी छोटी है तथा x इस प्रकार मान ग्रहण करता है कि $0 < |x - a| < \delta$ तो हम कहते हैं कि x, a की ओर प्रवृत्त है और इसे हम लिखते हैं: $x \to a$.

टिप्पणी: x के a की ओर अग्रसर होने का अर्थ है कि a को छोड़कर उसके सामीप्य (neighbourhood) में प्रत्येक मान x ग्रहण कर सकता है। इस मान को $x = a$ के लिए सीमान्त मान कहते हैं। जैसे, यदि x, 2 के सामीप्य में प्रत्येक मान 1.9, 1.99, 1.999, . . . तथा 2.1, 2.01, 2.001, . . . इत्यादि ग्रहण कर सकता है, किन्तु 2 नहीं।

10.04 फलन की सीमा की परिभाषा (Definition of Limit of a Function)

माना कि फलन $y = f(x)$, $x = a$ पर अपरिभाषित या परिभाषित है, किन्तु $x = a$ के दायें तथा बाएँ लघुसामीप्य में फलन $f(x)$ परिभाषित है, तो वास्तविक संख्या ℓ फलन f की सीमा कहलाती है जब x का मान a की ओर अग्रसर हो, यदि और केवल यदि स्वेच्छतः निर्दिष्ट धनात्मक संख्या ε के लिए एक धनात्मक संख्या δ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि $|f(x) - l| < \varepsilon$ जबकि $0 < |x - a| < \delta$ इसे संकेत रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

दायीं सीमा– यदि x दायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है तो f की दायीं सीमा को हम लिखते हैं: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ अथवा $f(a + 0)$.

दायीं सीमा ज्ञात करने के लिए हम फलन $f(x)$ में $x = a + h$ प्रतिस्थापित कर $h \to 0$ करते हैं, अतः $f(a+0) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h), (h > 0)$

बायीं सीमा– यदि x बायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है तो f की बायीं सीमा को हम लिखते हैं: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ अथवा $f(a - 0)$.

बायीं सीमा ज्ञात करने के लिए हम फलन $f(x)$ में $x = a - h$ प्रतिस्थापित कर $h \to 0$ करते हैं, अतः $f(a-0) = \lim_{h\to 0} f(a-h), (h>0)$

10.05 सीमा का अस्तित्व (Existence of a limit)

$\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व होता है, यदि और केवल यदि बायीं सीमा अर्थात् $\lim_{x\to a^-} f(x)$ और दायीं सीमा अर्थात् $\lim_{x\to a^+} f(x)$ दोनों का अस्तित्व हो और एक समान हो। अर्थात् $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व है $\Leftrightarrow f(a-0) = f(a+0)$

यदि किसी फलन की किसी बिन्दु पर सीमा का अस्तित्व हो तो दोनों ओर की सीमा निकालने की आवश्यकता नहीं होती, एक ओर की सीमा से ही काम चल सकता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1: जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ की $x = 2$ पर सीमा का अस्तित्व है या नहीं?

हल: दायीं सीमा $f(2+0) = \lim_{h\to 0} f(2+h) = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{2+(2+h)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{4+h} = \dfrac{1}{4}$

बायीं सीमा $f(2-0) = \lim_{h\to 0} f(2-h) = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{2+(2-h)} = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{4-h} = \dfrac{1}{4}$ $\qquad \therefore \qquad f(2-0) = f(2+0) = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ $x = 2$ पर फलन की सीमा का अस्तित्व है।

उदाहरण 2: यदि फलन $f(x) = \begin{cases} (1/2) - x, & \text{जब } 0 < x < 1/2 \\ (3/2) - x, & \text{जब } 1/2 < x < 1 \end{cases}$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि फलन की $x = ½$ पर सीमा अस्तित्व नहीं है।

हल: दायीं सीमा के लिए $f(x) = (3/2) - x$

अतः $\quad f\left(\dfrac{1}{2}+0\right) = \lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{1}{2}+h\right)\right\} = \lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2} - h\right\} = \lim_{h\to 0}\{1-h\} = 1$

बायीं सीमा के लिए $f(x) = (1/2) - x$

अतः $\quad f\left(\dfrac{1}{2}-0\right) = \lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}-h\right)\right\} = \lim_{h\to 0}\left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} + h\right\} = \lim_{h\to 0}\{h\} = 0 \qquad f\left(\dfrac{1}{2}-0\right) \neq f\left(\dfrac{1}{2}+0\right)$

$\therefore$ $x = ½$ पर फलन की सीमा का अस्तित्व नहीं है।

उदाहरण 3: यदि फलन $f(x) = \begin{cases} 5x-4, & 0 < x \le 1 \\ 4x^3 - 3x, & 1 < x < 2 \end{cases}$, तब $x = 1$ पर दायीं सीमा एवं बायीं सीमा का मान ज्ञात कीजिए।

हल': $x = 1$ पर दायीं सीमा के लिए $f(x) = 4x^3 - 3x$

$$f(1+0) = \lim_{h\to 0}\left[4(1+h)^3 - 3(1+h)\right] = \lim_{h\to 0}\left[4(1)^3 - 3(1)\right] = 1$$

$x = 1$ पर बायीं सीमा के लिए $f(x) = 5x - 4$

$$f(1-0) = \lim_{h\to 0}\left[5(1-h) - 4\right] = \lim_{h\to 0}\left[5 - 5h - 4\right] = \lim_{h\to 0}(1-5h) = 1$$

$\because$ $f(1+0) = f(1-0) = 1$

$\therefore$ $x = 1$ पर फलन की सीमा का अस्तित्व है।

प्रश्नमाला 10.1

1. प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(x)=\dfrac{\log_e x}{x-1}$ की $x=1$ पर दायीं सीमा एवं बायीं सीमा समान हैं तथा इनका मान 1 है।

2. क्या $x=0$ पर फलन $f(x)=\dfrac{x+|x|}{x}$ की सीमाएँ अस्तित्व में है?

3. सिद्ध कीजिए कि $x=0$ पर फलन $f(x)=|x|+|x-1|$ की सीमाएँ अस्तित्व में हैं।

4. सिद्ध कीजिए कि $x=2$ पर फलन $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & \text{जब } x\geq 2 \\ x, & \text{जब } x<2 \end{cases}$ की सीमाएँ अस्तित्व में नहीं हैं।

5. फलन $f(x)=x\cos(1/x)$ की $x=0$ पर दायीं एवं बायीं सीमा ज्ञात कीजिए।

10.06 सीमाओं पर प्रमेय (Theorems on limit)

माना प्रांत D पर दो वास्तविक फलन f तथा g परिभाषित है तो हम प्रांत D पर चार नये फलन $f\pm g,\ fg,\ f/g$ निम्नानुसार परिभाषित कर सकते है:

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),\ (fg)(x)=f(x).\,g(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0,\ \forall\ x\in D$$

इनके प्रयोग से हम निम्न परिणाम प्राप्त कर सकते है।

माना $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ और $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$. यदि ℓ एवं m विद्यमान है, तो

(i) योग एवं अन्तर नियम $\quad \lim\limits_{x\to a}(f\pm g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)=\ell\pm m$

(ii) गुणन नियम $\quad \lim\limits_{x\to a}(f\ g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)=lm$

(iii) भिन्न नियम $\quad \lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{\ell}{m},\ m\neq 0$

(iv) अचर नियम $\quad$ यदि $f(x)=k$, जहाँ k अचर है। $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} k=k$

(v) अचर गुणन नियम $\quad \lim\limits_{x\to a} kf(x)=k\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\ell$, जहाँ k अचर है।

(vi) मापाँक नियम $\quad \lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to a} f(x)\right|=|\ell|$

(vii) घात नियम $\quad \lim\limits_{x\to a}\left[\{f(x)\}^{g(x)}\right]=\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x)\right\}^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\ell^m$

विशेष स्थिति में

(a) $\lim\limits_{x\to a}\log f(x)=\log\left\{\lim\limits_{x\to a} f(x)\right\}=\log\ell$

(b) $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=e^{\ell}$

(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ या $-\infty$, तब $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$

10.07 सीमा की परिकलन विधियाँ (Methods of evaluation of limits)

(i) **प्रतिस्थापन विधि–** दिए हुए फलन में सीधे सीमा का मान रखकर यदि वह अनिर्धार्य रूप $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty\right.$ तथा ∞^0 ; रूप के फलन$\left.\right)$ प्राप्त नहीं करे तो वही सीमा का मान होगा।

उदाहरण : $\lim_{x\to 2}\left(x^2+3x+2\right)=2^2+3.2+2=12$

(ii) **व्यंजक सरलीकरण विधि–** यदि $f(x)$ एवं $g(x)$ बहुपदीय हो तथा $g(a)\neq 0$ तब

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$$

उदाहरणार्थ : $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

(iii) **परिमेयकरण या द्विपरिमेयकरण विधि–** वर्गमूल निहित गुणनखण्ड का परिमेयीकरण कर सरलीकरण करते हैं तथा x का मान रखते हैं।

उदाहरणार्थः $\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ का मान ज्ञात कीजिए

हलः

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\times\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}}\times\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{-4+x}\times\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

(iv) **प्रसार विधि–** यदि $x\to 0$ हो तो तथा व्यंजक में कम से कम एक प्रसार योग्य फलन हो तो उस फलन का प्रसार लिख कर व्यंजक को x की बढ़ती घातों में व्यक्त कर लेते हैं। इसके पश्चात् अंश व हर में x की उभयनिष्ठ घात का भाग देकर अनिर्धार्य रूप समाप्त करते हैं। निम्न दिए गए कुछ मानक फलनों के प्रसार हैं–

(a) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

(b) $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots$

(c) $a^x=1+(x\log_e a)+\frac{(x\log_e a)^2}{2!}+\frac{(x\log_e a)^3}{3!}+\cdots$

(d) $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$

(e) $\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$

(f) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$

(g) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$

(h) $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$

(i) $(1\pm x)^n=1\pm nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2\pm\cdots$

(j) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2+\cdots\right)$

(k) $\Sigma n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(l) $\Sigma n^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(m) $\Sigma n^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{\{n(n+1)\}^2}{4}$

सीमाओं सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम दिए हुए परिणामों से:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (b) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ (d) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(e) $\lim_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \log_e b (b \neq 0)$ (f) $\lim_{x \to 0} \frac{\log_e [1 + x]}{x} = 1$

(g) $\lim_{x \to 0} [1 + x]^{1/x} = e$ (h) $\lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{1}{x}\right]^x = e$

(i) $\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x - a} = ma^{m-1}$ (j) $\lim_{x \to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{m}{n} a^{m-n}$

उदाहरणार्थ: $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}, \ a \neq 0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + (x \log_e a) + (x \log_e a)^2 / 2! + \cdots - 1}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x \log_e a) + (x \log_e a)^2 / 2! + \cdots}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} (\log_e a) + x (\log_e a)^2 / 2! + \cdots$$

$$= \log_e a$$

(v) $x \to \infty$ इस प्रकार की स्थितियों में दिए गए फलन की उच्चतम घात को बाहर लेकर अंश एवं हर में अनन्त सीमा लगा दी जाती है।

उदाहरणार्थ: $= \lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $$\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \left[a + (b / x) + (c / x^2) \right]}{x^2 \left[d + (e / x) + (f / x^2) \right]}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a + (b / x) + (c / x^2)}{d + (e / x) + (f / x^2)} = \frac{a}{d}$$

(vi) **सरलीकरण** (Simplification)– इस विधि के द्वारा अनिर्धाय रूप वाले फलन का सरलीकरण करने के पश्चात् उसका अनिर्धार्य रूप समाप्त करके हल किया जाता है।

उदाहरणार्थ: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0$$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 4: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+\sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos 0}{1+\sin 0} = 1$

उदाहरण 5: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2x^2-7x+5}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2x^2-7x+5}$

माना $x = 1 + h$, तो जब $x \to 1$ तब $h \to 0$

अतः $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)-1}{2(1+h)^2-7(1+h)+5} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{2h^2-3h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h-3} = -\frac{1}{3}$

उदाहरण 6: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ अंश एवं हर के गुणनखण्ड संभव हैं।

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)}{(x+2)} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

उदाहरण 7: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$

परिमेयीकरण करने के लिए अंश एवं हर में $\sqrt{1+x}+1$ से गुणा करने पर

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} \times \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x-1} \sqrt{1+x}+1 = \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x}+1\right) = 1+1 = 2$$

उदाहरण 8: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+ax+\frac{a^2x^2}{2!}+\cdots\right)-\left(1+bx+\frac{b^2x^2}{2!}+\cdots\right)}{\left(ax-\frac{a^3x^3}{3!}+\frac{a^5x^5}{5!}-\cdots\right)-\left(bx-\frac{b^3x^3}{3!}+\frac{b^5x^5}{5!}-\cdots\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left((a-b)x+\frac{(a^2-b^2)x^2}{2!}+\cdots\right)}{\left((a-b)x-\frac{(a^3-b^3)x^3}{3!}+\frac{(a^5-b^5)x^5}{5!}-\cdots\right)}$$

अंश तथा हर में x से भाग देने पर

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left((a-b)+\frac{(a^2-b^2)x}{2!}+\cdots\right)}{\left((a-b)-\frac{(a^3-b^3)x^2}{3!}+\frac{(a^5-b^5)x^4}{5!}-\cdots\right)}$$

$$= \frac{(a-b+0+\cdots)}{(a-b-0+0-\cdots)} = \frac{a-b}{a-b} = 1$$

उदाहरण 9: $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

उदाहरण 10: $\lim_{\theta\to\pi/2} (\sec\theta - \tan\theta)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $$\lim_{\theta\to\pi/2} (\sec\theta-\tan\theta) = \lim_{\theta\to\pi/2}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \lim_{\theta\to\pi/2}\left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right) = \lim_{\theta\to\pi/2}\left(\frac{1-\cos(\pi/2-\theta)}{\sin(\pi/2-\theta)}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to\pi/2}\left(\frac{2\sin^2(\pi/4-\theta/2)}{2\sin(\pi/4-\theta/2)\cos(\pi/4-\theta/2)}\right) = \lim_{\theta\to\pi/2} \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

उदाहरण 11: सिद्ध कीजिए कि $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}$

हल: यहाँ $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ [$\because$ $\lim_{x\to a} f(x)$ उपस्थित है $\therefore$ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$]

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(a+h)^n-a^n}{a+h-a} = \lim_{x\to 0} \frac{a^n\left\{\left(1+\frac{h}{a}\right)^n-1\right\}}{h}$$

$$= a^n \lim_{h\to 0} \frac{\left[1+n\cdot\frac{h}{a}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\frac{h^2}{a^2}+\ldots-1\right]}{h}$$

$$= a^n \lim_{h\to 0}\left(\frac{n}{a}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\frac{h}{a^2}+\ldots\right) = a^n\cdot\frac{n}{a} = na^{n-1}$$

प्रश्नमाला 10.2

निम्न सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए।

1. (a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-3)(x-1)}{2x^2+x-3}$

2. (a) $\lim\limits_{\alpha\to\pi/4}\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\pi/4}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$

3. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\sqrt{1+x}-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

4. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x\sin x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x-\tan^{-1}x}{x^3}$

5. (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{2n^2-1}}{4n+3}$

6. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$

7. (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{1-\cos x}$ (b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x+2)^{3/2}-(a+2)^{3/2}}{x-a}$

10.08 अवकलजों का सहजानुभूत बोध (Intuitive idea of derivatives)

यदि एक पिण्ड को एक खड़ी चट्टान से गिराने पर निम्न परीक्षण प्राप्त होते हैं।

t सेकण्ड	0	1	1·5	1·8	1·9	1·95	2	2·05	2·1	2·2	2·5	3	4
s मीटर	0	4·9	11·025	15·876	17·689	18·63225	19·6	20·592	21·609	23·716	30·625	44·1	78·4

इन परीक्षणों की सहायता से समय विशेष (माना $t=2$) पर वेग (दूरी में परिवर्तन की दर) ज्ञात करना है तो हमें समस्या को निम्न दो भागों में विभाजित करते हुए अध्ययन करना होगाः

(i) $t=2$ के पूर्ववर्ती विभिन्न समयांतरालो में माध्य वेग

(ii) $t=2$ के पश्चावर्ती विभिन्न समयांतरालो में माध्य वेग

माध्य वेग $=\dfrac{\text{समयांतराल में तय की गई दूरी}}{\text{समयांतराल}}$ के सूत्र से

$t=2$ के पूर्ववर्ती समयान्तरालों में माध्य वेग निम्न सारणी में दिए गए हैः

सारणी–1

t_1 (सेकण्ड में)	0	1	1·5	1·8	1·9	1·95	1·99
v (मीटर/से.)	9·8	14·7	17·15	18·62	19·11	19·355	19·551

इसी प्रकार $t=2$ के पश्चावर्ती समयांतरालों में माध्य वेग निम्न सारणी में दिए गए है

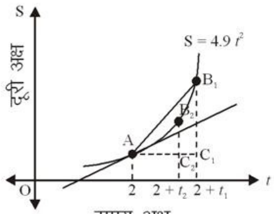
सारणी–2

t_2 (सेकण्ड में)	4	3	$2\cdot5$	$2\cdot2$	$2\cdot1$	$2\cdot05$	$2\cdot01$
v (मीटर / से. में)	$29\cdot4$	$24\cdot5$	$22\cdot05$	$20\cdot58$	$20\cdot09$	$19\cdot845$	$19\cdot649$

इन अभिकलनों के प्रथम सारणी में हमने $t=2$ पर समाप्त होने वाले बढ़ते समयान्तरालों में माध्य वेग ज्ञात किए गए है इसमें यह माना कि $t=2$ से किंचित पूर्व कुछ अप्रत्याशित घटना नहीं घटी। तथा अभिकलनों के द्वितीय सारणी में $t=2$ पर अंत होने वाले घटते समयांतरालों में माध्य वेग ज्ञात किए गए है तब यह माना कि $t=2$ के किंचित पश्चात् कुछ अप्रत्याशित घटना नहीं घटी।

इन दोनों सारणियों के परीक्षणों का सम्मिलित अध्ययन करने पर यह स्पष्ट हो रहा है कि $t=2$ पर तात्कालिक वेग 19.551 मी./सैं. तथा 19.649 मी./सै. के मध्य है।

इस सीमा की प्रक्रिया की एक विकल्प विधि चित्र 10.01 में दर्शायी गयी है। जो बीते समय (t) और चट्टान के शिखर से पिण्ड की दूरी (S) का आलेख है। जैसे–जैसे समयांतरालों के अनुक्रम $h_1, h_2, \ldots$ की सीमा शून्य की ओर अग्रसर होती है वैसे ही माध्य वेगों के अग्रसर होने की वही सीमा होती है जो



चित्र 10.01

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \ldots$$

के अनुपातों के अनुक्रम की होती है यहाँ $C_1B_1 = S_1 - S_0$ वह दूरी है जो पिण्ड समयांतरालों $h_1 = AC_1$ में तय करता है, इत्यादि। चित्र 10.01 से यह निष्कर्ष निकलना सुनिश्चित है कि यह बाद की अनुक्रम वक्र के बिन्दु A पर स्पर्श रेखा के ढाल की और अग्रसर होती है। दूसरे शब्दों में $t=2$ समय पर पिण्ड का तात्कालिक वेग वक्र $S=4.9t^2$ के $t=2$ पर स्पर्शी के ढाल के समान है।

10.09 अवकलज (Derivatives)

अनुच्छेद 10.08 में अवकलजों के सहजानुभुत बोध के द्वारा हमें अवकलज का एक प्रारम्भिक बोध हुआ है, इस प्रकार की अनेक स्थितियों में यह जानना अभीष्ट होता है कि एक प्राचल में दूसरे किसी प्राचल के सापेक्ष परिवर्तन किस प्रकार होता है।

अवकलज (Derivatives) – माना कि $y = f(x)$ कोई संतत फलन है। माना x में अल्प वृद्धि δx की जाये तो y के मान में संगत वृद्धि δy होगी, तो भिन्न $\frac{\delta y}{\delta x}$ की सीमा जब $\delta x \to 0$ अर्थात् $\lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)$ (यदि विद्यमान हो) को y का x के सापेक्ष अवकलज या अवकल गुणांक (Differential co-efficient) कहते है। इसे $\frac{dy}{dx}$ से व्यक्त करते है।

अर्थात्– यदि $\quad y = f(x)$

तो $\quad y + \delta y = f(x + \delta x)$

$\therefore \quad \delta y = f(x+\delta x) - f(x)$

$\Rightarrow \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$

प्रथम सिद्धान्त से अवकलन (Differentiation by first principle) – परिभाषा से सीधे अवकल गुणांक ज्ञात करने की इस विधि को प्रथम सिद्धान्त से अवकलन करना कहते है। इसको ab-initio method or delta method भी कहते है।

अवकलन (Differentiation) – किसी दिए हुए फलन $f(x)$ का अवकल गुणाँक ज्ञात करने की प्रक्रिया को अवकलन कहते है।

संकेत (Notation) – फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणाँक को साधारणतया $\frac{d}{dx}f(x)$ या $f'(x)$ या $D[f(x)]$, जहाँ $D \equiv \frac{d}{dx}$ द्वारा व्यक्त करते है तथा $x = c$ पर अवकल गुणाँक $f'(c)$ या $\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]_{x=c}$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

यदि $y = f(x)$ हो, तो y का x के सापेक्ष अवकल गुणाँक को $\frac{dy}{dx}$ या y_1 या y' या Dy द्वारा व्यक्त करते हैं।

टिप्पणीः

1. $\frac{\delta y}{\delta x}$ एक भिन्न है का अर्थ $\delta y \div \delta x$ है।

2. $\frac{dy}{dx}$ एक भिन्न नहीं है, जबकि $\frac{dy}{dx}$ तो केवल $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ का संकेत मात्र है।

परिभाषाः माना f एक वास्तविक एक मानीय फलन है और इसकी परिभाषा के प्रांत में एक बिन्दु a है। a पर f का अवकलज

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

से परिभाषित है, बशर्त है कि सीमा का अस्तित्व हो। a पर $f(x)$ का अवकलज $f'(a)$ से निरूपित होता है।

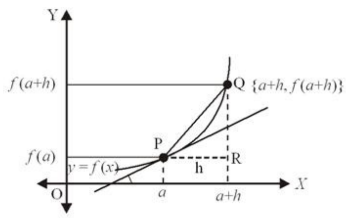
एक बिन्दु पर फलन के अवकलज की ज्यामितीय व्याख्याः

माना $y = f(x)$ एक फलन है और इस फलन के आलेख पर $P(a, f(a))$ और $Q(a+h, f(a+h))$ दो परस्पर निकट बिन्दु हैं। चित्र 10.02 एवं पूर्व अध्ययन के आधार पर हम जानते हैं कि

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

त्रिभुज PQR, से यह स्पष्ट है कि वह अनुपात जिसकी सीमा हम ले रहे हैं, यथार्थतः tan (QPR) के बराबर है जो कि जीवा PQ का ढाल है। सीमा लेने की प्रक्रिया में, जब h, 0 की ओर अग्रसर होता है, बिन्दु Q, P की ओर अग्रसर होता है, अर्थात्

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{Q \to P} \frac{QR}{PR}$$



चित्र 10.02

यह इस तथ्य के तुल्य है कि जीवा PQ, वक्र $y = f(x)$ के बिन्दु P पर स्पर्शी की ओर अग्रसर होती है। अतः $f'(a) = \tan\psi$.

एक दिए फलन f के लिए हम प्रत्येक बिन्दु पर अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। यदि प्रत्येक बिन्दु पर अवकलज का अस्तित्व है तो यह एक नये फलन को परिभाषित करता है जिसे फलन f का अवकलज कहा जाता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 12: $x = 2$ पर फलन $f(x) = 8x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हलः हम जानते हैं $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8(2+h) - 8(2)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16 + 8h - 16}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8h}{h} = \lim_{h \to 0} 8 = 8$$

अतः $x = 2$ पर फलन $8x$ का अवकलज 8 है।

उदाहरण 13: $x=-1$ पर फलन $f(x)=2x^2+3x-5$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि $f'(0)+3f'(-1)=0$.

हल: हम पहले $x=0$ और $x=-1$ पर $f(x)$ का अवकलज ज्ञात करते हैं। हम जानते हैं कि

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(-1+h)^2+3(-1+h)-5\right]-\left[2(-1)^2+3(-1)-5\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2-h}{h}=\lim_{h\to 0}(2h-1)=2(0)-1=-1$$

और $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(0+h)^2+3(0+h)-5\right]-\left[2(0)^2+3(0)-5\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}(2h+3)=2(0)+3=3$$

स्पष्टतः $f'(0)+3f'(-1)=0$

उदाहरण 14: $f(x)=\dfrac{1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{(x+h)}-\frac{1}{x}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

10.10 फलनों के अवकलज का बीजगणित (Algebra of derivative of functions)

क्योंकि अवकलज की यथार्थ परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है, हम अवकलज के नियमों में निकटता से सीमा के नियमों के अनुगमन की आशा करते है इन्हें हम निम्नलिखित प्रमेयों में देखते हैं।

प्रमेय 1: मान लीजिए f और g दो ऐसे फलन हैं कि उनके उभयनिष्ठ प्रांत में उनके अवकलजन परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग है।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

(ii) दो फलनों के अंतर का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का अंतर है।

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right]=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलज निम्नलिखित गुणन नियम (product rule) से दिया गया है:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्नलिखित भागफल (quotient rule) से दिया गया है (जहाँ की हर शून्येतर है)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{(g(x))^2}$$

इनकी उपपत्ति सीमाओं की तुल्य रूप प्रमेयों से आवश्यकीय रूप से अनुसरण करती है। हम इन्हें यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे। सीमाओं की स्थिति की तरह यह प्रमेय बतलाता है कि विशेष प्रकार के फलनों के अवकलज कैसे परिकलित किए जाते हैं। प्रमेय के अंतिम दो कथनों को निम्नलिखित ढंग से पुनः कहा जा सकता है जिससे उनके पुनर्स्मरण करने में आसानी रहती है।

मान लीजिए $u=f(x)$ और $v=g(x)$ तब

$$(uv)'=u'v+uv'$$

यह फलनों के गुणन के अवकलन के लिए Leibnitz नियम या गुणन नियम उल्लेखित होता है। इसी प्रकार, भागफल नियम है

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

अब, आइए हम कुछ मानक फलनों के अवकलनों को लें। यह देखना सरल है कि फलन $f(x)=x$ का अवकलज अचर फलन 1 है। क्योंकि

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}=1$$

हम इसका और उपर्युक्त प्रमेय का प्रयोग $f(x)=10x=x+x+\ldots+x(10 \text{ पद})$ (उपर्युक्त प्रमेय के (i) से) के अवकलज के परिकलन में करते हैं।

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(x+\ldots+x)\ (10 \text{ पद})=\frac{d}{dx}x+\ldots+\frac{d}{dx}x\ (10 \text{ पद})=1+\ldots+1\ (10 \text{ पद})=10$$

हम ध्यान देते हैं कि इस सीमा का मान गुणन सूत्र के प्रयोग से भी प्राप्त किया जा सकता है। हम लिखते हैं, $f(x)=10x=uv$, जहाँ u लिखते हैं जहाँ u प्रत्येक जगह मान 10 लेकर अचर फलन है और $v(x)=x$, यहाँ हम जानते हैं कि u का अवकलज 0 के बराबर है साथ ही $v(x)=x$ का अवकलज 1 के बराबर है। इस प्रकार गुणन नियम से, हम पाते हैं।

$$f'(x)=(10x)'=(uv)'=u'v+uv'=0\cdot x+10\cdot 1=10$$

इसी आधार पर $f(x)=x^2$ के अवकलज का मान प्राप्त किया जा सकता हैं हम पाते हैं $f(x)=x^2=x,\ x$ और अतः

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}(x\cdot x)=\frac{d}{dx}(x)\cdot x+x\cdot\frac{d}{dx}(x)=1\cdot x+x\cdot 1=2x$$

अधिक व्यापक रूप से हम निम्नलिखित प्रमेय का प्रयोग करते हैं:

प्रमेय 2: किसी धन पूर्णांक n के लिए $f(x)=x^n$ का अवकलज nx^{x-1} है।

प्रमाणः अवकलज फलन की परिभाषा से, हम पाते हैं

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

द्विपद प्रमेय के अनुसार $(x+h)^n=\left({}^nC_0\right)x^n+\left({}^nC_1\right)x^{n-1}h+\ldots+\left({}^nC_n\right)h^n$ और $(x+h)^n-x^n=h\left(nx^{n-1}+\ldots+h^{n-1}\right)$

इस प्रकार

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(nx^{n-1}+\ldots+h^{n-1}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\ldots+h^{n-1}\right),=nx^{n-1}$$

दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 15: $f(x)=2x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-2(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$

उदाहरण 16: $f(x)=x^2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x)=2x$

उदाहरण 17: $x=1$ पर $f(x)=1+x+x^2+...+x^{10}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: प्रमेय 2 के अनुप्रयोग से

$$f'(x)=1+2x+...+10x^9$$

$x=1$ पर $\quad f'(1)=1+2(1)+...+10(1)^9=\frac{10\times 11}{2}=55$

उदाहरण 18: $\sin x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल: माना $\quad f(x)=\sin x$

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$ $[\sin A-\sin B$ के सूत्र से$]$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h/2}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}=\cos x\cdot 1=\cos x$$

उदाहरण 19: $f(x)=\sin^2 x$ के अवकलज का परिकलन कीजिए।

हल: अवकलज के गुणन सूत्र का प्रयोग से

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(\sin x\cdot\sin x)=(\sin x)'\sin x+\sin x(\sin x)'$$

$$=\cos x\sin x+\sin x(\cos x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

प्रश्नमाला 10.3

1. $x=10$ पर x^2-2 का अवकलज ज्ञात कीजिए।
2. $x=50$ पर $49\,x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।
3. प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) x^3-16 (ii) $(x-1)(x-2)$ (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

4. फलन $f(x)=\frac{x^{100}}{100}+\frac{x^{99}}{99}+...+\frac{x^2}{2}+x+1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $f'(1)=100f'(0)$

5. किसी अचर वास्तविक संख्या a के लिए $x^n+ax^{n-1}+a^2x^{n-2}+...+a^{n-1}x+a^n$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

6. किन्हीं अचरों a और b, के लिए,

(i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\frac{x-a}{x-b}$

के अवकलज ज्ञात कीजिए।

7. किसी अचर a के लिए $\frac{x^n-a^n}{x-a}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $2x-\frac{3}{4}$ (ii) $(5x^3+3x-1)(x-1)$ (iii) $x^5(3-6x^{-9})$

(iv) $x^{-4}(3-4x^{-5})$ (v) $\frac{2}{x+1}-\frac{x^2}{3x-1}$

9. प्रथम सिद्धांत से $\cos x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

10. निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $\sin x\cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $\operatorname{cosec} x$

(iv) $3\cot x+5\operatorname{cosec} x$ (v) $5\sin x-6\cos x+7$

विविध उदाहरण

उदाहरण 20: e^x का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $\quad y=e^x$

पुनः माना कि $\quad y+\delta y=e^{x+\delta x}$

$$\therefore \quad \delta y=e^{x+\delta x}-e^x$$

या $$\delta y=e^x\cdot e^{\delta x}-e^x$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{e^x}{\delta x}\left[e^{\delta x}-1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{e^x}{\delta x}\left[1+\frac{\delta x}{\underline{|1}}+\frac{(\delta x)^2}{\underline{|2}}+...-1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{e^x\cdot\delta x}{\delta x}\left[1+\frac{\delta x}{\underline{|2}}+...\right]$$

या $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}e^x\left[1+\frac{\delta x}{\underline{|2}}+...\right]$$

या $$\frac{dy}{dx}=e^x\,[1+0+...]=e^x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(e^x)=e^x$$

उदाहरण 21: a^x का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $y = a^x$

पुनः माना कि $y + \delta y = a^{x+\delta x}$

$\therefore$ $\delta y = a^{x+\delta x} - a^x$

या $\delta y = a^x \cdot a^{\delta x} - a^x$

या $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^x}{\delta x}\left[a^{\delta x} - 1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^x}{\delta x}\left[1 + \delta x \cdot \log_e a + \frac{(\delta x)^2}{\underline{|2}}(\log_e a)^2 + \ldots - 1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^x \cdot \delta x}{\delta x}\left[\log_e a + \frac{\delta x}{\underline{|2}}(\log_e a)^2 + \ldots\right]$$

या $$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} a^x\left[\log_e a + \frac{\delta x}{\underline{|2}}(\log_e a)^2 + \ldots\right]$$

या $$\frac{dy}{dx} = a^x\left[\log_e a + 0 + \ldots\right] = a^x \cdot \log_e a$$

$\therefore$ $$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x \cdot \log_e a$$

उदाहरण 22: $\log_e x$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $y = \log_e x$

पुनः माना कि $y + \delta y = \log_e(x + \delta x)$

$\therefore$ $$\delta y = \log_e\left(\frac{x + \delta x}{x}\right)$$

या $$\delta y = \log_e\left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)$$

या $$\delta y = \frac{\delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^3 - \ldots$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta x}{\delta x}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{\delta x}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{(\delta x)^2}{x^3} - \ldots\right]$$

या $$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{\delta x}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{(\delta x)^2}{x^3} - \ldots\right]$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - 0 + 0 \ldots$$

या $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

अतः $$\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

उदाहरण 23: प्रथम सिद्धान्त से $\sqrt{x}$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $y=\sqrt{x}=x^{1/2}$

पुनः माना कि $y+\delta y=(x+\delta x)^{1/2}$

$\therefore$ $\delta y=(x+\delta x)^{1/2}-x^{1/2}$

या $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{x^{1/2}}{\delta x}\left[\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{1/2}-1\right]$

या $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{x^{1/2}}{\delta x}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\delta x}{x}+\frac{1/2(1/2-1)}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2+\ldots-1\right]$

या $\frac{\delta y}{\delta x}=x^{1/2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1/2(1/2-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{\delta x}{x^2}+\ldots\right]$

या $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta x}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}x^{1/2}\left[\frac{1}{2x}+\frac{1/2(1/2-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{\delta x}{x^2}+\ldots\right]$

या $\frac{dy}{dx}=x^{1/2}\left[\frac{1}{2x}+0+\ldots\right]$

या $\frac{dy}{dx}=x^{1/2}\left[\frac{1}{2x}+0+\ldots\right]$

या $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\therefore$ $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

उदाहरण 24: प्रथम सिद्धान्त से $\sqrt{\tan x}$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि $y=\sqrt{\tan x}$

$\therefore$ $y^2=\tan x$

तब $(y+\delta y)^2-y^2=\tan(x+\delta x)-\tan x$

या $2y\delta y+(\delta y)^2=\frac{\sin(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}$

या $2y\delta y+(\delta y)^2=\frac{\sin(x+\delta x)\cdot\cos x-\cos(x+\delta x)\cdot\sin x}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x}$

या $2y\delta y+(\delta y)^2=\frac{\sin(x+\delta x-x)}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x}$

या $\frac{\delta y}{\delta x}[2y+\delta y]=\frac{1}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x}\cdot\frac{\sin\delta x}{\delta x}$

या $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}[2y+\delta y] = \lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{1}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x} \lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\sin \delta x}{\delta x}$

या $\frac{dy}{dx}[2y+0] = \frac{1}{\cos x \cdot \cos x} \cdot 1 = \sec^2 x$ $[\because$ जब $\delta x \to 0$ तब $\delta y \to 0]$

या $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \cdot \sec^2 x = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \sec^2 x$

अतः $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\tan x}\right) = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$

विविध प्रश्नमाला–10

1. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{2x^2-7x+5}$ का मान है–

(A) 1 / 3 (B) –1/3 (C) 1 (D) –1

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$ का मान है

(A) 0 (B) ∞ (C) 1 (D) –1

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{xe^x - \log_e(1+x)}{x^2}$ का मान है–

(A) 2 / 3 (B) 1/3 (C) 1 / 2 (D) 3 / 2

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$ का मान है–

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) –1

5. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin\frac{\pi}{4x} \cos\frac{\pi}{4x}$ का मान है–

(A) $\pi / 4$ (B) $\pi / 2$ (C) 0 (D) ∞

6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ का मान है–

(A) 0 (B) 1 (C) $\log_e$ (ab) (D) $\log_e$ (a/b)

7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x^0}{x}$ का मान है–

(A) 0 (B) 1 (C) $\pi/180$ (D) π

8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ का मान है–

(A) 0 (B) 1 / 2 (C) –1 / 2 (D) –1

9. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{\tan x}\right)^4$ का मान है–

(A) 0 (B) 81 (C) 4 (D) 1

10. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1+3^{1/x}}{1-3^{1/x}}$ का मान है–

(A) 0 (B) ∞ (C) –1 (D) 1

11. यदि y, x का फलन हो तो y का x के सापेक्ष अवकलज है–

(A) $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ (B) $\lim\limits_{\delta y \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x}$ (C) $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x}$ (D) $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta x}{\delta y}$

12. x^n का अवकलज है–

(A) x^{n-1} (B) $(n-1)x^{n-2}$ (C) $n x^{n-1}$ (D) $x^{n+1}/n+1$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ का अवकलज है–

(A) $\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ (B) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ (C) $2x\sqrt{x}$ (D) $-2x\sqrt{x}$

14. $\dfrac{d}{dx}(5^x)$ बराबर है–

(A) 5^x (B) 10^x (C) $10^x \log_e 5$ (D) $5^x \log_e 5$

15. $\dfrac{d}{dx}(\log_a x)$ बराबर है–

(A) $\dfrac{1}{x \cdot \log_e a}$ (B) $\dfrac{\log_e a}{x}$ (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) $\dfrac{x}{\log_e a}$

16. यदि $f(x) = x^3 + 6x^2 - 5$ तब $f'(1)$ बराबर है–

(A) 0 (B) 9 (C) 4 (D) 15

17. $\sec x^\circ$ का अवकलज है–

(A) $\sec x^\circ \tan x^\circ$ (B) $\dfrac{\pi}{180} \sec x \tan x$ (C) $\dfrac{\pi}{180} \sec x^\circ \tan x^\circ$ (D) $\sec x \tan x$

18. $\log_x a$ का अवकलज है–

(A) $\dfrac{\log_e a}{x \log_e x}$ (B) $-\dfrac{\log_e a}{x(\log_e x)^2}$ (C) $\dfrac{\log_e a}{x(\log_e x)^2}$ (D) $-\dfrac{\log_e a}{x \log_e x}$

19. यदि $f(x) = \dfrac{2x+c}{x-1}$ तथा $f'(0) = 0$ तब c का मान–

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) –2

20. $\log_e \sqrt{x}$ का अवकलज है–

(A) $\dfrac{1}{2x}$ (B) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (C) $2\sqrt{x}$ (D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ae^x - b\cos x + ce^{-x}}{x \sin x} = 2$ तो a, b, c का मान ज्ञात कीजिए।

22. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+c} - \sqrt{x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

23. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

24. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{\frac{6x+1}{3x-1}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

25. $\lim_{x\to\infty} 2^x \sin\left(\frac{a}{2^x}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

26. $\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

27. $\lim_{x\to\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

28. यदि $y=\frac{x}{x+5}$ तो सिद्ध कीजिए $x\frac{dy}{dx}=y(1-y)$

29. यदि $y=x^3\cdot e^x \sin x$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **सीमा की परिभाषा** – $y=f(x)$, $x=a$ पर अपरिभाषित है, किन्तु $x=a$ के दायें तथा बायें लघुसामीप्य में फलन $f(x)$ परिभाषित हैं, फलन $f(x)$ का मान किसी वास्तविक संख्या ℓ की ओर अग्रसर है तो वास्तविक संख्या ℓ फलन f की सीमा कहलाती है इसका संकेतात्मक रूप $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$
2. **दायीं सीमा** – यदि x दायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है तो f की दायीं सीमा को हम लिखते हैं: $\lim_{x\to a^+} f(x)$ अथवा $f(a+0)$.
3. **बायीं सीमा** – यदि x बायीं ओर से a की ओर प्रवृत्त होता है तो f की बायीं सीमा को हम लिखते हैं $\lim_{x\to a^-} f(x)$ अथवा $f(a-0)$.
4. **सीमा का अस्तित्व** – $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व होता है $\Leftrightarrow f(a-0)=f(a+0)$
5. **मानक सीमाऐं**–

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (b) $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ (d) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=\log b\,(b\neq 0)$ (f) $\lim_{x\to 0}\frac{\log[1+x]}{x}=1$ (g) $\lim_{x\to 0}[1+x]^{1/x}=e$

(h) $\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{x}\right]^x=e$ (i) $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x-a}=ma^{m-1}$ (j) $\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}=\frac{m}{n}a^{m-n}$

6. बिन्दु a पर फलन f का अवकलज $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ से परिभाषित होता है

7. प्रत्येक बिन्दु पर अवकलज, अवकलज फलन

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ से परिभाषित होता है

8. यदि $u, v, w, \ldots$, सभी x के फलन हो तो–

$$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \ldots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots$$

9. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

10. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

11. निम्नलिखित कुछ मानक अवकलज हैं

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1},\ \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x,\ \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 10.1

2. नहीं **5.** $f(0+0)=0, f(0-0)=0$

प्रश्नमाला 10.2

1. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $-\frac{1}{10}$ **2.** (a) $\sqrt{2}$ (b) n **3.** (a) $2\log_e 2$ (b) 1 **4.** (a) 2 (b) $\frac{1}{2}$

5. (a) 1 (b) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ **6.** (a) 2 (b) 1 **7.** (a) 2 (b) $\frac{3}{2}(a+2)^{\frac{1}{2}}$

प्रश्नमाला 10.3

1. 20 **2.** 49 **3.** (i) $3x^2$ (ii) $2x-3$ (iii) $\frac{-2}{x^3}$ (iv) $\frac{-2}{(x-1)^2}$

5. $nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$ **6.** (i) $2x-a-b$ (ii) $4ax(ax^2+b)$ (iii) $\frac{a-b}{(x-b)^2}$

7. $\frac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$ **8.** (i) 2 (ii) $20x^3-15x^2+6x-4$ (iii) $15x^4+\frac{24}{x^5}$ (iv) $\frac{-12}{x^5}+\frac{36}{10^{10}}$

(v) $\frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$ **9.** $-\sin x$ **10.** (i) $\cos 2x$ (ii) $\sec x \tan x$

(iii) $-\operatorname{cosec} x \cot x$ (iv) $-3\operatorname{cosec}^2 x - 5\operatorname{cosec} x \cot x$ (v) $5\cos x + 6\sin x$

विविध प्रश्नमाला–10

1. (B) **2.** (A) **3.** (D) **4.** (C) **5.** (A) **6.** (D) **7.** (C)
8. (B) **9.** (B) **10.** (C) **11.** (C) **12.** (C) **13.** (B) **14.** (D)
15. (A) **16.** (D) **17.** (C) **18.** (B) **19.** (D) **20.** (A) **21.** $a=1, b=2, c=1$

22. $c/2$ **23.** $1/\sqrt{2}$ **24.** 9 **25.** a **26.** $\frac{e^2-1}{e^2+1}$ **27.** $1/2$

29. $x^3e^x\cos x + x^3e^x\sin x + 3x^2e^x\sin x$

11

सरल रेखा
(Straight line)

11.01 सरल रेखा (Straight line)

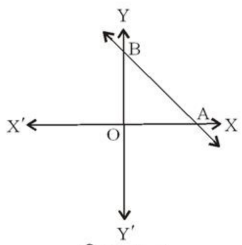
परिभाषा : सरल रेखा एक चर बिन्दु का बिन्दुपथ है जिस पर किन्हीं दो बिन्दुओं को सीधे मिलाने पर बिन्दुपथ के अन्य सभी बिन्दु भी इस पर स्थित हो।

11.02 सरल रेखा का समीकरण (Equation of straight line)

एक ऐसा समीकरण "सरल रेखा" का समीकरण कहलाता है जो कि सरल रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु द्वारा संतुष्ट होता है और ऐसे बिन्दु जो सरल रेखा पर नहीं होते उन्हें संतुष्ट नहीं करता।

11.03 परिभाषाएँ (Definitions)

(क) अन्तःखण्ड : यदि सरल रेखा AB, भुजाक्ष और कोटि–अक्ष को चित्र 11.01 में क्रमशः A और B बिन्दुओं पर काटती है तब



चित्र 11.01

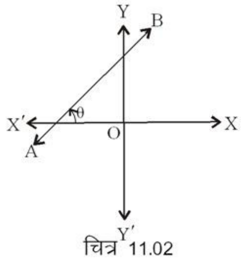
(i) OA को सरल रेखा AB का x-अक्ष पर **अन्तःखण्ड** कहते हैं।

(ii) OB को सरल रेखा का y-अक्ष पर **अन्तःखण्ड** कहते हैं।

(iii) OA और OB दोनों को (इसी क्रम में) सरल रेखा AB का अक्षों पर "**अन्तःखण्ड**" कहते हैं।

टिप्पणीः यदि AB क्रमशः OX', OY' पर हो तो अन्तःखण्ड ऋणात्मक होते हैं।

(ख) सरल रेखा की प्रवणता : कोई सरल रेखा x-अक्ष के साथ धन दिशा में जो कोण बनाती है उस कोण की स्पर्शज्या को उस सरल रेखा की **प्रवणता** अथवा **झुकाव** (ढ़ाल) कहते हैं।

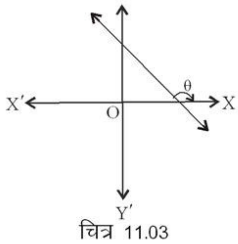


चित्र 11.02

रेखा की प्रवणता को प्रायः m से प्रदर्शित किया जाता है। यदि AB सरल रेखा x-अक्ष के साथ चित्र 11.02 में धन दिशा (↶) में θ कोण बनाती है तो $m = \tan\theta$ होता है। यदि AB सरल रेखा x-अक्ष के साथ चित्र 11.03 में ऋण दिशा (↷) में θ कोण बनाती है तो $m = -\tan\theta$ होगा।

चूँकि x-अक्ष अथवा x-अक्ष के समान्तर रेखा x-अक्ष की धन दिशा से $0°$ का कोण बनाती है, अतः x-अक्ष अथवा x-अक्ष के समान्तर रेखा की प्रवणता (ढ़ाल) $m = \tan 0° = 0$ होगी।

इसी प्रकार y-अक्ष अथवा y-अक्ष के समान्तर रेखा x-अक्ष की धन दिशा से $90°$ का कोण बनाती है। अतः y-अक्ष अथवा y-अक्ष के समान्तर रेखा की प्रवणता (ढाल) $m = \tan 90° = \infty$ होगी।



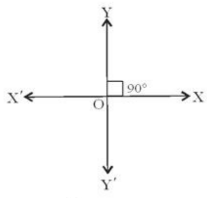
चित्र 11.03

यदि रेखा अक्षों से समान कोण बनाती है अर्थात् x-अक्ष के साथ धन दिशा (↶) यानी वामावर्त दिशा में 45^0 का कोण बनाती है तो प्रवणता (ढ़ाल) m का मान $\tan 45° = 1$ होगा जब कि x-अक्ष के साथ ऋण दिशा (↷) यानी दक्षिणावर्त दिशा में 135^0 का कोण बनाती है तो रेखा की प्रवणता (m) का मान $\tan 135° = -1$ होगा।

टिप्पणी : किसी भी रेखा द्वारा x-अक्ष की धन दिशा से बनाया गया (वामावर्त दिशा में मापा गया) कोण सदैव $0°$ एवं $180°$ के मध्य होता है।

11.04 समकोणिक निर्देशाक्ष (Rectangular axes)

यदि x-अक्ष तथा y-अक्ष को निरूपित करने वाली रेखाऐं एक दूसरे पर लम्ब हों तो उन्हे समकोणिक–निर्देशाक्ष कहते है। x-अक्ष या XOX' रेखा पर सदैव प्रत्येक बिन्दु पर कोटि अर्थात् y-निर्देशांक शून्य होता है। अतः x-अक्ष का समीकरण y=0 होता है। y-अक्ष या YOY' पर सदैव प्रत्येक बिन्दु पर भुज अर्थात् x –निर्देशांक शून्य होता है। अतः y-अक्ष का समीकरण $x = 0$ होता है।



चित्र 11.04

11.05 निर्देश अक्षों के समान्तर रेखा का समीकरण (Equation of a line parallel to axes)

(i) x-अक्ष के समान्तर किसी सरल रेखा का समीकरण जो उससे b दूरी पर स्थित है

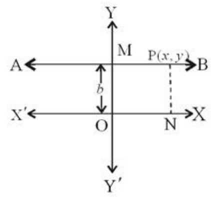
चित्र 11.05 के अनुसार माना कि x-अक्ष के समान्तर b दूरी पर स्थित कोई रेखा AB है जो कि y –अक्ष की धनात्मक दिशा में M बिन्दु पर काटती है। अतः OM = b

माना कि AB रेखा पर कोई चर बिन्दु $P(x, y)$है। P से x-अक्ष पर लम्ब PN खींचा। अर्थात् P बिन्दु के लिए कोटि $PN = y$, परंतु PN = OM.

अतः $OM = y \therefore y = b$

इसी प्रकार AB पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के लिए y-निर्देशांक b के बराबर है।

$\therefore$ AB रेखा का समीकरण y = b है।

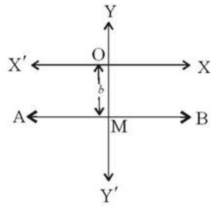


चित्र 11.05

उपप्रमेय

(i) यदि रेखा AB, x-अक्ष के नीचे की ओर b दूरी पर हो, तो उसका समीकरण $y = -b$ होगा। (चित्र 11.06)

(ii) यदि रेखा AB, x-अक्ष से संपाती है तो b =0 होगा। तब AB रेखा का समीकरण और x-अक्ष का समीकरण एक ही $y = 0$ होगा।



चित्र 11.06

(ii) y-अक्ष के समान्तर किसी सरल रेखा का समीकरण जो उससे a दूरी पर स्थित है

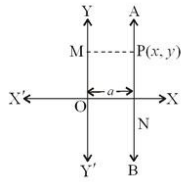
चित्र 11.07 के अनुसार माना कि y-अक्ष के समान्तर a दूरी पर स्थित कोई रेखा AB है जो कि x-अक्ष की धनात्मक दिशा में N बिन्दु पर काटती है। अतः $ON = a$.

माना कि रेखा AB पर कोई चर बिन्दु $P(x, y)$है। P से y –अक्ष पर लम्ब PM खींचा, अर्थात् P के लिए भुज $PM = x$, परन्तु $PM = ON$.

अतः $ON = x$

$\therefore \quad x = a$

इसी प्रकार AB रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के लिए भुज x निर्देशांक a के बराबर है। अतः रेखा AB का समीकरण $x = a$ होगा।

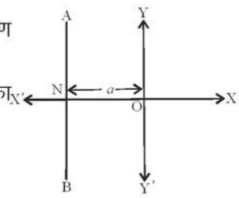


चित्र 11.07

उपप्रमेय :

(i) यदि रेखा AB, y-अक्ष की ऋण दिशा में अर्थात् y-अक्ष के बायीं ओर हो तो उसका समीकरण $x = -a$ होगा। (चित्र 11.08)

(ii) यदि रेखा AB, y-अक्ष से संपाती हो तो a = 0 होगा। अतः AB रेखा का समीकरण और y –अक्ष का समीकरण एक ही $x = 0$ होगा।



चित्र 11.08

विभिन्न प्रमाणिक रूपों में रेखा का समीकरण

11.06 अन्तः खण्ड रूप (Intercept form)

अक्षों पर क्रमशः a और b अन्तःखण्ड काटने वाली रेखा का समीकरण :

माना कि रेखा QR, x तथा y- अक्षों को क्रमशः A तथा B बिन्दुओं पर इस प्रकार काटती है कि $OA = a$ तथा $OB = b$.

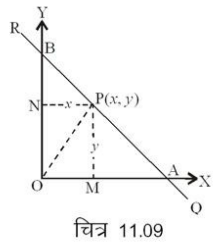
अब AB पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ मान लिया। OP को मिलाया और P से x- अक्ष पर PM और y- अक्ष पर PN लम्ब खींचा।

समकोण ΔOAB का क्षेत्रफल $= \Delta$OPA का क्षेत्रफल $+ \Delta$OPB का क्षेत्रफल

$$\frac{1}{2}\times OA\times OB=\frac{1}{2}\times OA\times PM+\frac{1}{2}\times OB\times PN$$

$$\frac{1}{2}\times a\times b=\frac{1}{2}\times a\times y+\frac{1}{2}\times b\times x$$

$\frac{1}{2}\times a\times b$ से प्रत्येक पद में भाग देने पर,



चित्र 11.09

अर्थात् $\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

अतः रेखा QR का अभीष्ट समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ है जो कि अन्तःखण्ड रूप कहलाता है।

टिप्पणी : जब a का मान अनन्त की ओर अग्रसर होता है अर्थात् $a\to\infty$ तो रेखा का समीकरण $\frac{x}{\infty}+\frac{y}{b}=1$, या $\frac{y}{b}=1$ या $y=b$ होगी जो कि x-अक्ष के समान्तर रेखा है। इसी प्रकार b का मान अनन्त की ओर अग्रसर होता है अर्थात् $b\to\infty$ तो रेखा का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{\infty}=1$, या $\frac{x}{a}=1$, या $x=a$ होगी जो कि y-अक्ष के समान्तर रेखा है।

11.07 झुकाव रूप या स्पर्शज्या रूप (Slope form)

y-अक्ष पर c लम्बाई के बराबर अन्तःखण्ड तथा x-अक्ष की धन दिशा (↶) से θ कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण :

रेखा AB पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ लिया। P से OX पर PM लम्ब डाला जो कि मूल बिन्दु O से AB के समान्तर खींची गयी रेखा OL को R पर काटती है।

समकोण Δ OMR में, $\quad \tan\theta=\frac{RM}{OM}$,

या $\quad RM=OM\tan\theta$

अब $\quad PM=PR+RM\ (AB||OL)$

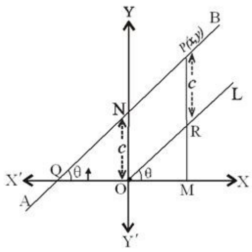
$\quad PM=c+OM\tan\theta\ \ (ON=RP=c)$

$\therefore \quad y=x\tan\theta+c$

या $\quad y=mx+c$,

यहाँ $m=\tan\theta$, $m=$ रेखा की प्रवणता है।

यही अभीष्ट रेखा की समीकरण है।



चित्र 11.10

टिप्पणी :

(i) यदि रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है तब y-अक्ष पर कटा हुआ अन्तःखण्ड शून्य होगा। अतः मूल बिन्दु से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $y=mx$ जिसमें c नहीं होगा।

(ii) जब रेखा y-अक्ष को OY पर काटती है तो c का मान धनात्मक एवं OY' पर काटती है तो c का मान ऋणात्मक होता है।

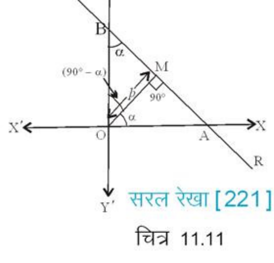
(iii) जब θ का मान अधिक कोण हो तो प्रवणता (m) अर्थात् $\tan\theta$ का मान चिह्न में ऋणात्मक होता है तथा θ का मान न्यून कोण होने पर प्रवणता (m) अर्थात् $\tan\theta$ का मान चिह्न में सदैव धनात्मक होता है। यदि रेखा अक्षों से बराबर कोण बनाती है तब $m=\pm1$ होता है।

11.08 लम्ब रूप (Normal form)

मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई तथा लम्ब द्वारा x-अक्ष के साथ बना हुआ कोण दिया हो तो रेखा का समीकरण :

माना कि R S कोई रेखा x-अक्ष एवं y-अक्ष को क्रमशः बिन्दुओं A एवं B पर काटती है। मूल बिन्दु O से रेखा पर OM लम्ब खींचा जिस की लम्बाई p तथा यह x- अक्ष की धन दिशा से α कोण बनाता है। अर्थात् $\angle MOA=\alpha$. समकोण ΔOBM में,

$$\angle OBM=90^\circ-\angle BOM$$
$$=90^\circ-\{90^\circ-\angle MOA\}$$
$$=90^\circ-\{90^\circ-\alpha\}$$
$$=\alpha$$



चित्र 11.11

समकोण ΔOMA में,

$$\cos\alpha = \frac{p}{OA} \quad \Rightarrow \quad OA = \frac{p}{\cos\alpha}$$

तथा समकोण Δ OBM में,

$$\sin\alpha = \frac{p}{OB} \quad \Rightarrow \quad OB = \frac{p}{\sin\alpha}$$

अतः RS रेखा x-अक्ष एवं y-अक्ष पर क्रमशः OA, OB अर्थात् $\frac{p}{\cos\alpha}, \frac{p}{\sin\alpha}$

अंतःखण्ड काटती है। इसका समीकरण $\frac{x}{p/\cos\alpha} + \frac{y}{p/\sin\alpha} = 1$

या $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

यही लम्ब रूप में RS रेखा का समीकरण है।

टिप्पणी :

(i) मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई p सदैव धनात्मक लेते हैं।

(ii) मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब द्वारा x-अक्ष की धनात्मक दिशा से बनाया गया कोण का मान $0°$ से $360°$ के मध्य कुछ भी सम्भव है।

(iii) किसी भी रेखा का समीकरण ज्ञात करने के लिए दो शर्तों का होना आवश्यक है।

(iv) प्रायः सरल रेखा का समीकरण लिखते समय भुज (x) को पहले तथा कोटि (y) को दूसरे पद पर लिखते हैं।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y- अक्ष के समान्तर है तथा बिन्दु (4,3) से गुजरती है।

हल : y- अक्ष के समान्तर किसी रेखा का समीकरण है

$$x = a \tag{1}$$

$\because$ रेखा बिन्दु (4, 3) से गुजरती है इसलिए बिन्दु के निर्देशांक रेखा के समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे। अतः $4 = a$

a का मान समीकरण (1) में रखने पर, अभीष्ट रेखा का समीकरण $x = 4$ होगा।

उदाहरण 2. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $y = 8$ तथा $y = -14$ से समान दूरी पर स्थित है।

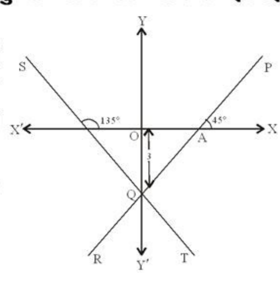
हल : हमें ज्ञात है कि रेखाएँ $y = 8$ तथा $y = -14$ सदैव x-अक्ष के समान्तर रेखाएँ है। अतः इन दोनों रेखाओं से समान दूरी पर स्थित रेखा भी x-अक्ष के ही समान्तर होगी जिसकी x-अक्ष से दूरी

$$= \frac{8 + (-14)}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $y = -3$ है।

उदाहरण 3. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष को मूल बिन्दु से नीचे की ओर 3 इकाई का अन्तःखण्ड काटती है और दोनों अक्षों से बराबर झुकी हुई है।

हल : अभीष्ट रेखा दोनों अक्षों से बराबर झुकी हुई है जब कि हम जानते है कि दोनों अक्षों के मध्य का कोण $90°$ होता है। अतः रेखा x-अक्ष की धन दिशा (वामावर्त दिशा) से $45°$ या $135°$ का कोण बनायेगी। प्रश्न में दी गयी दोनों स्थितियों के अनुसार माना कि रेखा का समीकरण है



चित्र 11.12

$$y = mx + c \tag{1}$$

यहाँ $c = -3$ तथा $m = \tan 45°$ या $m = \tan 135°$

$\Rightarrow$ $m = 1$

या $m = \tan(90° + 45°) = -1$

अब m, c का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y = x - 3 \qquad \text{या} \qquad y = -x - 3$$

$$\Rightarrow \quad x - y - 3 = 0 \qquad \text{या} \qquad x + y + 3 = 0$$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $x - y - 3 = 0$ या $x + y + 3 = 0$ होगा।

उदाहरण 4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,3)$ से होकर जाती है और अक्षों पर बराबर एवं विपरीत चिह्न के अन्तःखण्ड काटती है।

हल : माना कि सरल रेखा की अभीष्ट समीकरण है

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{1}$$

जब कि रेखा द्वारा x- अक्ष एवं y- अक्ष पर काटे गये अन्तःखण्ड क्रमशः a, b हैं।

प्रश्नानुसार रेखा अक्षों से बराबर एवं विपरीत चिह्न वाले अन्तःखण्ड काटती है, अतः $b = -a$, इस प्रकार रेखा का समीकरण होगा

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-a} = 1$$

या
$$x - y = a \tag{2}$$

यह रेखा बिन्दु $(2,3)$ से गुजरती है अतः उपर्युक्त समीकरण को संतुष्ट करेगी अर्थात् समीकरण में $x = 2, y = 3$ रखने पर, $a = -1$

समीकरण (2) में a का मान रखने पर,

$$x - y = -1$$

या
$$x - y + 1 = 0$$

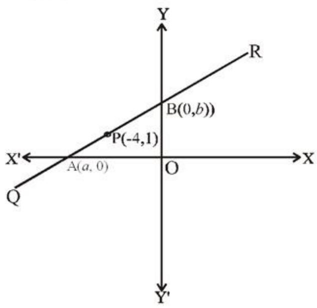
अतः अभीष्ट समीकरण $x - y + 1 = 0$ होगा।

उदाहरण 5. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-4,1)$ से होकर जाती है और यह fc Un q m I d s v [kk.M d s e/: d s v Ur [k.M d ks x-अक्ष के प्रतिच्छेद बिन्दु से 1:2 के अनुपात में विभाजित करती है।

हल : माना कि अक्षों से क्रमशः a एवं b अन्तःखण्ड काटने वाली रेखा का समीकरण है

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{1}$$

यह रेखा अक्षों को क्रमशः A एवं B बिन्दु पर काटती है जिनके निर्देशांक $(a,0)$ और $(0,b)$ हैं। अन्तः खण्ड AB को A की ओर से 1 : 2 में विभाजित करने वाले बिन्दु P के निर्देशांक (x_1, y_1) हो तो



चित्र 11.13

$$x_1 = \frac{2 \times a + 1 \times 0}{2 + 1}, \quad y_1 = \frac{2 \times 0 + 1 \times b}{2 + 1}$$

या $\quad x_1 = \dfrac{2a}{3}, \qquad y_1 = \dfrac{b}{3}.$

जब कि प्रश्न के अनुसार यह बिन्दु $(-4,1)$ है।

$\therefore \quad \dfrac{2a}{3} = -4$ तथा $\dfrac{b}{3} = 1$, अर्थात् $a = -6$ तथा $b = 3$

समीकरण (1) में a, b के मान रखने पर] $\dfrac{x}{-6} + \dfrac{y}{3} = 1$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $x - 2y + 6 = 0$ है।

उदाहरण 6. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई 5 इकाई तथा यह लम्ब x- अक्ष के साथ 135° कोण बनाता है।

प्रश्न में दी शर्तों के अनुसार माना कि रेखा का समीकरण है

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \qquad (1)$$

यहाँ $\alpha = 135°$ और $p = 5$ इकाई

$\therefore \quad \cos\alpha = \cos 135° = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\sin\alpha = \sin 135° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

समीकरण (1) में मान रखने पर, $x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5$

$$\frac{-x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 5 \quad \text{या} \quad x - y + 5\sqrt{2} = 0$$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $x - y + 5\sqrt{2} = 0$ हैं।

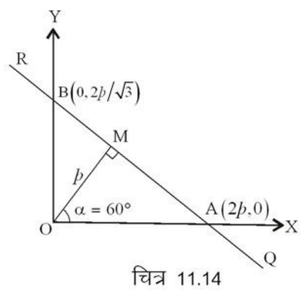
उदाहरण 7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों के साथ $54\sqrt{3}$ वर्ग इकाई क्षेत्रफल का त्रिभुज बनाती है तथा जिस पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब x-अक्ष के साथ 60° का कोण बनाता है।

हल : माना कि मूल बिन्दु से किसी रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई p है तथा यह लम्ब x- अक्ष से 60° कोण बनाता है तब उस रेखा QR का समीकरण है

$$x\cos 60^0 + y\sin 60^0 = p$$

या $$x.\frac{1}{2} + y.\frac{\sqrt{3}}{2} = p \;\Rightarrow\; x + \sqrt{3}y = 2p \qquad (1)$$

यह रेखा x एवं y-अक्षों को क्रमशः बिन्दुओं A एवं B पर काटती है। बिन्दु A एवं B के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए समीकरण (1) में क्रमशः $y = 0$ एवं $x = 0$ रखने पर $x = 2p,\; y = \dfrac{2p}{\sqrt{3}}$



चित्र 11.14

$\therefore$ बिन्दु $A(2p, 0)$ तथा बिन्दु $B\left(0, \dfrac{2p}{\sqrt{3}}\right)$ होगा।

$\therefore$ अक्षों के साथ बने त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $= \dfrac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

या $\Delta OAB = \dfrac{1}{2} \times OA \times OB = \dfrac{1}{2}.2p.\dfrac{2p}{\sqrt{3}} = \dfrac{2p^2}{\sqrt{3}}$

प्रश्नानुसार त्रिभुज का क्षेत्रफल $= 54\sqrt{3}$ वर्ग इकाई है।

अतः $\dfrac{2p^2}{\sqrt{3}} = 54\sqrt{3} \Rightarrow p = \pm 9$

समीकरण (1) में p का मान धनात्मक रखने पर

$x + \sqrt{3}y = 2 \times 9$ या $x + \sqrt{3}y = 18$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण $x + \sqrt{3}y = 18$ है।

प्रश्नमाला 11.1

1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के समान्तर है तथा
   (i) मूल बिन्दु से ऊपर की ओर 5 इकाई की दूरी पर है।
   (ii) मूल बिन्दु से नीचे की ओर 3 इकाई दूरी पर है।
2. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष के समान्तर है और इससे
   (i) $a+b$ (ii) a^2-b^2 (iii) $b\cos\theta$ दूरी पर स्थित है।
3. y-अक्ष के समान्तर उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से क्रमशः
   (i) 5 (ii) –3 (iii) $2/5$ इकाई दूरी पर है।
4. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष के समान्तर है तथा उनसे
   (i) $\sqrt{7}$ (ii) $-\sqrt{3}+2$ (iii) $p+q$ की दूरी पर स्थित है।
5. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-3,2)$ से होकर जाती है तथा क्रमशः x-अक्ष के लम्बवत् एवं x-अक्ष के समान्तर है।
6. बिन्दु $(3,4)$ से होकर जाने वाली अक्षों के समान्तर रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। इन रेखाओं से 8 इकाई की दूरी पर और इनके समान्तर रेखाओं के समीकरण भी ज्ञात कीजिए।
7. $x=\pm 4$, और $y=\pm 3$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक लिखिए और उनसे निर्मित आयत का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।
8. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु से होकर जाती है तथा
   (i) x-अक्ष से $-135°$ का कोण बनाती है।
   (ii) प्रथम चतुर्थांश में OY से $60°$ का कोण बनाती है।
   (iii) y- अक्ष की धनदिशा से 5 इकाई के बराबर अन्तःखण्ड काटती है और कोण XOY के समद्विभाजक के समान्तर है।
9. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष तथा y-अक्ष पर निम्नलिखित अन्तःखण्ड काटती है
   (i) 5, 3 (ii) –2, 3
10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,3)$ से गुजरती है तथा अक्षों पर बराबर अन्तःखण्ड काटती है।
11. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1,2)$ से होकर जाती है तथा रेखा द्वारा x- अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड y-अक्ष पर काटे गये अन्तःखण्ड का दुगना है।
12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-3,-5)$ से होकर जाती है तथा दोनों अक्षों के मध्य, रेखा का कटा हुआ अन्तःखण्ड इस बिन्दु पर समद्विभाजित करता है।
13. ऐसी दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4,-3)$ से होकर जाती है तथा अक्षों से काटे हुए अन्तःखण्डों का योग 5 इकाई है।
14. सिद्ध कीजिए कि उस सरल रेखा का समीकरण जिसके अक्षों पर अन्तःखण्डों के व्युत्क्रम a और b है, $ax+by=1$ है।
15. एक सरल रेखा अक्षों से क्रमशः 5 और 3 इकाईयों का अन्तःखण्ड काटती है। इस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जब कि अन्तःखण्ड :
    (i) अक्षों की धन दिशा में हो।
    (ii) अक्षों की ऋण दिशा में हो।
    (iii) पहला अन्तःखण्ड धन दिशा में और दूसरा ऋण दिशा में हो।
16. एक सरल रेखा पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब y-अक्ष से $30°$ का कोण बनाता है तथा उसकी लम्बाई 2 इकाई है। इस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।
17. रेखा $x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha$ के उस भाग की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो अक्षों के मध्य में काटता है। इस भाग के मध्य बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
18. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके लिए $p=3$ तथा $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ है जहाँ p मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई तथा α इस लम्ब द्वारा x-अक्ष से बनाया गया कोण है।

11.09 सरल रेखा तथा x, y में एक घातीय समीकरण
(Starightline and linear equation in x, y)

(क) किसी समतल में प्रत्येक सरल रेखा x तथा y में एक घातीय समीकरण द्वारा निरूपित होती है।

समतल में स्थित किसी सरल रेखा द्वारा x-अक्ष के साथ न्यून कोण या समकोण या अधिक कोण बनाने के अतिरिक्त कोई सम्भावना नहीं है।

(i) यदि रेखा x-अक्ष के साथ न्यून कोण बनाती है तब उसका समीकरण $y = mx + c$ के रूप का होगा जहाँ $m = \tan\theta$.

(ii) यदि रेखा x-अक्ष के साथ समकोण बनाती है तब वह रेखा y-अक्ष के समान्तर होगी तथा रेखा का समीकरण $x = c$ रूप का होगा।

(iii) यदि रेखा x-अक्ष के साथ अधिक कोण बनाती है तब भी उसका समीकरण स्थिति (i) के अनुसार $y = mx + c$ रूप का होगा।

अतः तीनों स्थितियों में सरल रेखा का समीकरण x तथा y में एक घात वाला समीकरण ही है।

(ख) x और y में एक घातीय समीकरण सर्वदा एक सरल रेखा को निरूपित करता है

यदि A, B, C तीन अचर राशि जो कि x, y रहित है तब x, y में एक घातीय समीकरण का व्यापक रूप है

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

यहाँ प्रत्येक पद में x या y की उच्चतम घात एक एवं न्यूनतम घात शून्य है अर्थात् प्रथम पद एवं द्वितीय पद में क्रमशः x, y की घात एक है जबकि अचर तृतीय पद x, y रहित है जिसमें x, y की घात शून्य है। अतः समीकरण (1) प्रथम घात का व्यापक समीकरण है।

समीकरण (1) में A तथा B के मान दोनों शून्य नहीं हो सकते क्योंकि A और B एक साथ शून्य हो तब समीकरण का रूप $C = 0$ हो जायेगा जो कि C के प्रत्येक मान के लिए सम्भव नहीं होगा तथा चर राशि नहीं होने के कारण वह अर्थविहीन होगा। अतः $Ax + By + C = 0$ में यह आवश्यक है कि $A \neq 0$ या $B \neq 0$.

प्रथम स्थिति :

जब $A \neq 0$, $B = 0$, तब समीकरण (1) में $Ax + 0 \times y + C = 0$ या $Ax + C = 0$ या $x = -C/A$ जो कि y अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण है तथा y-अक्ष से $-C/A$ दूरी पर स्थित है। यदि इसके साथ $C = 0$ हो तब $Ax = 0$ या $x = 0$ जो कि y-अक्ष की समीकरण है।

द्वितीय स्थिति :

जब $A = 0, B \neq 0$, तब समीकरण (1) में $0 \times x + By + C = 0$ या $By + C = 0$ या $y = -C/B$ जोकि x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण तथा x-अक्ष से $-C/B$ दूरी पर स्थित है। यदि इसके साथ $C = 0$ हो तब $By = 0$ या $y = 0$ जो कि x-अक्ष की समीकरण है।

इसी प्रकार समीकरण (1) द्वारा निरूपित बिन्दुपथ पर तीन बिन्दु $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ हो तब यह तीनों बिन्दु समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे।

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \tag{2}$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0 \tag{3}$$

$$Ax_3 + By_3 + C = 0 \tag{4}$$

उपर्युक्त समीकरणों में से अचर A,B,C को विलुप्त करने पर,

$$x_1(y_2 - y_3) + y_1(x_3 - x_2) + 1(x_2y_3 - y_2x_3) = 0 \tag{5}$$

उपरोक्त का वाम पक्ष त्रिभुज जिसके शीर्ष दिये गये बिन्दु है को व्यक्त करता है। चूंकि यह क्षेत्रफल शून्य है अर्थात् तीनों बिन्दु एक सरल रेखा पर है। अतः समीकरण $Ax + By + C = 0$ एक सरल रेखा को निरूपित करता है जो **"व्यापक समीकरण"** कहलाता है।

टिप्पणी :

(i) सरल रेखा के व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$ से प्रतीत होता है कि तीन अचर पद है जब कि वास्तव में इनमें से दो ही स्वतंत्र अचर पद है क्योंकि समीकरण के $\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$ रूप में रखने पर $\frac{A}{C}$ एवं $\frac{B}{C}$ दो ही अचर शेष रहते है।

(ii) यदि दो समीकरण $ax+by+c=0$ तथा $a'x+b'y+c'=0$ एक ही रेखा को निरूपित करते हैं तब $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ अर्थात् समान पदो के गुणाँक समानुपाती होते हैं।

11.10 सरल रेखा के व्यापक समीकरण का मानक रूपों में समानयन
(Reduction of general equation of straight line into standard forms)

1. झुकाव रूप $y=mx+c$ में व्यक्त करना : हम जानते हैं कि सरल रेखा का व्यापक समीकरण $Ax+By+C=0$ होता है।

अर्थात्, $By=-Ax-C$

$$\Rightarrow \qquad y=\left(-\frac{A}{B}\right)x-\left(\frac{C}{B}\right) \qquad (\text{जब कि } B\neq 0)$$

$$\Rightarrow \qquad y=\left(-\frac{A}{B}\right)x+\left(-\frac{C}{B}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad y=mx+c, \qquad \text{जहाँ } m=-\frac{A}{B},\ c=-\frac{C}{B}$$

टिप्पणीः

(i) सरल रेखा $Ax+By+C=0$ का झुकाव (ढ़ाल)

$$m=\frac{-A}{B}=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}$$

तथा y- अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड

$$c=-\frac{C}{B}=-\frac{\text{अचर पद}}{y \text{ का गुणांक}}$$

(ii) समीकरण $y=mx+c$ के बायें पक्ष में y का गुणाँक 1 होता है। अतः

(क) बायें पक्ष में y का पद रखकर शेष पदों को दायें पक्ष में ले जाते हैं।

(ख) यदि बायें पक्ष में y का कोई गुणाँक हो, तो उससे दोनों पक्षों में भाग देते हैं।

2. अन्तःखण्ड रूप $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ में व्यक्त करना : सरल रेखा का व्यापक रूप में समीकरण है

$$Ax+By+C=0$$

या
$$Ax+By=-C$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x}{\left(\frac{-C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{-C}{B}\right)}=1$$

या
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad \text{जहाँ} \quad a=-\frac{C}{A} \quad ; \quad b=-\frac{C}{B}$$

अतः x-अक्ष तथा y-अक्ष पर काटे गए अन्तःखण्डों की लम्बाइयाँ क्रमशः $-\frac{C}{A}, -\frac{C}{B}$ होंगी।

टिप्पणी :

(i) दिए हुए समीकरण के दाँयें पक्ष में केवल अचर पद लिखें।

(ii) अचर पद से दोनों पक्षों में भाग दें, जिससे दायाँ पक्ष 1 हो जाए।

(iii) वायें पक्ष में x और y के गुणाँको के व्युत्क्रम को उनके हर में रखें।

3. लम्ब रूप $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ में व्यक्त करना :

सरल रेखा का व्यापक समीकरण है

$$Ax + By + C = 0$$

या $$Ax + By = -C \quad (1)$$

माना इस रेखा का लम्बरूप समीकरण

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \quad \text{(यहाँ } p \text{ धनात्मक है)} \quad (2)$$

समीकरण (1) एवं (2) एक ही रेखा के दो समीकरण है, अतः पदों की तुलना करने पर,

$$\frac{-C}{p} = \frac{A}{\cos\alpha} = \frac{B}{\sin\alpha} = \pm\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}},$$

या $$\frac{-C}{p} = \frac{A}{\cos\alpha} = \frac{B}{\sin\alpha} = \pm\frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{1}$$

अतः $$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

समीकरण (2) में मान प्रतिस्थापित करने पर ,

$$x\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + y\frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

अर्थात् $$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

अतः यह $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ रेखा का अभीष्ट लम्बरूप है। स्मरण रहे कि $p = -\frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$ के लिए $\pm$ चिह्न में वही चिह्न लेंगे जिससे ऊपर p धनात्मक रहे।

टिप्पणी :

(i) व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$ को लम्ब रूप में बदलने के लिए सर्वप्रथम C को दायीं ओर स्थानान्तरित करके धनात्मक बनाते हैं।

(ii) प्रत्येक पद में $\sqrt{A^2 + B^2}$ अर्थात् x तथा y के गुणाँकों के वर्गों के योग का वर्गमूल से भाग करते हैं।

11.11 एक बिन्दु से गुजरने वाली रेखा (Straight line passing through one point)

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो दिए हुए बिन्दु (x_1, y_1) से होकर जाती है तथा x-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है।

चूँकि अभीष्ट रेखा x-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है अतः रेखा की प्रवणता $m = \tan\theta$ होगी। माना कि रेखा की अभीष्ट समीकरण है

$$y = mx + c \quad (1)$$

यह रेखा बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरती है अतः समीकरण (1) को संतुष्ट कराने पर अर्थात् $x = x_1$ तथा $y = y_1$ रखने पर

$$y_1 = mx_1 + c \quad (2)$$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

जो रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

टिप्पणी : m का मान प्रश्न में दिए हुए किसी अन्य प्रतिबंध से ज्ञात किया जाता है, जो रेखा को संतुष्ट करती है।

11.12 दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा (Line passing through two points)

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जो दिए हुए दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरती है। माना कि सरल रेखा का समीकरण है

$$y = mx + c \tag{1}$$

चूँकि उपर्युक्त रेखा बिन्दु (x_1, y_1) तथा बिन्दु (x_2, y_2) से गुजरती है। अतः यह बिन्दु समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे।

$\therefore$
$$y_1 = mx_1 + c \tag{2}$$

तथा
$$y_2 = mx_2 + c \tag{3}$$

समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{4}$$

समीकरण (3) में से समीकरण (2) घटाने पर

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \text{या} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

m का मान समीकरण (4) में रखने पर

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{या} \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

यह अभीष्ट समीकरण है।

टिप्पणी : बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता (ढाल)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\text{दोनों बिन्दुओं की कोटियों का अन्तर}}{\text{दोनों बिन्दुओं के भुजों का अन्तर}}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 8: समीकरण $3x + 4y = 12$ को (i) झुकाव रूप (ii) अन्तःखण्ड रूप (iii) लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए तथा इनके मानक रूप में प्रयुक्त अचर पदों के मान ज्ञात कीजिए।

हल : (i) दिया गया समीकरण है

$$3x + 4y = 12$$

या
$$4y = -3x + 12$$

या
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{12}{4}$$

या
$$y = -(3/4)x + 3$$

यह $y = mx + c$ रूप का है, जहाँ $m = -3/4$ तथा $c = 3$ है।

(ii) दिया गया समीकरण है

$$3x + 4y = 12$$

उपर्युक्त समीकरण में 12 से भाग देने पर,

$$\frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = 1$$

या
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

जो $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के रूप का है जहाँ $a = 4, b = 3$ है।

(iii) दिया गया समीकरण है

$$3x+4y=12$$

दायाँ पक्ष धनात्मक है अतः समीकरण में

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5 \text{ का भाग देने पर}$$

या $$\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y=\frac{12}{5}$$

जो कि $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ के रूप का है जहाँ

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \sin\alpha=\frac{4}{5},\quad p=\frac{12}{5}$$

जिससे $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ तथा $p=\frac{12}{5}$

इस प्रकार दी हुई रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई 12 / 5 इकाई तथा x-अक्ष के साथ झुकाव $\tan^{-1}(4/3)$ है।

उदाहरण 9: सरल रेखा $\sqrt{3}x-y+2=0$ को लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए तथा इस रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई और x-अक्ष से उसका झुकाव भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ समीकरण $\sqrt{3}x-y+2=0$ या $\sqrt{3}x-y=-2$

दायें पक्ष को धनात्मक करने पर,

$$-\sqrt{3}x+y=2 \tag{1}$$

दोनों पक्षों को $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=\sqrt{3+1}=2$ से भाग देने पर

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}-y=1 \tag{2}$$

यह $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ का रूप है। अतः तुलना करने पर,

$$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\alpha=\frac{1}{2},\qquad p=1$$

या $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos 30°$

$$=\cos\left(180°-30°\right) \text{ या } \cos(180°+30°)$$

$$=\cos 150° \text{ या } \cos 210°$$

अतः $\alpha=150°$ या $210°$ (3)

इसी प्रकार $\sin\alpha=\frac{1}{2}=\sin 30°=\sin\left(180°-30°\right)$

$$=\sin 30° \text{ या } \sin 150°$$

अतः $\alpha=30°$ या $150°$ (4)

समीकरण (3) तथा (4) में α का सर्वनिष्ठ मान 150° है।

अतः लम्ब की लम्बाई = 1 इकाई तथा उसका x-अक्ष से झुकाव 150° है।

उदाहरण 10: उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3,2)$ से गुजरती है तथा x-अक्ष के साथ $60°$ का कोण बनाती है।

हल : रेखा x-अक्ष के साथ $60°$ का कोण बनाती है। अतः अभीष्ट रेखा की प्रवणता $m = \tan 60° = \sqrt{3}$ तथा बिन्दु $(3,2)$ है

अर्थात् $x_1 = 3, y_1 = 2$

हम जानते हैं कि बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली तथा m प्रवणता की रेखा का समीकरण है,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

मान रखने पर,

$$y - 2 = \sqrt{3}.(x-3) \Rightarrow \sqrt{3}x - y + 2 - 3\sqrt{3} = 0$$

उदाहरण 11: उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4,-7),(-2,3)$ तथा बिन्दु $(-4,-7)$, $(-2,-3)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दुओं से गुजरती है।

हल : बिन्दु $(4,-7)$ एवं $(-2,3)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{-7+3}{2}\right) = (1,-2) \qquad (1)$$

इसी प्रकार बिन्दु $(-4,-7),(-2,-3)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$= \left(\frac{-4+(-2)}{2}, \frac{-7+(-3)}{2}\right) = (-3,-5) \qquad (2)$$

अतः बिन्दु $(1,-2)$ तथा $(-3,-5)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$y - (-2) = \frac{(-5)-(-2)}{(-3)-(1)}(x-1)$$

या $3x - 4y - 11 = 0$

प्रश्नमाला 11.2

1. निम्न समीकरणों को झुकाव रूप तथा अन्तःखण्ड रूप में परिवर्तित कर इनके मानक रूप में प्रयुक्त अचर पदों के मान ज्ञात कीजिए।

   (i) $7x - 13y = 15$ (ii) $5x + 6y + 8 = 0$

2. रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

3. निम्न रेखाओं के x-अक्ष की धन दिशा से बनने वाले कोण की स्पर्शज्या ज्ञात कीजिए।

   (i) $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ (ii) $x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$

4. सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1$ द्वारा अक्षों पर काटे गए भाग के मध्य बिन्दु के निर्देशांक (x_1, y_1) होंगे।

5. सरल रेखा $3x + 4y = 6$ से अक्षों के मध्य कटे हुए अन्तःखण्ड की लम्बाई और उसका मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

6. a और b के मान बताओ जब कि समीकरण $5x - 4y = 20$ और $ax - by + 1 = 0$ एक ही सरल रेखा को प्रदर्शित करे।

7. निम्न समीकरणों को $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ के रूप में परिवर्तित कीजिए।

   (i) $x + y + \sqrt{2} = 0$ (ii) $\sqrt{3}x - y + 2 = 0$

8. सरल रेखा $3x - 4y - 11 = 0$ को लम्ब रूप में परिवर्तित कीजिए तथा इस रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई और x-अक्ष से उसकी प्रवणता ज्ञात कीजिए।

9. सरल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ तथा $2x - 3y = 5$ एक ही रेखा निरूपित करते हैं, तो a व b का मान ज्ञात कीजिए।

10. सरल रेखा $y = mx + c$ एवं $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ एक ही रेखा को निरूपित करे तो रेखा का $x-$अक्ष से झुकाव कोण तथा $y-$अक्ष से काटे गए अन्तः रूप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

11. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,3)$ से होकर जाती है और x-अक्ष से $45°$ का कोण बनाती है।

12. निम्न दो बिन्दुओ से गुजरने वाली रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए :

(i) $(3,4)$ और $(5,6)$ (ii) $(0,-a)$ और $(b,0)$

(iii) (a,b) और $(a+b,a-b)$ (iv) $(at_1, a/t_1)$ और $(at_2, a/t_2)$

(v) $(a\sec\alpha, b\tan\alpha)$ और $(a\sec\beta, b\tan\beta)$

11.13 दो रेखाओं के मध्य का कोण (Angle between two lines)

माना दो रेखाएँ AB तथा CD हैं जिनके समीकरण क्रमशः $y = m_1x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ है। यह रेखाएँ x-अक्ष की धन दिशा से क्रमशः θ_1 तथा θ_2 कोण बनाती है। अतः इनके ढाल $m_1 = \tan\theta_1$ तथा $m_2 = \tan\theta_2$ है। तथा दोनों रेखाएँ एक दूसरे को P बिन्दु पर इस प्रकार काटती है कि चित्र 11.15 में $\angle BPD = \theta$. बने, अब त्रिभुज EPF में

$$\theta + \theta_2 = \theta_1 \qquad \therefore \qquad \theta = \theta_1 - \theta_2 \qquad (1)$$

समीकरण (1) से $\theta = \theta_1 - \theta_2$

$$\therefore \qquad \tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

या
$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

अतः
$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right] \qquad (2)$$

माना AB तथा CD के मध्य दूसरा कोण $CPB = \phi$ है

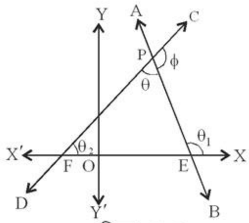
तब
$$\phi = \pi - \theta$$

$$\therefore \qquad \tan\phi = \tan(\pi - \theta)$$

या
$$\tan\phi = -\tan\theta$$

या
$$\tan\phi = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

अतः
$$\phi = \tan^{-1}\left[-\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right] \qquad (3)$$



चित्र 11.15

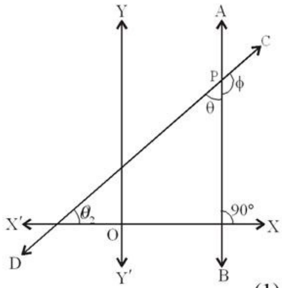
रेखाओं (2) तथा (3) के मध्य कोण $= \tan^{-1}\left[\pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right]$

टिप्पणी :

(i) दोनों रेखाओं के मध्य का कोण न्यूनकोण है तब $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$ धनात्मक लेते है। जब अधिक कोण हो तब यह राशि ऋणात्मक लेते है।

(ii) यदि दोनों रेखाओं में एक रेखा y-अक्ष के समान्तर हो तो θ का मान उपर्युक्त सूत्र से ज्ञात करना असम्भव है क्योंकि वह रेखा x-अक्ष से $90°$ का कोण बनाती है जिससे m_1 या m_2 का मान $\tan 90°$ अर्थात् अनन्त होगा। माना कि AB रेखा $y-$अक्ष के समान्तर है अर्थात् $x-$अक्ष से $90°$ का कोण बनाती है।

चित्रानुसार, $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_2$



चित्र 11.16

या $\tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)$

या $\tan\theta = \cot\theta_2$

$\Rightarrow$ $\tan\theta = \frac{1}{\tan\theta_2} = \frac{1}{m_2}$

$\therefore$ $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{m_2}$ (1)

इसी प्रकार रेखाओं के मध्य का दूसरा कोण $\mathrm{CPB} = \phi$ हो तब

$$\phi = \pi - \theta$$

या $\phi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right)$

या $\phi = \frac{\pi}{2} + \theta_2$

या $\tan\phi = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta_2\right)$

या $\tan\phi = -\cot\theta_2$

अतः $\tan\phi = -\frac{1}{\tan\theta_2}$

$\Rightarrow$ $\tan\phi = -\frac{1}{m_2}$

$\therefore$ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{m_2}\right)$ (2)

अतः समीकरण (1) एवं (2) से ज्ञात होता है कि यदि दो रेखाओं में से एक रेखा $y-$अक्ष के समान्तर है तब रेखाओं के मध्य का कोण $= \tan^{-1}\left(\pm\frac{1}{m_2}\right)$ होगा।

11.14 दो रेखाओं के समान्तर होने के लिए आवश्यक प्रतिबंध (Necessary condition for two lines to be parallel)

यदि दो रेखाएँ समान्तर हों, तो उनके मध्य का कोण शून्य होगा अतः कोण की स्पर्शज्या का मान भी शून्य होगा।

माना कि रेखाओं के समीकरण $y = m_1x + c_1$ तथा $y = m_2x + c_2$ है।

इन दोनों रेखाओं के मध्य का कोण θ हो तो

$$\tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

दोनों रेखाएँ समान्तर है अतः $\theta = 0°$ अर्थात् $\tan\theta = \tan 0 = 0$ रखने पर,

$$(m_1 - m_2) = 0$$

इस प्रकार दो रेखाएँ समान्तर है तो $m_1 = m_2$ अर्थात् उनकी प्रवणताएँ समान होंगी। इसको इस प्रकार भी कह सकते है कि यदि एक रेखा की प्रवणता ज्ञात हो तो उसके समान्तर रेखा की प्रवणता भी वही रहेगी।

11.15 दो रेखाओं के परस्पर लम्बवत् होने का प्रतिबंध (Condition for two lines to be mutually perpendicular)

माना कि दी हुई सरल रेखाओं के समीकरण निम्न हैं

$$y = m_1 x + c_1 \tag{1}$$

$$y = m_2 x + c_2 \tag{2}$$

यदि इन दोनों रेखाओं के मध्य का कोण θ हो तो $\tan\theta = \pm\left[\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right]$

यदि ये रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हो तो $\theta = 90°$ अर्थात् $\tan\theta = \tan 90° = \infty$

अतः $$1 + m_1 m_2 = 0$$

या $$m_1 m_2 = -1$$

या $$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

अतः दो लम्बवत् रेखाओं की प्रवणताओं का गुणनफल -1 होता है और किसी दी हुई रेखा की प्रवणता का चिह्न परिवर्तन करके व्युत्क्रम लिखने पर उस रेखा के लम्बवत् रेखा की प्रवणता प्राप्त होगी।

11.16 दिये हुए बिन्दु से गुजरने वाली एवं दी हुई सरल रेखा से निर्धारित कोण बनाने वाली रेखा की समीकरण (Equation of a line passing through a given point and making a certain angle with the given line)

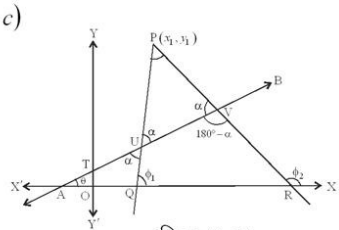
माना कि कोई बिन्दु $P(x_1, y_1)$ है तथा AB कोई रेखा है जो $x-$अक्ष के साथ θ कोण बनाती है तथा P से गुजरने वाली दो अभीष्ट रेखाएँ PQ, PR, $x-$अक्ष से क्रमशः ϕ_1 तथा ϕ_2 कोण बनाती है

$\therefore$ PQ का समीकरण $$y - y_1 = \tan\phi_1 (x - x_1) \tag{1}$$

तथा PR का समीकरण $$y - y_1 = \tan\phi_2 (x - x_1) \tag{2}$$

अब दी हुई रेखा AB की समीकरण $y = mx + c \ (\because m = \tan\theta, \text{OT} = c)$

जो कि PQ तथा PR से α कोण बनाती है।



चित्र 11.17

ΔAUQ तथा ΔAVR में, $\phi_1 = \theta + \alpha$ और $\phi_2 = \theta + (180 - \alpha)$

अतः $$\tan\phi_1 = \tan(\theta + \alpha)$$

$\Rightarrow$ $$\tan\phi_1 = \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha}$$

या $$\tan\phi_1 = \frac{m + \tan\alpha}{1 - m\tan\alpha} \tag{3}$$

तथा $$\tan\phi_2 = \tan\left[\theta + (180° - \alpha)\right] = \tan\left[180° + (\theta - \alpha)\right]$$

अतः $$\tan\phi_2 = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha} = \frac{m - \tan\alpha}{1 + m\tan\alpha} \tag{4}$$

$\tan\phi_1$ तथा $\tan\phi_2$ का मान समीकरण (3) तथा (4) से समीकरण (1) तथा (2) में रखने पर अभीष्ट रेखा का समीकरण प्राप्त होता है

$$y - y_1 = \frac{m + \tan\alpha}{1 - m\tan\alpha}(x - x_1) \tag{5}$$

या $$y - y_1 = \frac{m - \tan\alpha}{1 + m\tan\alpha}(x - x_1) \tag{6}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 12: रेखाओं $3x+y-7=0$ और $x+2y+9=0$ के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए।

हलः दी हुई रेखा $3x+y-7=0$ की प्रवणता

$$m_1=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\frac{3}{1}$$

इसी प्रकार दूसरी रेखा $x+2y+9=0$ की प्रवणता

$$m_2=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=-\frac{1}{2}$$

माना कि दोनों रेखाओं के मध्य का कोण θ है।

अतः $$\tan\theta=\pm\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm\frac{-3+\frac{1}{2}}{1+(-3)\left(-\frac{1}{2}\right)}=\pm(-1)$$

अतः $$\tan\theta=-1,\ 1$$

$\therefore$ $$\tan\theta=-\tan 45^\circ \text{ तथा } \tan\theta=\tan 45^\circ$$

$\therefore$ $$\theta=135^\circ \text{ तथा } \theta=45^\circ$$

उदाहरण 13: सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $2x-y+9=0$ और $4x-2y-8=0$ समान्तर है।

हलः प्रथम रेखा का समीकरण $2x-y+9=0$ है जिसकी प्रवणता m_1 है

$\therefore$ $$m_1=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=2$$

इसी प्रकार दूसरी रेखा की समीकरण $4x-2y-8=0$ जिसकी प्रवणता m_2 है,

$\therefore$ $$m_2=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=2$$

अतः $$m_1=m_2$$

इस प्रकार दोनों रेखाओं की प्रवणताएँ समान हैं अतः दोनों रेखाएँ समान्तर हैं।

उदाहरण 14: उस सरल रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1,1)$ से होकर जाए और रेखा $3x-4y=7$ के समान्तर हो।

हल : प्रथम विधि : माना कि बिन्दु $(1,1)$ से होकर जाने वाली रेखा की समीकरण है

$$y-1=m(x-1) \tag{1}$$

प्रश्नानुसार दी गयी रेखा है $3x-4y=7$ (2)

इसकी प्रवणता $$m_1=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{y \text{ का गुणांक}}=\frac{3}{4} \tag{3}$$

रेखा (1) एवं (2) समान्तर हैं इसलिए दोनों की प्रवणताएँ समान होंगी

अतः $$m=m_1=3/4$$

m का मान समीकरण (2) में रखने पर, $y-1=(3/4)(x-1)$

या $3x-4y+1=0$ यही अभीष्ट समीकरण है।

द्वितीय विधि : प्रश्नानुसार दी गयी रेखा $3x-4y=7$ के समान्तर रेखा की समीकरण

$$3x-4y=\lambda \quad \text{(जहाँ } \lambda \text{ कोई स्वेच्छ अचर है)} \qquad (1)$$

यह रेखा बिन्दु $(1,1)$ से गुजरती है। अतः $x=1$, $y=1$ समीकरण में रखने पर संतुष्ट करेगी

$$3\times1-4\times1=\lambda \ \Rightarrow \ \lambda=-1$$

समीकरण (1) में $\lambda=-1$ रखने पर, $3x-4y+1=0$

यही अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

उदाहरण 15: उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1,2)$ से गुजरती है तथा बिन्दु $(4,-3)$ और $(2,5)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

हल : बिन्दु $(1,2)$ से गुजरने वाली रेखा की समीकरण जिसकी प्रवणता m है।

$$y-2=m(x-1) \qquad (1)$$

दिये हुए दो बिन्दु $(4,-3)$ ओर $(2,5)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-(-3)}{2-4}=-4$$

रेखा (1) दिए गए दो बिन्दुओं $(4,-3)$ और $(2,5)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर होगी यदि

$$m=m_1 \qquad \therefore \qquad m=-4$$

m का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$y-2=-4(x-1)$$

या $\qquad 4x+y-6=0$, अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

उदाहरण 16: बिन्दु $(3,-4)$ से गुजरने वाली x-अक्ष के समान्तर रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : प्रथम विधि : दिये हुए बिन्दु $(3,-4)$ से गुजरने वाली रेखा की समीकरण, सूत्र $y-y_1=m(x-x_1)$ से (यहाँ $x_1=3$, $y_1=-4$)

$$y-(-4)=m(x-3) \ (m=\tan\theta = \text{रेखा की प्रवणता है।})$$

या
$$y+4=m(x-3) \qquad (1)$$

हम जानते है कि x-अक्ष की प्रवणता $m=\tan 0=0$

(क्योंकि x-अक्ष, x-अक्ष के साथ $0°$ का कोण बनाती है)

समीकरण (1) में m का मान रखने पर अभीष्ट समीकरण प्राप्त होगा

$$y+4=0(x-3) \qquad y+4=0 \ \Rightarrow \ y=-4$$

द्वितीय विधि : हमें ज्ञात है कि x-अक्ष के समानतर c दूरी पर स्थित किसी सरल रेखा की समीकरण है

$$y=c \qquad (1)$$

यह रेखा बिन्दु $(3,-4)$ से गुजरती है, तब बिन्दु $(3,-4)$ को संतुष्ट करेगी

अतः $-4=c$, c का यह मान समीकरण (1) में रखने पर अभीष्ट रेखा का समीकरण $y=-4$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 17: सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $2x-y+9=0$ तथा $x+2y-7=0$ एक दूसरे पर लम्बवत् हैं।

हल: प्रथम दी गयी रेखा का समीकरण $2x-y+9=0$ इसकी प्रवणता

$$m_1=-\frac{x \text{ का गुणाँक}}{y \text{ का गुणाँक}}=-\frac{2}{(-1)}=2 \qquad (1)$$

इसी प्रकार द्वितीय रेखा की समीकरण $x+2y-7=0$ इसकी प्रवणता, m_2 हो, तब

$$m_2=-\frac{x \text{ का गुणाँक}}{y \text{ का गुणाँक}}=-\frac{1}{2} \qquad (2)$$

हम जानते है कि यदि दो रेखाओं की प्रवणताएँ m_1 तथा m_2 हो और वे परस्पर लम्बवत् हो तो उनकी प्रवणताओं का गुणनफल सदैव -1 होता है

अर्थात् $m_1 m_2 = -1$, m_1 तथा m_2 के मान रेखने पर

$$2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad = -1 = -1$$

अतः दोनों रेखाएँ लम्बवत् हैं।

उदाहरण 18: उस रेखा की समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3,2)$ से गुजरती है तथा रेखा $y = x$ के लम्बवत् है।

हल : प्रथम विधि : दिये हुए बिन्दु $(3,2)$ से गुजरने वाली रेखा की समीकरण, जिसकी प्रवणता m है,

$y - y_1 = m(x - x_1)$, यहाँ $x_1 = 3, y_1 = 2$

$$y - 2 = m(x - 3) \qquad (1)$$

दी गयी रेखा की $y = x$ अर्थात् $x - y = 0$ की प्रवणता

$$m_1 = -\frac{x \text{ का गुणाँक}}{y \text{ का गुणाँक}} = -\frac{1}{-1} \quad \text{अतः} \quad m_1 = 1$$

रेखा $x - y = 0$ की लम्ब रेखा की प्रवणता $m = -\frac{1}{m_1} \Rightarrow m = -\frac{1}{1} = -1$

समीकरण (1) में $m = -1$ रखने पर अभीष्ट समीकरण है

$y - 2 = -1(x - 3)$ अतः $x + y - 5 = 0$

द्वितीय विधि : दी गयी रेखा $y = x$ अर्थात् $x - y = 0$ के लम्बवत् किसी रेखा की समीकरण

$$x + y = \lambda \quad (\text{यहाँ } \lambda \text{ स्वेच्छ है}) \qquad (1)$$

यह रेखा बिन्दु $(3,2)$ से गुजरती है अतः दिये बिन्दु के निर्देशांक समीकरण (1) को संतुष्ट करेगे। अतः $3 + 2 = \lambda \Rightarrow \lambda = 5$

λ का मान समीकरण (1) में रखने पर अभीष्ट रेखा की समीकरण

$x + y = 5$ या $x + y - 5 = 0$

उदाहरण 19: उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,1)$ तथा $(4,3)$ के मिलाने वाली रेखा का लम्ब अर्धक है।

हल : बिन्दुओं $(2,1)$ तथा $(4,3)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{4 - 2} = 1$$

अब बिन्दुओं $(2, 1)$ तथा $(4, 3)$ को मिलाने वाली रेखा के लम्ब रेखा की प्रवणता $m = -\frac{1}{m_1} = -1$

दिये हुए बिन्दुओं $(2,1)$ तथा $(4,3)$ का मध्य बिन्दु (x_1, y_1) हो तब

$x_1 = \frac{2+4}{2}$, $y_1 = \frac{1+3}{2}$ से $x_1 = 3, y_1 = 2$

अतः बिन्दु $(3,2)$ से गुजरने वाली रेखा जिसकी प्रवणता -1 है, की समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$ से $y - 2 = -1(x - 3)$ या $x + y - 5 = 0$

यही दिए गए बिन्दुओं से बनी रेखा के लम्ब अर्धक का समीकरण है।

उदाहरण 20: उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,3)$ से गुजरती है और रेखा $3x+y=5$ के साथ $45°$ का कोण बनाती है।

हल : $\because$ एक दिये हुए बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली तथा एक दी गई रेखा $y=mx+c$ के साथ दिया गया कोण α बनाने वाली रेखाओं की समीकरण

$$y-y_1=\frac{m+\tan\alpha}{1-m\tan\alpha}(x-x_1) \qquad (1)$$

तथा
$$y-y_1=\frac{m-\tan\alpha}{1+m\tan\alpha}(x-x_1) \qquad (2)$$

प्रश्नानुसार यहाँ $(x_1, y_1)=(2,3), \alpha=45^o, \therefore \tan\alpha=\tan 45^o=1$ तथा m, रेखा $3x+y=5$ की प्रवणता है

$$\therefore \qquad m=-\frac{x \text{ का गुणाँक}}{y \text{ का गुणाँक}}=-\frac{3}{1}=-3$$

इनके मान समीकरण (1) एवं (2) में रखने पर अभीष्ट रेखाओं के समीकरण

$$x+2y-8=0 \qquad (3)$$

तथा
$$2x-y-1=0 \qquad (4)$$

अतः अभीष्ट समीकरण $x+2y-8=0$ तथा $2x-y-1=0$ है।

उदाहरण 21: सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं $(c\cos\alpha, c\sin\alpha)$ और $(c\cos\beta, c\sin\beta)$ को मिलाने वाली रेखा पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब इनके मध्य की दूरी को समद्विभाजित करता है।

हल : यह सिद्ध करना पर्याप्त है कि बिन्दुओं $(c\cos\alpha, c\sin\alpha)$ और $(c\cos\beta, c\sin\beta)$ को मिलाने वाली तथा मूल बिन्दु और इन बिन्दुओं के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखाएँ परस्पर लम्बवत् है।

बिन्दुओं $(c\cos\alpha, c\sin\alpha)$ और $(c\cos\beta, c\sin\beta)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{c\sin\alpha-c\sin\beta}{c\cos\alpha-c\cos\beta}=\frac{(\sin\alpha-\sin\beta)}{(\cos\alpha-\cos\beta)} \qquad (1)$$

दिये हुए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक है

$$\left(\frac{c\cos\alpha+c\cos\beta}{2}, \frac{c\sin\alpha+c\sin\beta}{2}\right)$$

मूल बिन्दु $(0,0)$ और उपर्युक्त बिन्दु को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{c\sin\alpha+c\sin\beta}{2}-0}{\frac{c\cos\alpha+c\cos\beta}{2}-0}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} \qquad (2)$$

अब
$$m_1m_2=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}\times\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=-\frac{(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)}{(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)}=-1$$

अतः m_1 तथा m_2 प्रवणता वाली रेखाएं परस्पर लम्बवत् है। अतः दिए गए बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब इसे समद्विभाजित करता है।

प्रश्नमाला 11.3

1. निम्नलिखित सरल रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात कीजिए।

   (i) $y=\left(2-\sqrt{3}\right)x+5$ तथा $y=\left(2+\sqrt{3}\right)x-7$

   (ii) $2y-3x+5=0$ तथा $4x+5y+8=0$

   (iii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ तथा $\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=1$

2. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित सरल रेखाएँ समान्तर है।

   (i) $2y=mx+c$ तथा $4y=2mx$

   (ii) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ तथा $x+y\tan\alpha=5\tan\alpha$

3. सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ जिनके समीकरण $4x+5y+7=0$ तथा $5x-4y-11=0$ है परस्पर लम्बवत् हैं।

4. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो

   (i) बिन्दु $(4,5)$ से गुजरती है तथा $2x-3y-5=0$ रेखा के समान्तर है।

   (ii) बिन्दु $(1,2)$ से गुजरती है तथा रेखा $4x+3y+8=0$ के लम्बवत् है।

   (iii) रेखा $2x+5y=7$ के समान्तर है तथा बिन्दुओं $(2,7)$ तथा $(-4,1)$ को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु से होकर जाती है।

   (iv) बिन्दुओं $(-3,7)$ तथा $(5,-4)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को $4:7$ के अनुपात में विभाजित करती है तथा इस पर लम्ब है।

5. एक त्रिभुज के शीर्ष $(0,0),(4,-6)$ और $(1,-3)$ हैं, इन बिन्दुओं से त्रिभुज की सम्मुख भुजाओं पर डाले गए लम्बों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. उस त्रिभुज का लम्ब केन्द्र ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(2,0),(3,4)$ और $(0,3)$ हैं।

7. किसी त्रिभुज के दो शीर्ष $(3,-1)$ तथा $(-2,3)$ है। त्रिभुज का लम्ब केन्द्र मूल बिन्दु पर है। तीसरे शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

8. बिन्दुओं $(2,-3)$ तथा $(-1,5)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड के लम्ब अर्द्धक का समीकरण ज्ञात कीजिए।

9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सरल रेखा $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ पर,, उस बिन्दु से जहाँ वह $x-$ अक्ष से मिलती है, लम्ब है।

10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $2x+3y+11=0$ के समान्तर है तथा अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्डों का योग 15 है।

11. उन सरल रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,-3)$ से गुजरती हैं तथा सरल रेखा $3x-2y=4$ से 45^o का कोण बनाती है।

12. उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4,5)$ से गुजरती है तथा रेखाओं $3x=4y+7$ और $5y=12x+6$ से समान कोण बनाती है।

13. सिद्ध कीजिए कि उस रेखा का समीकरण निम्नलिखित होगा जो मूल बिन्दु से होकर गुजरती है तथा रेखा $y=mx+c$ के साथ θ कोण बनाती है

$$\frac{y}{x}=\frac{m+\tan\theta}{1-m\tan\theta}$$

14. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ से गुजरने वाली तथा सरल रेखा $x\sec\theta + y\operatorname{cosec}\theta = a$ पर लम्ब सरल रेखा का समीकरण $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ है।

15. एक समबाहु त्रिभुज के एक शीर्ष के निर्देशांक $(2,3)$ है तथा सम्मुख भुजा का समीकरण $x + y = 2$ है। शेष भुजाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

16. उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3,-2)$ से गुजरती है तथा रेखा $x+\sqrt{3}y=1$ से $60°$ का कोण बनाती है।

विविध प्रश्नमाला–11

1. उस सरल रेखा का समीकरण जो y-अक्ष के समान्तर तथा y-अक्ष के बायीं ओर 5 इकाई की दूरी पर है

(A) $y=5$ (B) $x=5$
(C) $x=-5$ (D) $y=-5$

2. उस रेखा का समीकरण जो बिन्दु $(3,-4)$ से होकर गुजरती है तथा x-अक्ष के समान्तर है :

(A) $x=3$ (B) $y=-4$
(C) $x+3=0$ (D) $y-4=0$

3. y-अक्ष की प्रवणता है :

(A) 1 (B) 0
(C) ∞ (D) $\pi/2$

4. समीकरण $x\times\frac{1}{2}+y\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5$ द्वारा निरूपित सरल रेखा निम्न रूप में है :

(A) सममित रूप (B) झुकाव रूप
(C) अन्तःखण्ड रूप (D) लम्ब रूप

5. सरल रेखा $3x-4y=7$ के समान्तर और मूल बिन्दु से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है :

(A) $3x-4y=1$ (B) $3x-4y=0$
(C) $4x-3y=1$ (D) $3y-4x=0$

6. मूल बिन्दु से सरल रेखा $x+\sqrt{3}y=1$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई p है तो p का मान है :

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1

7. यदि रेखाएँ $y=mx+5$ तथा $3x+5y=8$ परस्पर लम्ब हैं तो m का मान है :

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{5}{3}$
(C) $-\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$

8. सरल रेखा $3x-4y+7=0$ पर लम्ब और बिन्दु $(1,-2)$ में से गुजरने वाली रेखा का समीकरण होगा :

(A) $4x+3y-2=0$ (B) $4x+3y+2=0$
(C) $4x-3y+2=0$ (D) $4x-3y-2=0$

9. रेखाओं $y=-2$ तथा $y=x+2$ के मध्य का अधिक कोण है।

(A) 145^o (B) 150^o
(C) 135^o (D) 120^o

10. रेखा $3x-4y-4=0$ द्वारा x-अक्ष तथा y-अक्ष पर काटे गये अन्तःखण्डों की लम्बाई है

(A) $\frac{4}{3}$ और -1 (B) $\frac{4}{3}$ और 1

(C) $\frac{3}{4}$ और -1 (D) $\frac{3}{4}$ और 1

11. बिन्दु $(1,0)$ तथा $(-2,\sqrt{3})$ को मिलाने वाली रेखा x-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है तो $\tan\theta$ का मान है :

(A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{1}{-\sqrt{3}}$

12. रेखा के समीकरण $2x+\sqrt{3}y-4=0$ को झुकाव रूप में बदलने पर झुकाव रूप में प्रयुक्त अचर राशि के मान है :

(A) $m=2, c=4$ (B) $m=\frac{2}{\sqrt{3}}, c=-\frac{4}{\sqrt{3}}$

(C) $m=\frac{\sqrt{3}}{2}, c=2$ (D) $m=\frac{-2}{\sqrt{3}}, c=\frac{4}{\sqrt{3}}$

13. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2,3)$ से गुजरती है तथा x – अक्ष से $45°$ का कोण बनाती है।

14. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-3,2)$ से गुजरती है तथा अक्षों से बराबर तथा विपरीत चिह्नों वाले अन्तःखण्ड काटती है।

15. यदि मूल बिन्दु से सरल रेखा $4x+3y+a=0$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई 2 हो तो a का मान ज्ञात कीजिए।

16. यदि किसी रेखा का अक्षों के मध्य का अन्तःखण्ड बिन्दु $(5,2)$ पर समद्विभाजित होता है, तो रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(0,1)$ से होकर जाती है तथा रेखा द्वारा x-अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड y-अक्ष पर काटे गए अन्तःखण्ड का तिगुना हो।

18. सरल रेखाएँ $y=2m+c$ एवं $2x-y+5=0$ परम्पर समान्तर एवं लम्बवत् हों तो m के मान ज्ञात कीजिए।

19. मूल बिन्दु से रेखा $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=4$ पर डाले गये लम्ब की लम्बाई p हो तो सिद्ध कीजिए $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. x एवं y एक घातीय समीकरण सदैव सरल रेखा को प्रदर्शित करता है।
2. सरल रेखा का व्यापक समीकरण $ax+by+c=0$ होता है।
3. यदि कोई सरल रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है तो उसके समीकरण में अचर पद c शून्य होता है अर्थात् व्यापक समीकरण $ax+by=0$ होता है।
4. x–अक्ष का समीकरण $y=0$ होता है।
5. y–अक्ष का समीकरण $x=0$ होता है।
6. x–अक्ष के समान्तर तथा b दूरी पर स्थित रेखा का समीकरण $y=\pm b$ होता है।
7. y–अक्ष के समान्तर तथा a दूरी पर स्थित रेखा का समीकरण $x=\pm a$ होता है।
8. रेखा की प्रवणता यदि रेखा x–अक्ष की धनात्मक दिशा से θ कोण बनाती है, तो उसकी प्रवणता $m=\tan\theta$ होगी।
9. झुकाव रूप में रेखा का समीकरण $y=mx+c$ है जहाँ m रेखा की प्रवणता तथा c, y – अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड है।

10. अन्तःखण्ड के रूप में रेखा का समीकरण $x/a+y/b=1$ है जहाँ a तथा b रेखा द्वारा क्रमशः x–अक्ष तथा y–अक्ष पर काटे गये अन्तःखण्ड है।

11. लम्ब रूप में रेखा का समीकरण $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ है। जहाँ p रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गए लम्ब की लम्बाई है तथा यह लम्ब x–अक्ष से α कोण बनाता है।

12. एक बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $y-y_1=m(x-x_1)$ है जहाँ m रेखा की प्रवणता है।

13. दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ है।

14. दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\text{कोटियों का अन्तर}}{\text{भुजों का अन्तर}}$$

15. दो रेखाओं $y=m_1x+c_1$ तथा $y=m_2x+c_2$ के मध्य का कोण θ हो] तो $\tan\theta=\pm\left[\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right]$ होगा। यदि रेखाएँ समान्तर है तो $m_1=m_2$ तथा लम्ब हो तो $m_1m_2=-1$ अर्थात् $m_1=\dfrac{-1}{m_2}$ एवं दोनों रेखाएँ संपाती होंगी यदि $m_1=m_2$ तथा $c_1=c_2$.

16. प्रायः दो रेखाओं के मध्य का कोण ज्ञात करते समय उनके मध्य का न्यूनकोण ज्ञात करते हैं। जिसके लिए $\tan\theta$ का चिह्न धनात्मक लेते है।

17. दो रेखाओं के समीकरण $a_1x+b_1y+c_1=0$ एवं $a_2x+b_2y+c_2=0$ में से एक रेखा $y-$अक्ष के समान्तर हो तो उनके मध्य कोण ज्ञात करने हेतु उक्त सूत्र का प्रयोग नहीं करते क्योंकि इस स्थिति में $\tan\theta$ का मान अनिर्धार्य होता है। इस स्थिति में रेखाओं के मध्य का कोण $\tan\theta=\pm\left(\dfrac{b_1}{a_1}\right)$ से ज्ञात करते हैं।

18. रेखा $ax+by+c_1=0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $ax+by+c_2=0$ होता है जहाँ c_2 अचर पद है जिसका मान प्रश्न में दी गई अन्य शर्त के अनुसार ज्ञात करते हैं।

19. रेखा $ax+by+c_1=0$ के लम्बवत् रेखा का समीकरण $bx-ay+c_2=0$ जहाँ c_2 अचर पद है जिसका मान प्रश्न में दी गई अन्य शर्त के अनुसार ज्ञात करते हैं।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 11.1

1. (i) $y=5$ (ii) $y+3=0$ 2. (i) $y=a+b$ (ii) $y=a^2-b^2$ (iii) $y=b\cos\theta$

3. (i) $x=5$ (ii) $x+3=0$ (iii) $5x-2=0$

4. (i) $x=\sqrt{7}$ (ii) $x=2-\sqrt{3}$ (iii) $x=p+q$

5. $x+3=0,\ \ y=2$ 6. $y=4, x=3, y=12$ और $y+4=0, x=11$ तथा $x+5=0$

7. $(4,3),(-4,3),(-4,-3),(4,-3)$ क्षेत्रफल = 48 वर्ग इकाई

8. (i) $x-y=0$ (ii) $x-\sqrt{3}y=0$ (iii) $x-y+5=0$

9. (i) $3x+5y-15=0$ (ii) $3x-2y+6=0$

10. $x+y=5$ 11. $x+2y=5$ 12. $5x+3y+30=0$ 13. $3x+2y-6=0, x-2y-10=0$

15. (i) $3x+5y-15=0$ (ii) $3x+5y+15=0$ (iii) $3x-4y-15=0$

16. $x-\sqrt{3}y+4=0$ 17. $2,(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 18. $\sqrt{3}x+y=6, \sqrt{3}x-y=6$

प्रश्नमाला 11.2

1. (i) $m=\dfrac{7}{13}$, $c=-\dfrac{15}{13}$, $a=\dfrac{15}{7}$, $b=-\dfrac{15}{13}$

(ii) $m=-\dfrac{5}{6}$, $c=-\dfrac{4}{3}$, $a=\dfrac{-8}{5}$, $b=-\dfrac{4}{3}$

2. $-\cot\alpha$ 3. (i) $\tan 60°$ (ii) $\tan 150°$

5. $\dfrac{5}{2};\left(1,\dfrac{3}{4}\right)$ 6. $a=-\dfrac{1}{4}, b=\dfrac{1}{5}$

7. (i) $x\cos 225°+y\sin 225°=1$ (ii) $x\cos 150°+y\sin 150°=1$

8. $\dfrac{11}{5},-\dfrac{4}{3}$

9. $a=\dfrac{5}{2} b=-\dfrac{5}{3}$ 10. झुकाव कोण $=90+2$, अन्तः खण्ड $=p\cot 2$

11. $x-y+1=0$

12. (i) $y-x=1$ (ii) $ax-by=ab$ (iii) $(a-2b)x-by+b^2+2ab-a^2=0$

(iv) $t_1t_2y+x=a(t_1+t_2)$ (v) $bx\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-ay\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=ab\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

प्रश्नमाला 11.3

1. (i) 120^o या 60^o (ii) $\tan^{-1}\left(-\frac{23}{2}\right)$ (iii) $90°$

4. (i) $2x-3y+7=0$ (ii) $3x-4y+5=0$ (iii) $2x+5y=18$ (iv) $88x-121y+371=0$

5. $y-x=0,\ x-3y=22,\ 2x-3y=11$ 6. $\left(\frac{12}{11},-\frac{30}{11}\right)$ 7. $\left(-\frac{36}{7},-\frac{45}{7}\right)$

8. $6x-16y+13=0$ 9. $ax+by=a^2$ 10. $2x+3y-18=0$

11. $y+5x-7=0$ तथा $5y-x+17=0$ 12. $9x-7y=1$ तथा $7x+9y=73$

15. $\left(2+\sqrt{3}\right)x-y=1+2\sqrt{3}$ तथा $\left(2-\sqrt{3}\right)x-y=1-2\sqrt{3}$

16. $x-\sqrt{3}y-3-2\sqrt{3}=0$ तथा $x-3=0$

विविध प्रश्नमाला

1. C	2. B	3. C	4. D	5. B	6. B	7. A
8. B	9. C	10. A	11. D	12. D	13. $x-y+1=0$	

14. $x-y+5=0$ 15. 10 16. $2x+5y=20$ 17. $x+3y=3$. 18. $1,\ -\frac{1}{4}$

12

शांकव परिच्छेद
(Conic section)

12.01 प्रस्तावना (Introduction):

एक द्विशंकु को एक समतल द्वारा अक्ष के साथ भिन्न–भिन्न कोण से काटने पर प्राप्त परिच्छेद **शांकव परिच्छेद** कहलाते हैं।

मानलो द्विशंकु का शीर्ष O, अक्ष AOA' तथा अर्द्धशीर्ष कोण α है। यदि एक समतल P द्विशंकु के अक्ष AOA' को θ कोण पर काटता है तो प्रतिच्छेद वक्रों का वर्गीकरण निम्न प्रकार से होगा।

स्थिति I: यदि समतल P, शंकु के शीर्ष O से गुजरता हो तो प्रतिच्छेदन शीर्ष से गुजरने वाली एक सरल रेखा युग्म होती है। चित्र 12.01 (a) ये रेखाएँ

(i) वास्तविक तथा भिन्न होगी, यदि $\theta < \alpha$ हो।

(ii) सम्पाती होगी, यदि $\theta = \alpha$ हो।

(iii) काल्पनिक होगी, यदि $\theta > \alpha$ हो।

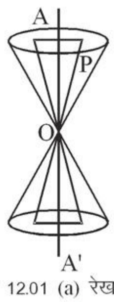
स्थिति II: यदि समतल P, शंकु के शीर्ष O से नहीं गुजरता हो तो प्रतिच्छेदन एक वक्र होगा तथा यह वक्र

(i) एक वृत्त होगा, यदि $\theta = 90^\circ$ हो अर्थात् समतल P, शंकु के अक्ष AOA' को लम्बवत् काटे। इस वृत्त का केन्द्र अक्ष AOA' पर होगा। (चित्र 12.01 (b))

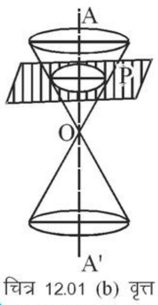
(ii) एक परवलय होगा, यदि $\theta = \alpha$ हो अर्थात् समतल P शंकु की जनक रेखा OG के समान्तर हो। परवलय की अक्ष जनक रेखा के समान्तर होगी। (चित्र 12.02)

(iii) एक दीर्घवृत्त होगा, यदि $\theta > \alpha$ हो अर्थात् समतल P शंकु के दोनों जनक रेखाओं को काटे। (चित्र 12.03)

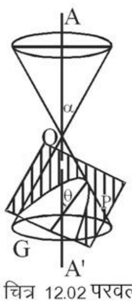
(iv) एक अतिपरवलय होगा, यदि $\theta < \alpha$ हो अर्थात् समतल P दोनों शंकुओं को काटे। (चित्र 12.04)



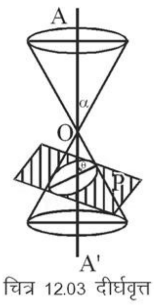
चित्र 12.01 (a) रेखायुग्म



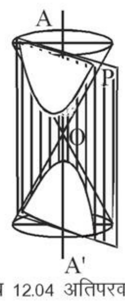
चित्र 12.01 (b) वृत्त



चित्र 12.02 परवलय



चित्र 12.03 दीर्घवृत्त



चित्र 12.04 अतिपरवलय

12.02 शांकव परिच्छेद (Conic sections)

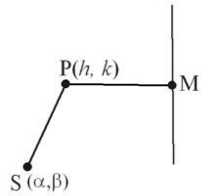
परिभाषा: एक गतिशील बिन्दु P का बिन्दुपथ जो एक समतल में इस प्रकार गमन करता है कि उसकी उसी समतल में स्थित स्थिर बिन्दु S तथा एक स्थिर रेखा से दूरियों का अनुपात सदैव अचर रहता है, **शांकव परिच्छेद** कहलाता है।

स्थिर बिन्दु S तथा स्थिर रेखा को शांकव परिच्छेद की क्रमशः **नाभि** एवं **नियता** कहते हैं तथा अचर अनुपात **उत्केन्द्रता** कहलाती है जिसे e से निरूपित किया जाता है। नाभि से गुजरने वाली तथा नियता के लम्बवत् रेखा शांकव परिच्छेद की **अक्ष** कहलाती है।

शांकव **परिच्छेद** तथा इसके अक्ष का प्रतिच्छेदन बिन्दु शीर्ष कहलाता है। शांकव पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उसकी जीवा कहलाती है। शांकव **परिच्छेद** की प्रत्येक जीवा एक बिन्दु पर समद्विभाजित होती है वह बिन्दु शांकव **परिच्छेद** का केन्द्र कहलाता है। यह बिन्दु अक्ष पर नाभियों की दूरी का मध्य बिन्दु होता है। अक्ष के लम्बवत् तथा नाभि से गुजरने वाली जीवा शांकव का नाभिलम्ब कहलाता है।

शांकव परिच्छेद का व्यापक समीकरण (General equation of conic section)

मानलो एक समतल में स्थिर बिन्दु S के निर्देशांक (α, β), स्थिर रेखा का समीकरण $ax+by+c=0$ तथा उत्केन्द्रता e है। इस समतल में कोई स्वेच्छ बिन्दु $P(h, k)$ लो। PS को मिलाओं तथा P से नियता पर लम्ब PM डालो। अब शांकव की परिभाषानुसार,



चित्र 12.05

या $\quad \mathrm{SP} = e\,\mathrm{PM} \qquad \dfrac{SP}{PM} = e \qquad$ या $\quad \mathrm{SP}^2 = e^2\mathrm{PM}^2$

या $\quad (h-\alpha)^2 + (k-\beta)^2 = e^2\left\{\dfrac{ah+bk+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}^2$

अंतः बिन्दु P का बिन्दुपथ अर्थात् शांकव परिच्छेद का समीकरण होगा

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

अर्थात् समीकरण को सरल कर व्यापक रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$$

12.03 शांकव परिच्छेद के विभिन्न रूप (Different forms of conic section)

शांकव परिच्छेद, नाभि S की नियता के सापेक्ष स्थिति तथा उत्केन्द्रता e के मान पर निर्भर करते हैं।

I. जब नाभि नियता पर स्थित हो,

शांकव परिच्छेद एक रेखा युग्म को प्रदर्शित करता है, ये रेखाएँ

(i) वास्तविक एवं भिन्न होंगी, यदि $e > 1$ हो।

(ii) वास्तविक एवं संपाती होंगी, यदि $e = 1$ हो।

(iii) काल्पनिक होंगी, यदि $e < 1$ ।

(iv) समान्तर होंगी, यदि नियता अनन्त पर हो।

II. जब नाभि नियता पर स्थित न हो,

उत्केन्द्रता e के विभिन्न मानों के लिए शांकव परिच्छेद

(i) एक वृत्त होगा, यदि $e = 0$ हो।

(ii) एक परवलय होग, यदि $e = 1$ हो।

(iii) एक दीर्घवृत्त होगा, यदि $e < 1$ हो।

(iv) एक अतिपरवलय होगा, यदि $e > 1$ हो।

12.04 सिद्ध कीजिए कि x तथा y में व्यापक द्विघात समीकरण सदैव एक शांकव को निरूपित करता है। (To prove that the general equation of second degree in x and y always represents a conic section)

माना शांकव का व्यापक समीकरण

$$\phi(x, y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

है। xy को विलोपित करने के लिए मूल बिन्दु को स्थिर रखते हुए आयतीय अक्षों को θ कोण पर घुमाते है। इस हेतु समीकरण (1) में x को $(x\cos\theta - y\sin\theta)$ तथा y को $(x\sin\theta + y\cos\theta)$ से प्रतिस्थापित करने पर रूपान्तरित समीकरण

$$a(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + 2h(x\cos\theta - y\sin\theta)(x\sin\theta + y\cos\theta) + b(x\sin\theta + y\cos\theta)^2$$
$$+2g(x\cos\theta - y\sin\theta) + 2f(x\sin\theta + y\cos\theta) + c = 0 \qquad (2)$$

प्राप्त होता है।

अब θ इस प्रकार चुनते है की xy का गुणाँक शून्य हो जाए,

अर्थात् $2(b-a)\sin\theta\cos\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$ या $\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$

अब समीकरण (2) का रूप

$$Ax^2 + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0, \qquad (3)$$

जहाँ A, B, G, F तथा C अचर है, प्राप्त होता है।

स्थिति I: जब $A \neq 0,\ B \neq 0$

समीकरण (3) से

$$A\left(x+\frac{G}{A}\right)^2 + B\left(y+\frac{F}{B}\right)^2 = \frac{G^2}{A} + \frac{F^2}{B} - C = K \text{ (माना)}$$

मूल बिन्दु को $\left(-\frac{G}{A}, -\frac{F}{B}\right)$ पर स्थानान्तरित करने पर

$$Ax^2 + By^2 = K \qquad (4)$$

(i) जब $K = 0,\ \Delta = 0$ अर्थात् $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ तब समीकरण (4) रेखा युग्म को निरूपित करती है जो A तथा B के विपरीत चिह्न के होने पर वास्तविक तथा समान चिह्न होने पर काल्पनिक होगी।

(ii) जब $K \neq 0$, समीकरण (4) से

$$\frac{x^2}{\frac{K}{A}} + \frac{y^2}{\frac{K}{B}} = 1$$

जो K/A तथा K/B के समान चिह्न के होने पर दीर्घवृत्त तथा विपरीत चिह्न के होने पर अतिपिरवलय को निरूपित करती है।

(iii) जब $K \neq 0$, तथा $A = B$ तो समीकरण (4) एक वृत्त को निरूपित करती है।

(iv) जब $K \neq 0$, तथा $A = -B$ तो समीकरण (4) एक आयतीय अतिपरवलय को निरूपित करती है।

स्थिति II: जब A या B में से एक शून्य है (माना B = 0)

समीकरण (4) से

$$A\left(x+\frac{G}{A}\right)^2 = -2Fy + \frac{G^2}{A} - C = -2F\left(y - \frac{G^2 - AC}{2F}\right) \qquad (5)$$

(i) जब F = 0, समीकरण (5) दो समान्तर सरल रेखाओं को निरूपित करेगा एवं यदि $\left(G^2/A\right) - C = 0$ तो ये सरल रेखाएँ संपाती होगी।

(ii) जब $F \neq 0$, समीकरण (5) में मूल बिन्दु को $\left(-\frac{G}{A}, \frac{G^2 - AC}{2F}\right)$ पर स्थानान्तरित करने पर,

$$Ax^2 = -2Fy \quad \text{या} \quad x^2 = -\frac{2F}{A}y \qquad (6)$$

जो कि एक परवलय का समीकरण है।

अर्थात् सभी परिस्थितियों में व्यापक द्विघात समीकरण एक शांकव को निरूपित करती है।

निम्न सारणी में व्यापक द्विघात समीकरण

$$\phi(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

द्वारा निरूपित होने वाले विभिन्न शांकवों के लिए शर्तें दर्शायी गयी है।

भाग सं.	शर्तें	परिच्छेद की प्रकृति
	$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$	
A	$\Delta = 0$ तथा 1. $h^2 \neq ab$ 2. $h^2 = ab$ 3. $a + b = 0$	 रेखा युग्म समान्तर रेखा युग्म लम्बवत रेखा युग्म
B	$\Delta \neq 0$ तथा 1. $a = b,\ h = 0$ 2. $h^2 = ab$ 3. $h^2 < ab$ 4. $h^2 > ab$ 5. $h^2 > ab$ तथा $a + b = 0$	 वृत्त परवलय दीर्घवृत अतिपरवलय आयतीय अतिपरवलय

आगे के अनुच्छेदों में हम प्रमुख शांकवों यथा वृत्त (Circle), परवलय (Parabola), दीर्घवृत्त (Ellipse) तथा अतिपरवलय (Hyperbola) के मानक समीकरण ज्ञात करते हुए उनके प्रमुख गुणों का अध्ययन करेंगे।

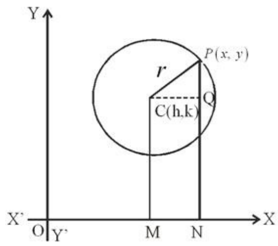
वृत्त (Circle)

12.05 वृत का केन्द्रीय रूप में समीकरण (Equation of the circle in central form)

परिभाषाः किसी दिये हुए समतल में गतिमान ऐसे बिन्दु का बिन्दु पथ जिसकी उसी समतल में स्थित किसी स्थिर बिन्दु से दूरी सदैव समान (अचर) रहे, वृत कहलाता है।

यहाँ स्थिर बिन्दु को वृत का केन्द्र एवं समान (अचर) दूरी को वृत की त्रिज्या कहते है।

माना वृत का केन्द्र $C(h, k)$ है, त्रिज्या r है तथा गतिमान बिन्दु P की किसी स्थिति पर निर्देशांक (x, y) है तो



चित्र 12.06

चित्रानुसार $CQ = ON - OM = x - h$

$$QP = NP - NQ = y - k$$

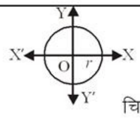
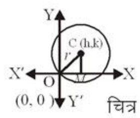
समकोण त्रिभुज CQP में

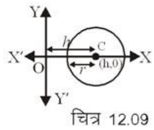
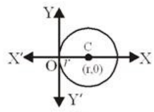
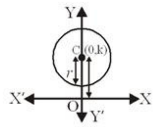
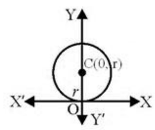
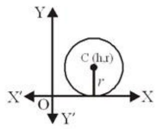
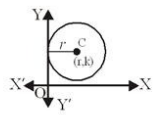
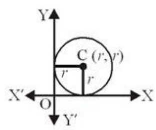
$$CQ^2 + QP^2 = CP^2$$

या $$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

इसे वृत का **केन्द्रीय रूप** भी कहते है।

विशेष स्थितियों में वृत के समीकरणः

क्र.सं.	विभिन्न स्थितियां	वृत का समीकरण	वृत का चित्र
1.	$h = 0,\ k = 0$	$x^2 + y^2 = r^2$ (मानक)	 चित्र 12.07
2.	वृत मूल बिन्दु (0, 0) से गुजरता है तथा केन्द्र प्रथम पाद में हों	$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0$	 चित्र 12.08

3.	$k=0$ तथा $h>r$	$(x-h)^2+y^2=r^2$	 चित्र 12.09
4.	$k=0$ तथा $h=r$	$x^2+y^2-2rx=0$	 चित्र 12.10
5.	$h=0$ तथा $k>r$	$x^2+(y-k)^2=r^2$	 चित्र 12.11
6.	$h=0$ तथा $k=r$	$x^2+y^2-2ry=0$	 चित्र 12.12
7.	वृत x- अक्ष को स्पर्श करता है तथा $k=r$	$x^2+y^2-2hx-2ry+h^2=0$	 चित्र 12.13
8.	वृत y- अक्ष को स्पर्श करता है तथा $h=r$	$x^2+y^2-2rx-2ky+k^2=0$	 चित्र 12.14
9.	$h=k=r$	$x^2+y^2-2rx-2ry+r^2=0$	 चित्र 12.15
10.	$r=0$	$(x-h)^2+(y-k)^2=0$	वृत एक बिन्दु हो जाता है इसे बिन्दु वृत करते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: केन्द्र $(2, -3)$ तथा 4 इकाई त्रिज्या वाले वृत का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $h = 2, k = -3$ तथा $r = 4$, अतः वृत का अभीष्ट समीकरण $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$ है।

उदाहरण 2: वृत $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया समीकरण

$$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8$$

अब कोष्ठकों को पूर्ण वर्ग बनाने पर

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$

$$(x+4)^2 + (y+5)^2 = 49$$

$$\{x-(-4)\}^2 + \{y-(-5)\}^2 = 7^2$$

अतः वृत का केन्द्र $(-4, -5)$ व त्रिज्या 7 इकाई है।

उदाहरण 3: उस वृत का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x- अक्ष को स्पर्श करता है तथा y- अक्ष पर 2ℓ लम्बाई का अन्तःखण्ड काटता है।

हल: वृत के मानक समीकरण में $k = r$ तथा $h = \sqrt{r^2 - \ell^2}$

अतः वृत का समीकरण

$$\left\{x - \sqrt{r^2 - \ell^2}\right\} + (y-r)^2 = r^2$$

या $x^2 + y^2 - 2x\sqrt{r^2 - \ell^2} - 2ry + r^2 - \ell^2 = 0$

उदाहरण 4: उस वृत का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1, 2)$ से गुजरता है तथा जिसका केन्द्र रेखा $x + y + 3 = 0$ एवं $2x + 3y + 7 = 0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

हल : दी गई रेखाएं हैं $\quad x + y + 3 = 0 \qquad (1)$

तथा $\quad 2x + 3y + 7 = 0 \qquad (2)$

इन्हें हल करने पर प्रतिच्छेद बिन्दु $(-2, -1)$ प्राप्त होता है, जो वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक हैं। अब, चूंकि वृत्त बिन्दु $(1, 2)$ से गुजरता है अतः वृत्त के केन्द्र को इस बिन्दु से मिलाने वाली दूरी वृत्त की त्रिज्या होगी, अर्थात्

त्रिज्या $= \sqrt{\{(1+2)^2 + (2+1)^2\}} = \sqrt{(9+9)} = 3\sqrt{2}$

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण होगा

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = (3\sqrt{2})^2$$

या $\quad x^2 + y^2 + 4x + 2y - 13 = 0$

प्रश्नमाला 12.1

1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका
   (i) केन्द्र $(-2,3)$ तथा त्रिज्या 4 हो। (ii) केन्द्र (a, b) तथा त्रिज्या $a - b$ हो।
2. निम्न वृत्तों के केन्द्र के निर्देशांक तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
   (i) $x(x+y-6) = y(x-y+8)$ (ii) $\sqrt{1+k^2}\left(x^2+y^2\right) = 2ax + 2aky$ (iii) $4\left(x^2+y^2\right) = 1$
3. उस वृत का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y- अक्ष को स्पर्श करे तथा x- अक्ष पर 2ℓ लम्बाई का अन्तःखण्ड काटे।
4. उस वृत का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो x- अक्ष को मूल बिन्दु से +3 दूरी पर स्पर्श करता है तथा y- अक्ष पर 6 इकाई लम्बाई का अन्त खण्ड काटता है।

5. वृत $x^2+y^2-8x+10y-12=0$ का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. वृत $2x^2+2y^2-x=0$ का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

7. बिन्दुओं (2, 3) और (–1, 1) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखा $x-3y-11=0$ पर स्थित है।

8. त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र x-अक्ष पर हो और जो बिन्दु (2, 3) से जाता है।

9. (0, 0) से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों पर a और b अंतःखण्ड बनाता है।

12.06 वृत्त एवं सरल रेखा का प्रतिच्छेदन (Intersection of a circle and a line)

माना कि वृत्त $\qquad x^2+y^2=a^2 \qquad (1)$

को सरल रेखा $\qquad y=mx+c \qquad (2)$

प्रतिच्छेदित करती है।

समीकरण (1) एवं (2) को हल करने पर हमें प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक प्राप्त होंगे। इसके लिए समीकरण (2) से y का मान (1) में रखने पर

$$x^2+(mx+c)^2=a^2$$

या $$(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0 \qquad (3)$$

समीकरण (3), x में एक द्विघात समीकरण है। अतः इसे हल करने पर हमें x के दो मान प्राप्त होंगे जो कि प्रतिच्छेद बिन्दुओं के भुजांक होंगे। x के मानों को समीकरण (2) में रखने पर हमें y के संगत दो मान प्राप्त होंगे जो कि प्रतिच्छेद बिन्दुओं की कोटि होगी। अतः हम कह सकते है कि एक सरल रेखा दिये गए वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।

प्रतिच्छेद बिन्दुओं की प्रकृति (Nature of Points of intersection)

प्रतिच्छेद बिन्दु वास्तविक एवं भिन्न, सम्पाती अथवा काल्पनिक होंगे यदि द्विघात समीकरण (3) के मूल वास्तविक एवं भिन्न, सम्पाती अथवा काल्पनिक हों इसके लिये निम्न तीन स्थितियाँ सम्भव हैं:

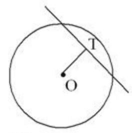
स्थिति–I जब प्रतिच्छेद बिन्दु वास्तविक एवं भिन्न हों :

इस स्थिति में, द्विघात समीकरण (3) के मूल वास्तविक एवं भिन्न होंगें जिसके लिये विविक्तिकर $B^2-4AC>0$

या $$4m^2c^2-4(1+m^2)(c^2-a^2)>0$$

या $$a^2(1+m^2)-c^2>0$$

या $$a^2>\frac{c^2}{1+m^2} \quad \text{फलतः} \quad a>\left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right|$$



चित्र 12.16

इस प्रतिबन्ध से स्पष्ट है कि एक सरल रेखा दिए गए वृत्त को दो भिन्न–भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करेगी यदि वृत्त के केन्द्र से सरल रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई, वृत्त की त्रिज्या से कम हो।

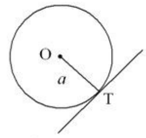
स्थिति–II जब प्रतिच्छेद बिन्दु सम्पाती हों :

इस स्थिति में स्पष्ट है कि द्विघात समीकरण (3) के दोनों मूल समान हो, अर्थात् विविक्तिकर

$$B^2-4AC=0$$

या $$4m^2c^2-4(1+m^2)(c^2-a^2)=0$$

या $$a^2=\frac{c^2}{1+m^2} \quad \text{फलत्} \quad a=\left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right|$$



चित्र 12.17

इस प्रतिबन्ध से स्पष्ट है कि एक सरल रेखा दिये गए वृत्त को स्पर्श करेगी यदि वृत्त के केन्द्र से सरल रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर हो।

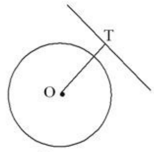
स्थिति–III जब प्रतिच्छेद बिन्दु काल्पनिक हों :

इस स्थिति में, स्पष्ट है कि द्विघात समीकरण (3) के दोनों मूल काल्पनिक होंगे अर्थात् विविक्तिकर

$$B^2 - 4AC < 0$$

या $$4m^2c^2 - 4(1+m^2)(c^2 - a^2) < 0$$

या $$a^2 < \frac{c^2}{1+m^2} \text{ फलत् } a < \left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right|$$



चित्र 12.18

इस प्रतिबन्ध से स्पष्ट है कि एक सरल रेखा दिए गए वृत्त को प्रतिच्छेद नहीं करेगी यदि वृत्त के केन्द्र से सरल रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या से अधिक हो।

12.07 वृत्त द्वारा रेखा पर काटे गये अन्तःखण्ड की लम्बाई

(Length of intercept cut off from a line by a circle)

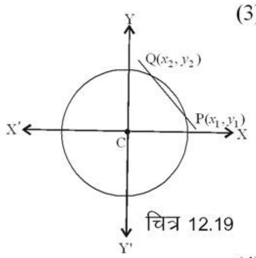
वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ द्वारा रेखा $y = mx + c$ पर काटे गये अन्तःखण्ड की लम्बाई ज्ञात करना

दिया गया वृत्त $$x^2 + y^2 = a^2 \quad (1)$$

तथा सरल रेखा $$y = mx + c \quad (2)$$

चित्र 12.19 के अनुसार माना (1) एवं (2) के प्रतिच्छेद बिन्दुओं P एवं Q के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) है। तब हमें अन्तःखण्ड PQ की लम्बाई ज्ञात करनी है। अतः

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (3)$$



चित्र 12.19

चूँकि P तथा Q रेखा (2) पर स्थित है अतः

$$y_1 = mx_1 + c$$

तथा $$y_2 = mx_2 + c$$

घटाने पर, $$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$$

अतः (3) से, $$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2}$$

$$= (x_1 - x_2)\sqrt{1+m^2} \quad (4)$$

अब (1) एवं (2) को x में हल करने पर]

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$$

या $$(1+m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0 \quad (5)$$

यह x में द्विघात समीकरण है, अतः x के दो मान होंगे] माना ये मान x_1 तथा x_2 है तब,

$$x_1 + x_2 = -\frac{2mc}{1+m^2} \quad \text{तथा} \quad x_1x_2 = \frac{c^2 - a^2}{1+m^2}$$

परन्तु $$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

मान रखने पर] $$(x_1 - x_2)^2 = \frac{4m^2c^2}{(1+m^2)^2} - 4\frac{(c^2 - a^2)}{1+m^2}$$

अतः $$x_1 - x_2 = \frac{2}{1+m^2}\sqrt{a^2(1+m^2) - c^2}$$

अब, (4) में यह मान रखने पर

$$PQ=\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\sqrt{a^2\left(1+m^2\right)-c^2}$$

$$PQ=2\sqrt{a^2-\frac{c^2}{1+m^2}} \qquad (6)$$

जो कि अभीष्ट अन्तःखण्ड PQ की लम्बाई दर्शाता है।

स्पर्शता का प्रतिबन्ध (Condition of tangency):

रेखा $y=mx+c$ द्वारा वृत्त $x^2+y^2=a^2$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात करना।

प्रथम विधि : यदि रेखा $y=mx+c$, वृत्त $x^2+y^2=a^2$ को स्पर्श करे तो वृत्त द्वारा रेखा पर काटे गये अन्तःखण्ड की लम्बाई शून्य होगी, फलत् $PQ=0$

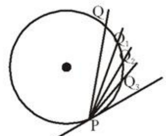
या $$\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\sqrt{a^2\left(1+m^2\right)-c^2}=0$$

या $$a^2\left(1+m^2\right)=c^2$$

या $$c=\pm a\sqrt{1+m^2}$$

जो कि अभीष्ट स्पर्शता का प्रतिबन्ध है।

12.08 स्पर्श रेखा (Tangent)

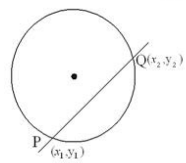


चित्र 12.20

परिभाषा : चित्र 12.20 के अनुसार यदि वृत्त की छेदक रेखा PQ इस प्रकार गमन करे कि बिन्दु Q वृत्त के अनुदिश गमन करता हुआ बिन्दु P के सम्पाती हो जाए तो छेदक रेखा PQ, वृत्त के बिन्दु P पर **स्पर्श रेखा** PT कहलाती है तथा बिन्दु P को इस स्पर्श रेखा का **स्पर्श बिन्दु** कहते है।

वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

दिया गया वृत्त है $x^2+y^2=a^2$ (1)



चित्र 12.21

माना इस वृत्त पर कोई बिन्दु $P(x_1, y_1)$ है जहां हमें स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करना है। यदि वृत्त (1) पर कोई दूसरा बिन्दु $Q(x_2, y_2)$ लें तो जीवा PQ का समीकरण होगा

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad (2)$$

परन्तु बिन्दु P एवं Q वृत्त पर स्थित है

अतः $$x_1^2+y_1^2=a^2 \qquad (3)$$

तथा $$x_2^2+y_2^2=a^2 \qquad (4)$$

(4) में से (3) को घटाने पर

$$(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)=0$$

या $$(x_2-x_1)(x_2+x_1)=-(y_2-y_1)(y_2+y_1)$$

या $$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1} \qquad (5)$$

यह मान (2) में रखने पर $$y-y_1=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}(x-x_1) \qquad (6)$$

अब, यदि बिन्दु Q वृत्त के अनुदिश चलता हुआ बिन्दु P की ओर अग्रसर होता हुआ P के संपाती हो जाए तो स्पष्ट है कि ऐसी स्थिति में $x_2 = x_1$ तथा $y_2 = y_1$ एवं जीवा PQ वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा बन जाएगी।

अतः (6) से, $$y - y_1 = -\frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1)$$

या $$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

या $$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

$\therefore$ $$xx_1 + yy_1 = a^2 \qquad [(3) \text{ से}]$$

जो कि वृत्त के बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

(ii) प्रवणता के रूप में स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करना।

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का निम्न समीकरण होता है।

$$xx_1 + yy_1 = a^2 \qquad (1)$$

समीकरण (1) को, $y = mx + c$ के रूप में लिखने पर

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{a^2}{y_1}$$

इस रेखा की प्रवणता

$$m = -x_1 / y_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -my_1 \qquad (2)$$

परंतु बिन्दु (x_1, y_1) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर स्थित है

अतः $$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \qquad (3)$$

(2) एवं (3) से, $$m^2 y_1^2 + y_1^2 = a^2$$

या $$y_1 = \pm \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (4)$$

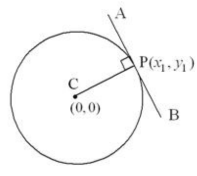
अब, (2) से, $$x_1 = \mp \frac{am}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (5)$$

अतः स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\mp \frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \pm \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} \right)$ होंगे तथा (1) से, वृत्त की स्पर्श रेखा का प्रवणता रूप $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ होगा।

12.09 अभिलम्ब (Normal)

परिभाषाः एक दिए गए वक्र के किसी बिन्दु पर **अभिलम्ब** वह सरल रेखा होती है जो उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा के लम्बवत् होती है।

वृत्त के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है। इस प्रकार दिए गए बिन्दु तथा केन्द्र से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ही अभीष्ट अभिलम्ब का समीकरण होगा।



चित्र 12.22

वृत्त के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करना।

(i) जब वृत्त का समीकरण $x^2+y^2=a^2$ के रूप का हो :

हम जानते है कि वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु (x_1,y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$xx_1+yy_1=a^2 \tag{1}$$

या
$$y=-\frac{x_1}{y_1}x+\frac{a^2}{y_1},$$

इसकी प्रवणता $=-x_1/y_1$ है। अतः इसके लम्ब रेखा की प्रवणता $=y_1/x_1$

फलत्, चित्र 12.22 में बिन्दु $P(x_1,y_1)$ से गुजरने वाली तथा (1) के लम्बवत् रेखा का समीकरण होगा

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1) \text{ या } xy_1-yx_1=0$$

जो कि वृत्त के बिन्दु (x_1,y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण है।

(ii) वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के अभिलम्ब का प्रवणता रूप : (i) में हम देख चुके है कि स्पर्श रेखा की प्रवणता m हो तो अभिलम्ब की प्रवणता $-1/m$ होगी। अतः $(0,0)$ से गुजरने वाली लम्ब रेखा का समीकरण

$$y-0=-\frac{1}{m}(x-0)$$

या
$$x+my=0$$

जो कि अभिलम्ब का अभीष्ट प्रवणता रूप है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 5: वृत्त $x^2+y^2-5x-y+4=0$ एवं सरल रेखा $x-2y+1=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए तथा प्रतिच्छेद जीवा की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिये वृत्त का समीकरण $\quad x^2+y^2-5x-y+4=0 \quad$ (1)

है तथा सरल रेखा $\quad x-2y+1=0 \quad$ (2)

प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करने के लिये हम समीकरण (1) तथा (2) को x तथा y के लिए हल करेंगे। समीकरण (2) से $x=2y-1$, समीकरण (1) में रखने पर

$$(2y-1)^2+y^2-5(2y-1)-y+4=0$$

या
$$y^2-3y+2=0$$

अतः
$$y=1 \text{ तथा } 2$$

समीकरण (2) से जब $y=1$ तो $x=1$ तथा जब $y=2$ तो $x=3$

अतः दिये गये वृत्त एवं सरल रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दुओं P तथा Q के निर्देशांक $(1,1)$ तथा $(3,2)$ होंगे।

इसलिए, प्रतिच्छेद जीवा की लम्बाई $\quad =\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

उदाहरण 6: वृत्त $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x-3y+6=0$ के समान्तर है।

हल : दिये गये वृत्त का समीकरण $\quad x^2+y^2-6x+4y-12=0 \quad$ (1)

का केन्द्र $(3,-2)$ तथा त्रिज्या 5 है।

माना, दी गयी रेखा $4x-3y+6=0$ के समान्तर कोई रेखा है

$$4x-3y+k=0 \tag{2}$$

यह दिए गए वृत्त को स्पर्श करेगी यदि

वृत्त की त्रिज्या = वृत्त के केन्द्र से स्पर्श रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

या $$5=\pm\frac{4\times 3-3\times(-2)+k}{\sqrt{16+9}}$$

या $$25=\pm(18+k)$$

+ चिह्न लेने पर $k=7$]   – चिह्न लेने पर $k=-43$

अतः (1) से स्पर्श रेखाओं के अभीष्ट समीकरण $4x-3y+7=0$ तथा $4x-3y-43=0$ हैं।

प्रश्नमाला 12.2

1. वृत्त $x^2+y^2=25$ तथा रेखा $4x+3y=12$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए तथा प्रतिच्छेद जीवा की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।
2. यदि वृत्त $x^2+y^2=a^2$ सरल रेखा $y=mx+c$ पर $2l$ लम्बाई का अंतःखण्ड काटता हो तो सिद्ध कीजिए $c^2=(1+m^2)(a^2-l^2)$
3. वृत्त $x^2+y^2=c^2$ द्वारा रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ पर काटे गये अन्तःखण्ड की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
4. k के किस मान के लिए रेखा $3x+4y=k$ वृत्त $x^2+y^2=10x$ को स्पर्श करती है।
5. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जब
   (i) रेखा $y=mx+c$ वृत्त $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ को स्पर्श करे।
   (ii) रेखा $lx+my+n=0$ वृत्त $x^2+y^2=a^2$ को स्पर्श करे।
6. (i) वृत्त $x^2+y^2=64$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4,7)$ से गुजरती है।
   (ii) वृत्त $x^2+y^2=4$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x–अक्ष से 60° का कोण बनाती है।
7. c का मान ज्ञात कीजिए जबकि रेखा $y=c$ वृत्त $x^2+y^2-2x+2y-2=0$ के बिन्दु $(1,1)$ पर स्पर्श रेखा हो।
8. वृत्त $x^2+y^2=169$ के बिन्दुओं $(5,12)$ तथा $(12,-5)$ पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि वे परस्पर लम्बवत् होंगी। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

परवलय (Parabola)

12.10 परिभाषा (Definition)

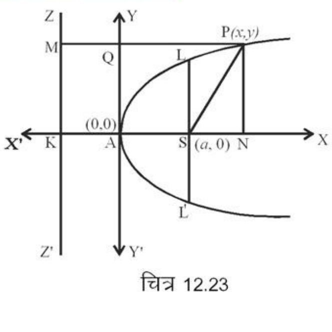
परवलय एक ऐसे चलित बिन्दु का बिन्दुपथ है जो एक समतल में इस प्रकार से गति करता है कि उसकी एक स्थिर बिन्दु तथा एक स्थिर रेखा से दूरी सदैव समान रहती है। स्थिर बिन्दु को परलवय की **नाभि** तथा स्थिर रेखा को **नियता** कहते हैं। नाभि से गुजरने वाली तथा नियता के लम्बवत् रेखा परवलय की **अक्ष** कहलाती है। परवलय एवं अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु **शीर्ष** कहलाता है।

12.11 परवलय का मानक समीकरण (Standard equation of the Parabola)

माना कि ZZ' परवलय की नियता तथा S परवलय की नाभि है। नाभि S से ZZ' पर SK लम्ब डाला। माना A, SK का मध्य बिन्दु है तो परिभाषानुसार A परवलय पर स्थित होगा। $[\because AS=AK]$

रेखा AS को x- अक्ष, बिन्दु A को मूल बिन्दु और A से जाने वाली तथा AS पर लम्ब रेखा AY को y- अक्ष माना। यदि SK = $2a$ हो तो AS = AK = a होगा, अतः नाभि S के निर्देशांक $(a, 0)$ तथा नियता का समीकरण $x=-a$ होगा।

माना $P(x, y)$ परवलय पर स्थित कोई चर बिन्दु है। SP को मिलाया तथा P से PN तथा PM क्रमशः x- अक्ष तथा नियता ZZ' पर लम्ब डालें। तब परवलय की परिभाषानुसार,



चित्र 12.23

$$SP = PM \text{ या } SP^2 = PM^2$$

या
$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 = 4ax$$

जो परवलय का अभीष्ट समीकरण है।

12.12 महत्वपूर्ण परिभाषाएँ (Important definitions)

(i) **नामीय जीवा (Focal chord):** परवलय की कोई जीवा जो नाभि से गुजरती है, **नामीय जीवा** कहलाती है।

(ii) **नामीय दूरी (Focal distance):** परवलय पर स्थित किसी भी बिन्दु की नाभि से दूरी, उस बिन्दु की **नामीय दूरी** कहलाती हैं।

(iii) **नामीय गुण (Focal Property):** चित्र 12.25 के अनुसार

$$SP = PM = PQ + QM = a + x$$

अर्थात् परवलय पर स्थित किसी बिन्दु की नाभीय दूरी इसकी भुज तथा शीर्ष से नाभि के मध्य दूरी का योग होता है।

(iv) **नामिलम्ब (Latus rectum):** वह नाभीय जीवा जो परवलय के अक्ष के लम्बवत् हो, **नामिलम्ब** कहलाती है।

(v) **द्विकोटि (Double ordinate):** परवलय की वह जीवा जो परवलय के अक्ष के लम्बवत् हो, परवलय की **द्विकोटि** कहलाती है।

(vi) **अर्द्धनामिलम्ब (Semi latus rectum):** नाभिलम्ब की लम्बाई की आधी लम्बाई परवलय की **अर्द्धनामिलम्ब** कहलाती है।

(vii) **नामिलम्ब की लम्बाई (Length of latus rectum):** माना LSL' परवलय $y^2 = 4ax$ का नाभिलम्ब है अतः चित्र 12.23 के अनुसार $SL = SL'$ या $LL' = 2SL$

माना $SL = \ell$, अतः L के निर्देशांक (a, ℓ) होंगे तथा यह परवलय पर स्थित है

$\therefore \quad \ell^2 = 4a \cdot a \qquad$ या $\qquad \ell = \pm 2a$

अतः नाभिलम्ब की लम्बाई $= 2 \times 2a = 4a$

बिन्दु L के निर्देशांक $(a, 2a)$ तथा L' के निर्देशांक $(a, -2a)$ होंगे।

12.13 परवलय के मानक समीकरण का अनुरेखण
(Tracing of the standard equation of the Parabola)

परवलय $y^2 = 4ax$ अथवा $y = \pm 2\sqrt{ax}$ से हम निम्न निष्कर्ष निकालते हैं कि–

(i) यदि x का मान ऋणात्मक है तो y का मान काल्पनिक होगा अतः y- अक्ष के बायीं ओर वक्र का कोई भी भाग नहीं होगा।

(ii) x के प्रत्येक धनात्मक मान के लिए y के दो समान किन्तु विपरीत चिह्न के मान प्राप्त होते हैं। अतः वक्र x- अक्ष के परित सममित होगा।

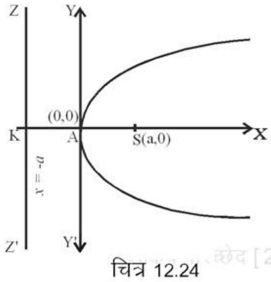
(iii) यदि x का मान धनात्मक दिशा में बढ़ता है, तब y का मान भी बढ़ता है अर्थात् $x \to \infty$ तब $y \to \infty$, अतः वक्र y- अक्ष के दायीं ओर अनन्त तक फैला हुआ है।

(iv) यदि $x = 0$ तब $y = 0$ होगा, तब वक्र मूलबिन्दु (0, 0) से गुजरेगा।

(v) यदि समीकरण $y^2 = 4ax$ की सहायता से x के कुछ मानों के लिये y के संगत मान ज्ञात करलें तथा प्राप्त समस्त युग्मों को लेखा चित्र में अंकित करके उनको आपस में मिलादें तो इस प्रकार बने वक्र की आकृति चित्र 12.24 में दिखाई आकृति के समान होगी।

12.14 परवलय के चार विभिन्न रूप (Four different forms of Parabola)

1. | | |
|---|---|
| परवलय | $y^2 = 4ax$ |
| शीर्ष | A(0, 0) |
| नाभि | S(a, 0) |
| अक्ष | $y = 0$ |
| नियता | $x = -a$ |
| नाभिलम्ब की लम्बाई | $= 4a$ |
| नाभिलम्ब की समीकरण | $x = a$ |



चित्र 12.24

2. परवलय $y^2 = -4ax$

शीर्ष A(0, 0)

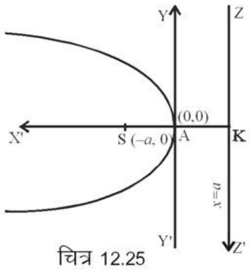
नाभि S(–a, 0)

अक्ष $y = 0$

नियता $x = a$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a$

नाभिलम्ब की समीकरण $x = -a$



चित्र 12.25

3. परवलय $x^2 = 4ay$

शीर्ष A(0, 0)

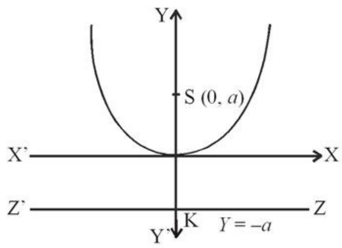
नाभि S(0, a)

अक्ष $x = 0$

नियता $y = -a$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a$

नाभिलम्ब की समीकरण $y = a$



चित्र 12.26

4. परवलय $x^2 = -4ay$

शीर्ष A(0, 0)

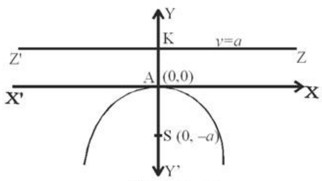
नाभि S(0, –a)

अक्ष $x = 0$

नियता $y = a$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a$

नाभिलम्ब की समीकरण $y = -a$



चित्र 12.27

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 7: उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (–1, –2) तथा नियता $x - 2y + 3 = 0$ है।

हल : मान लो परवलय पर कोई चर बिन्दु $P(h, k)$ है। परवलय की परिभाषानुसार

$$SP = PM \quad \text{या} \quad SP^2 = PM^2$$

या $$(h+1)^2 + (k+2)^2 = \left(\frac{h - 2k + 3}{\sqrt{1+4}}\right)^2$$

या $$5\left\{(h+1)^2 + (k+2)^2\right\} = (h - 2k + 3)^2$$

या $$5\left(h^2 + k^2 + 2h + 4k + 5\right) = h^2 + 4k^2 + 9 - 4hk + 6h - 12k$$

या $$4h^2 + k^2 + 4hk + 4h + 32k + 16 = 0$$

अतः बिन्दु $P(h, k)$ का बिन्दुपथ $4x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 32y + 16 = 0$ जो कि अभीष्ट परवलय का समीकरण है।

उदाहरण 8: परवलय $y^2 = 2y - 2x$ का शीर्ष, अक्ष, नाभि, नियता एवं नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का समीकरण $y^2 = 2y - 2x$ है।

$\therefore$ $$y^2 - 2y = -2x$$

या $$y^2 - 2y + 1 = -2x + 1$$

या $$(y-1)^2 = -2(x - 1/2) \qquad (1)$$

समीकरण (1) में $y - 1 = Y$ एवं $x - (1/2) = X$ रखने पर परवलय का नया समीकरण होगा

$$Y^2 = -2X \qquad (2)$$

जो $y^2 = 4ax$ के रूप का हैं अतः इसकी (2) से तुलना करने पर

$$4a = -2 \Rightarrow a = -1/2$$

परवलय $Y^2 = -2X$ के लिये

(a) शीर्ष (0, 0) अर्थात् $X = 0; Y = 0$

(b) नाभि (–1/2, 0) अर्थात् $X = -1/2; Y = 0$

(c) अक्ष $Y = 0$

(d) नियता $X = 1/2$

(e) नाभिलम्ब $= 4a = 4(-1/2) = 2$ (धनात्मक)

उपर्युक्त परिणामों में $X = x - (1/2)$ एवं $Y = y - 1$ रखने पर दिए हुए परवलय के लिए

(a) शीर्ष $x - (1/2) = 0$ या $x = 1/2$, $y - 1 = 0$ या $y = 1$, अतः शीर्ष के निर्देशांक $(1/2, 1)$ है।

(b) नाभि $x - (1/2) = -1/2$ या $x = 0$ तथा $y - 1 = 0$ या $y = 1$ अतः नाभि के निर्देशांक $(0, 1)$ है।

(c) अक्ष $y - 1 = 0$ या $y = 1$

(d) नियता $x - 1/2 = 1/2 \Rightarrow x = 1$

(e) नाभिलम्ब =2

उदाहरण 9: परवलय $4y^2 - 6x - 4y = 5$ के शीर्ष, अक्ष, नाभि, नियता और नाभिलम्ब (समीकरण एवं लम्बाई) ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का समीकरण $4y^2 - 6x - 4y = 5$

या $$[y - (1/2)]^2 = \frac{6}{4}(x+1)$$

या $$[y - (1/2)]^2 = \frac{3}{2}(x+1) \qquad (1)$$

मूल बिन्दु को $(-1, 1/2)$ पर प्रतिस्थापित करने पर समीकरण (1) का परिवर्तित समीकरण होगा

$$Y^2 = \frac{3}{2}X \qquad (2)$$

जहाँ $Y = y - (1/2)$ एवं $X = x + 1$ नाभिलम्ब की लम्बाई $= 3/2$

$\therefore$ $a = 1/4$ नाभिलम्ब $= 3/8$, अतः परवलय (2) के नाभि एवं शीर्ष के निर्देशांक क्रमशः $(3/8, 0)$ एवं $(0, 0)$ है। परवलय (2) के नाभिलम्ब का समीकरण $X = 3/8$ तथा नियता का समीकरण $X = -3/8$ होगा।

अतः परवलय (1) के नाभि एवं शीर्ष के निर्देशांक क्रमशः $(-5/8, 1/2)$ तथा $(-1, 1/2)$ होंगे, नाभिलम्ब की समीकरण $x + 1 = 3/8$ या $x = -5/8$ तथा नियता का समीकरण $x + 1 = -3/8$ या $x = -11/8$ होगा।

उदाहरण 10: परवलय $9x^2-6x+36y+19=0$ का शीर्ष, अक्ष, नाभि और नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का दिया गया समीकरण $9x^2-6x+36y+19=0$ है।

या $$9x^2-6x=-36y-19$$

या $$x^2-(2/3)x=-4y-(19/9)$$

या $$x^2-(2x/3)+(1/3)^2=-4y-(19/9)+(1/9)$$

या $$[x-(1/3)]^2=-4y-2$$

या $$[x-(1/3)]^2=-4[y+(1/2)] \qquad (1)$$

मूल बिन्दु (0, 0) को $(1/3,\ -1/2)$ पर स्थानान्तरित करने के लिए (1) में

$$x-(1/3)=X \text{ तथा } y+(1/2)=Y$$

स्थापित करने पर (1) का रूप निम्नांकित होगा

$$X^2=-4Y \qquad (2)$$

(यह परवलय $X^2=4aY$ के रूप का है जहाँ $a=-1$ है।)

जिसका अक्ष $X=0$ है

शीर्ष के निर्देशांक $=(0,\ 0)$ अर्थात् $X=0$ तथा $Y=0$

नाभि के निर्देशांक $=(0,\ -1)$ अर्थात् $X=0$ तथा $Y=-1$

नाभिलम्ब की लम्बाई $=4\times1=4 \quad (\because\ a=-1)$

दिये हुए परवलय (1) के लिए उपर्युक्त परिणामों में X तथा Y के मान रखने पर अक्ष का समीकरण

$$X=0\Rightarrow x-1/3=0\Rightarrow x=1/3$$

शीर्ष के निर्देशाँक $X=0\Rightarrow x=1/3;\ Y=0\Rightarrow y+(1/2)=0\Rightarrow y=-1/2$

अतः शीर्ष के निर्देशांक $=(1/3,\ -1/2)$

नाभि के निर्देशांक $X=0\Rightarrow x-(1/3)=0\Rightarrow x=1/3;\ Y=-1\Rightarrow y+(1/2)=-1\Rightarrow y=-3/2$

अतः नाभि के निर्देशांक $=(1/3,\ -3/2)$, नाभिलम्ब की लम्बाई $=4\times1=4$

प्रश्नमाला 12.3

1. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी
   (i) नाभि (2, 3) तथा नियता $x-4y+3=0$ है। (ii) नाभि (–3, 0) तथा नियता $x+5=0$ है।
2. निम्नलिखित परवलय के शीर्ष, अक्ष, नाभि तथा नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए।
   (i) $y^2=8x+8y$ (ii) $x^2+2y=8x-7$
3. परवलय $y^2=4ax$ की एक द्विकोटि की लम्बाई $8a$ है। सिद्ध कीजिए कि मूलबिन्दु से इस द्विकोटि के शीर्षों को मिलाने वाली रेखाएँ लम्बवत् होंगी।
4. यदि परवलय का शीर्ष तथा नाभि x- अक्ष पर मूलबिन्दु से a तथा a' दूरी पर हो, तो सिद्ध कीजिए कि परवलय की समीकरण $y^2=4(a'-a)(x-a)$ होगी।
5. PQ एक परवलय की द्विकोटि है। इसके समत्रिभाजन वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।
6. सिद्ध कीजिए कि परवलय $y^2=4ax$ में शीर्ष से गुजरने वाली सभी जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ भी परवलय $y^2=2ax$ होता है।

12.15 परवलय एवं सरल रेखा का प्रतिच्छेदन (Intersection of a Parabola and a line)

माना परवलय समीकरण है $$y^2 = 4ax \qquad (1)$$

तथा सरल रेखा का समीकरण है $$y = mx + c \qquad (2)$$

y का मान समीकरण (1) से (2) में रखने पर

$$(mx+c)^2 = 4ax$$

या $$m^2x^2 + 2(mc-2a)x + c^2 = 0 \qquad (3)$$

यह x में द्विघातीय है माना इसके मूल x_1 एवं x_2 है अतः

$$x_1 + x_2 = \frac{-2(mc-2a)}{m^2} \qquad (4)$$

एवं $$x_1x_2 = \frac{c^2}{m^2} \qquad (5)$$

$\therefore$ $$x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(\frac{4(cm-2a)^2}{m^4} - \frac{4c^2}{m^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{m^2}\sqrt{4m^2c^2 - 16amc + 16a^2 - 4m^2c^2}$$

अतः $$x_1 - x_2 = \frac{4}{m^2}\sqrt{a(a-mc)} \qquad (6)$$

समीकरण (4) एवं (6) को सरल करने पर x_1 तथा x_2 के मान ज्ञात किए जा सकते हैं। x_1 तथा x_2 के मानों को समीकरण (2) में रखने पर y के संगत मान y_1 तथा y_2 ज्ञात किये जा सकते हैं। अतः सरल रेखा परवलय को दो बिन्दुओं पर काटती है।

12.16 प्रतिच्छेद बिन्दुओं की प्रकृति (Nature of the points of intersection)

उपर्युक्त समीकरण (3) के मूलों के वास्तविक एवं भिन्न, समान या काल्पनिक होने के अनुसार ही प्रतिच्छेद बिन्दु भी वास्तविक, संपाती या काल्पनिक होते है जिसके लिए व्यंजक

$$\{2(mc-2a)\}^2 - 4m^2c^2 >=< 0$$

या $$a(a-mc) >=< 0$$

या $$a >=< mc$$

12.17 सरल रेखा $y = mx + c$ द्वारा परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध

(Condition for straight line $y = mx + c$ to be tangent to the parabola $y^2 = 4ax$)

यदि सरल रेखा एवं परवलय के प्रतिच्छेद बिन्दु संपाती हो तो रेखा परवलय को स्पर्श करेगी। अतः रेखा (2) परवलय (1) को स्पर्श करेगी यदि समीकरण (3) के मूल समान हो, अर्थात्

$$4(mc-2a)^2 = 4m^2c^2 \qquad (B^2 = 4AC)$$

या $$a(a-mc) = 0$$

या $$a - mc = 0$$

अतः $$c = a/m$$

यह रेखा (2) के परवलय (1) को स्पर्श करने का अभीष्ट प्रतिबन्ध है। c का मान समीकरण (2) में रखने पर परवलय का स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + (a/m)$ प्राप्त होता है। अतः रेखा $y = mx + (a/m)$ (m के प्रत्येक मान के लिये) परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करती है।

12.18 स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक (Co-ordinates of the point of contact)

अनुच्छेद 12.15 के समीकरण (3) में $c = a/m$ प्रतिस्थापित करने पर,

$$m^2x^2 + 2x\left(\frac{ma}{m} - 2a\right) + \frac{a^2}{m^2} = 0$$

या
$$\left(mx - \frac{a}{m}\right)^2 = 0$$

अर्थात् $x = \frac{a}{m^2}$, x का मान (2) में रखने पर $y = m\left(\frac{a}{m^2}\right) + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$

अतः स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ होंगे।

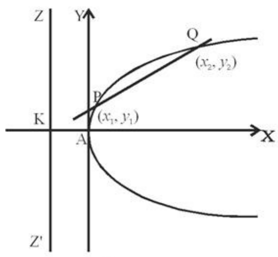
12.19 अन्तः खण्ड की लम्बाई (Length of intercept)

माना सरल रेखा का समीकरण है

$$y = mx + c \qquad (1)$$

एवं परवलय का समीकरण है

$$y^2 = 4ax \qquad (2)$$



चित्र 12.28

समीकरण (1) एवं (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ है चूंकि बिन्दु P एवं Q सरल रेखा पर स्थित हैं अतः

$$y_1 = mx_1 + c \text{ तथा } y_2 = mx_2 + c$$

$\therefore$ $$y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) \qquad (3)$$

अब $$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2} \qquad [(3) \text{ से}]$$

$$= (x_1 - x_2)\sqrt{1 + m^2}$$

परन्तु $$(x_1 - x_2) = \frac{4}{m^2}\sqrt{a(a - mc)}$$ [अनुच्छेद 12.15, समीकरण (6) से]

$\therefore$ $$PQ = \frac{4}{m^2}\sqrt{\left[a(a - mc)(1 + m^2)\right]}$$

12.20 स्पर्श रेखा (Tangent)

(i) परवलय के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा का समीकरण

माना $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ परवलय पर दो बिन्दु हैं

$\therefore$ $$y_1^2 = 4ax_1 \qquad (1)$$

तथा $$y_2^2 = 4ax_2 \qquad (2)$$

रेखा PQ का समीकरण, $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (3)$$

समीकरण (1) एवं (2) से

$$y_2^2 - y_1^2 = 4a(x_2 - x_1)$$

या
$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 4a(x_2 - x_1)$$

या
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4a}{y_1 + y_2} \qquad (4)$$

अब समीकरण (3) एवं (4) की सहायता से PQ का समीकरण होगा

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1) \qquad (5)$$

जब बिन्दु Q बिन्दु P पर सम्पाती हो तो जीवा PQ बिन्दु P पर स्पर्श रेखा हो जाती है। अतः $y_2 = y_1$ समीकरण (5) में रखने पर

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1)$$

या
$$yy_1 - y_1^2 = 2a(x - x_1)$$

या
$$yy_1 = 2ax - 2ax_1 + y_1^2$$

या
$$yy_1 = 2ax - 2ax_1 + 4ax_1$$

$yy_1 = 2a(x + x_1)$, जो कि स्पर्श रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

(ii) ढाल के रूप में स्पर्श रेखा का समीकरण

माना परवलय का समीकरण
$$y^2 = 4ax \qquad (1)$$

है तथा इसके बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \qquad (2)$$

माना
$$m = \frac{2a}{y_1}$$

या
$$y_1 = \frac{2a}{m}$$

चूँकि बिन्दु $P(x_1, y_1)$ परवलय पर स्थित है अतः

$$y_1 = 4ax_1$$

या
$$\frac{4a^2}{m^2} = 4ax_1$$

या
$$x_1 = \frac{a}{m^2}$$

x_1 तथा y_1 के मानों को समीकरण (2) में रखने पर अभीष्ट स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

$$y\left(\frac{2a}{m}\right) = 2a\left(x + \frac{a}{m^2}\right),$$

$y = mx + \dfrac{a}{m}$ तथा स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\dfrac{a}{m^2}, \dfrac{2a}{m}\right)$ होंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 11: सिद्ध कीजिए कि रेखा $y = mx + c$ परवलय $y^2 = 4a(x+a)$ को स्पर्श करती है यदि $c = am + \frac{a}{m}$.

हल : यदि सरल रेखा $y = mx + c$ परवलय $y^2 = 4a(x+a)$ को स्पर्श करती है, तो इसे दो संपाती बिन्दुओं पर काटेगी। रेखा एवं परवलय के समीकरण में से y विलोपित करने पर

$$(mx+c)^2 = 4a(x+a)$$

या $$m^2x^2 + 2(mc-2a)x + (c^2-4a^2) = 0$$

इस समीकरण के मूल समान होंगे यदि

$$4(mc-2a)^2 - 4m^2(c^2-4a^2) = 0 \qquad [B^2 - 4AC = 0 \text{ से}]$$

या $$m^2c^2 + 4a^2 - 4amc - m^2c^2 + 4a^2m^2 = 0$$

या $$4a(a - mc + am^2) = 0$$

या $$a - mc + am^2 = 0$$

अतः $$c = am + \frac{a}{m}$$

उदाहरण 12: परवलय $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 32y$ को स्पर्श करने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते है कि रेखा

$$y = mx + \frac{1}{m} \qquad (1)$$

m के प्रत्येक मान के लिए परवलय $y^2 = 4x$ को स्पर्श करती है। यदि (1) परवलय $x^2 = 32y$ को भी स्पर्श करे तो समीकरण (1) एवं परवलय $x^2 = 32y$ के प्रतिच्छेद बिन्दु संपाती होने चाहिए।

अर्थात् समीकरण

$$x^2 = 32\left(mx + \frac{1}{m}\right)$$

या $$mx^2 - 32m^2x - 32 = 0$$

के मूल समान होने चाहिए। अतः शर्त $B^2 - 4AC = 0$ का उपयोग करने पर

$$(-32m^2)^2 - 4m(-32) = 0$$

$\Rightarrow$ $$8m^3 = -1 \Rightarrow m = -1/2$$

अतः परवलयों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{(-1/2)}$$

या $$x + 2y + 4 = 0$$

उदाहरण 13: परवलय $y^2 = 8x$ की वह स्पर्श रेखा ज्ञात कीजिए जो रेखा $2y - x + 1 = 0$ के लम्बवत् है।

हल : सरल रेखा $2y - x + 1 = 0$ के लम्बवत् सरल रेखा का समीकरण होगा

$$y + 2x + k = 0 \tag{1}$$

रेखा (1) परवलय $y^2 = 8x$ को स्पर्श करेगी यदि समीकरण $(2x + k)^2 = 8x$

या $$4x^2 + 4(k-2)x + k^2 = 0$$

के मूल सम्पाती हो, जिसके लिए शर्तानुसार $(B^2 = 4AC)$

$$16(k-2)^2 = 4 \times 4 \times k^2$$

$\Rightarrow \quad k^2 - 4k + 4 = k^2 \qquad \Rightarrow \qquad k = 1$

अतः अभीष्ट स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

$$y + 2x + 1 = 0$$

12.21 अभिलम्ब का समीकरण (Equation of normal)

(i) परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करना।

परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \tag{1}$$

यदि स्पर्श रेखा (1) की प्रवणता $m = \dfrac{2a}{y_1}$ हो तब $P(x_1, y_1)$ पर अभिलम्ब की प्रवणता $= \dfrac{-y_1}{2a}$ होगी अतः परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण होगा

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1)$$

(ii) ढाल के रूप में अभिलम्ब का समीकरण

परवलय $y^2 = 4ax$ का किसी बिन्दु $P(x_1, y_1)$, पर अभिलम्ब का समीकरण है

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1) \tag{1}$$

यदि अभिलम्ब की प्रवणता m हो तो

$$\frac{-y_1}{2a} = m \qquad \text{या} \qquad y_1 = -2am \tag{2}$$

चूंकि बिन्दु $P(x_1, y_1)$ परवलय पर स्थित है अतः

$$y_1^2 = 4ax_1 \qquad \text{अतः} \qquad (-2am)^2 = 4ax_1 \qquad \text{या} \qquad x_1 = am^2$$

x_1, y_1 का मान समीकरण (1) में रखने पर अभीष्ट अभिलम्ब का समीकरण होगा

$$y = mx - 2am - am^3 \tag{3}$$

समीकरण (3) में m उस कोण की स्पर्शज्या है जो अभिलम्ब परवलय के अक्ष के साथ बनाता है। अभिलम्ब के पाद के निर्देशांक $(am^2, -2am)$ होंगे।

12.22 किसी बिन्दु से परवलय पर तीन अभिलम्ब खींचें जा सकते है।
(Three normals can be drawn from any point on the parabola)

माना परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ तथा अभिलम्ब का समीकरण $y = mx - 2am - am^3$ है। यदि यह अभिलम्ब दिए हुए बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरता है तब $y_1 = mx_1 - 2am - am^3$ या $am^3 + (2a - x_1)m + y_1 = 0$

यह m में त्रिघातीय समीकरण है इससे m के तीन मान प्राप्त होते है। अतः m के प्रत्येक मान के लिए बिन्दु (x_1, y_1) से परवलय पर तीन अभिलम्ब खीचें जा सकते है।

गुणधर्म : (i) यदि किसी बिन्दु से परवलय पर तीन अभिलम्ब खींचें जा सकते हैं तब उनकी प्रवणताओं का योग शून्य होता है।

(ii) इनके पादों की कोटियों का बीजीय योग शून्य होता है।

प्रमाणः बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाले परवलय $y^2 = 4ax$ के अभिलम्ब का समीकरण

$$am^3 + (2a - x_1)m + y_1 = 0 \tag{1}$$

है, यह m में त्रिघातीय है माना इसके मूल है m_1, m_2 तथा m_3

(i) मूलों का योग $m_1 + m_2 + m_3 = \dfrac{-m^2 \text{ का गुणाँक}}{m^3 \text{ का गुणाँक}} = \dfrac{0}{a} = 0$

अतः प्रवणताओं का योग शून्य है।

(ii) अभिलम्ब के पादों की कोटियों (y-निर्देशांक) का योग

$$= -2am_1 - 2am_2 - 2am_3$$

$$= -2a(m_1 + m_2 + m_3) = -2a \times 0 = 0$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 14: सिद्ध कीजिए कि परवलय $y^2 = 4ax$ की वह जीवा जिसका समीकरण $y - x\sqrt{2} + 4a\sqrt{2} = 0$ है, परवलय पर अभिलम्ब है एवं उसकी लम्बाई $6a\sqrt{3}$ है।

हल : परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी बिन्दु m के पदों में अभिलम्ब का समीकरण है।

$$y = mx - 2am - am^3 \tag{1}$$

जीवा का समीकरण है,

$$y = x\sqrt{2} - 4a\sqrt{2} \tag{2}$$

समीकरण (2) परवलय पर अभिलम्ब होगी, यदि यह समीकरण (1) की तरह हो। अतः (1) एवं (2) की तुलना करने पर,

$$m = \sqrt{2}\ ;\ -4a\sqrt{2} = -2am - am^3$$

जो कि स्वतः सन्तुष्ट होते है। अतः रेखा (2) परवलय पर अभिलम्ब है। समीकरण (2) से y का मान परवलय के समीकरण में रखने पर

$$\left(x\sqrt{2} - 4a\sqrt{2}\right)^2 = 4ax$$

या $$2x^2 + 32a^2 - 16ax - 4ax = 0$$

$$x^2 - 10ax + 16a^2 = 0$$

या $$(x - 2a)(x - 8a) = 0$$

अतः $x = 2a, 8a$ इसी प्रकार $y = -2a\sqrt{2}, 4a\sqrt{2}$

अतः अभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= \sqrt{\left[(8a - 2a)^2 + \left(4a\sqrt{2} + 2a\sqrt{2}\right)^2\right]} = \sqrt{36a^2 + 72a^2} = 6a\sqrt{3}$

प्रश्नमाला 12.4

1. उन प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ सरल रेखा $4y+3x+6=0$ परवलय $2y^2=9x$ को काटती है।
2. परवलय $y^2=8x$ पर रेखा $4y-3x=8$ द्वारा काटी गई जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
3. सिद्ध करो कि सरल रेखा $x+y=1$ परवलय $y=x-x^2$ को स्पर्श करती है।
4. परवलय $y^2=4ax$ को रेखा $\ell x+my+n=0$ द्वारा स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।
5. सिद्ध कीजिए कि x-अक्ष से "α" कोण बनाने वाली परवलय $y^2=4ax$ की नाभीय जीवा की लम्बाई $4a\,\text{cosec}^2\alpha$ होगी।
6. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिससे रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ परवलय $y^2=4ax$ को स्पर्श करे।
7. निम्न परवलयों पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए–

   (i) $y^2=6x$, जो रेखा $2x-3y=4$ के समान्तर हो। (ii) $y^2=8x$, जो रेखा $2x-y+1=0$ के लम्बवत् हो।
8. k के किस मान के रेखा $2x-3y=k$ परवलय $y^2=6x$ को स्पर्श करेगी?
9. स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (4, 10) से परवलय $y^2=8x$ पर खींची जाती है।
10. निम्न परवलयों पर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए–

    (i) $y^2=8x$ के बिन्दु $(2,4)$ पर (ii) $y^2+12x=0$ की नाभिलम्ब के ऊपरी सिरे पर
11. निम्न परवलयों पर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए–

    (i) $y^2=4x$ जो रेखा $y-2x+5=0$ के समान्तर हो।

    (ii) $y^2=4x$ जो रेखा $x+3y-1=0$ के लम्बवत् हो।
12. सिद्ध कीजिए कि रेखा $2x+y-12a=0$ परवलय $y^2=4ax$ पर अभिलम्ब जीवा है तथा उसकी लम्बाई $5\sqrt{5}a$ इकाई है।

दीर्घवृत्त (Ellipse)

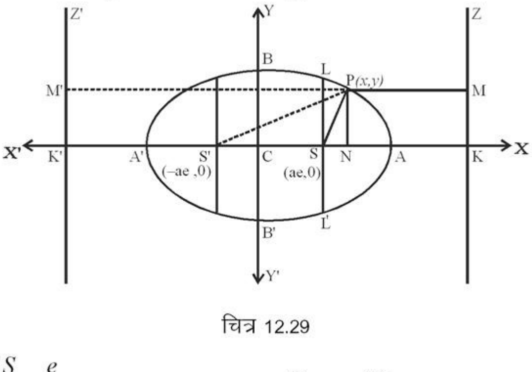
12.23 परिभाषा (Definition)

दीर्घवृत्त एक ऐसे चलित बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार गमन करे कि उसका एक निश्चित बिन्दु तथा एक निश्चित रेखा से दूरी का अनुपात एक अचर राशि हो एवं उसका मान सदैव एक से कम हो। इस निश्चित बिन्दु को दीर्घवृत्त की **नाभि** तथा निश्चित रेखा को **नियता** कहते है। अचर अनुपात (e) उत्क्रेन्द्रता कहलाती है।

12.24 दीर्घवृत्त का मानक समीकरण (Standard equation of the Ellipse)

माना कि बिन्दु S दीर्घवृत्त की नाभि, रेखा ZK नियता, e उत्क्रेन्द्रता तथा $P(x, y)$ कोई चलित बिन्दु है।

क्योंकि यहाँ $e<1$ है, इसीलिये दीर्घवृत्त, SK को e : 1 के अनुपात में A तथा A' पर क्रमशः अन्तः एवं बाह्य विभाजित करेगा।



चित्र 12.29

$$\frac{AS}{AK}=\frac{e}{1} \quad \text{या} \quad AS=e\cdot AK \qquad (1)$$

इसी प्रकार क्योंकि A' दीर्घवृत्त पर स्थित है अतः

$$\frac{A'S}{A'K}=\frac{e}{1} \qquad \text{या} \qquad A'S=e\cdot A'K \qquad (2)$$

मानलों $AA'=2a$ तथा C इसका मध्य बिन्दु है तब $CA=CA'=a$ (1) एवं (2) को जोड़ने पर,

$$AS+A'S=e(AK+A'K) \qquad \text{या} \qquad AA'=e\{CK-CA+CA'+CK\}$$

या $\qquad AA'=e(2CK),$ $\qquad [\because CA=CA']$

या $\qquad 2a=2e\cdot CK,$ $\qquad [\because AA'=2a]$

अतः $\qquad CK=a/e$ $\qquad (3)$

अब (2) में से (1) को घटाने पर $\qquad A'S-AS=e(A'K-AK)$

या $\qquad (CA'+CS)-(CA-CS)=e(AA')$

$2CS=eAA',$ $\qquad [\because CA=CA']$

$2CS=e\cdot 2a,$ $\qquad [\because AA'=2a]$

अतः $\qquad CS=ae$ $\qquad (4)$

अब हम C को मूल बिन्दु, CAX को x- अक्ष तथा इसके लम्बवत् रेखा CY को y- अक्ष मानते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करेंगे। समीकरण (4) से नाभि के निर्देशांक $S(ae,\,0)$ तथा समीकरण (3) से नियता का समीकरण $X=a/e$ है। बिन्दु P से PN तथा PM क्रमशः x- अक्ष और नियता ZK पर लम्ब डालें एवं P तथा S को मिलायें, तो दीर्घवृत्त की परिभाषानुसार,

$$SP=ePM$$

या
$$SP^2=e^2PM^2$$

या
$$SN^2+NP^2=e^2NK^2$$

या
$$(CN-CS)^2+NP^2=e^2(CK-CN)^2$$

या
$$(x-ae)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}-x\right)^2 \qquad ((3) \text{ एवं } (4) \text{ से})$$

या
$$x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2) \qquad \text{या} \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1 \qquad (5)$$

समीकरण (5) में $a^2(1-e^2)=b^2$ रखने पर, दीर्घवृत्त का समीकरण मानक रूप में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{जहाँ} \qquad b^2=a^2(1-e^2) \qquad (6)$$

टिप्पणी : (1) समीकरण (5) में $x=0$ रखने पर हमें दीर्घवृत्त और y- अक्ष $(x=0)$ के परिच्छेद बिन्दु B एवं B' के निर्देशांक क्रमशः $\left(o,\,a\sqrt{1-e^2}\right)$ तथा $\left(o,\,-a\sqrt{1-e^2}\right)$ अर्थात् $(0,\,b)$ एवं $(0,\,-b)$ प्राप्त होंगे।

(2) यदि समीकरण (6) में $a=b$ हो तो दीर्घवृत्त $x^2+y^2=a^2$ में रूपान्तरित हो जाता है, जो एक वृत्त का मानक समीकरण है जिसका केन्द्र मूल बिन्दु एवं त्रिज्या a है।

12.25 कुछ परिभाषाएं

1. **दीर्घ अक्ष** (Major axis): दोनों शीर्ष A तथा A' को मिलाने वाली रेखा AA' **दीर्घ अक्ष** कहलाती है तथा इसकी लम्बाई $2a$ होती है। (देखे चित्र 12.29)
2. **लघु अक्ष** (Minor axis): दीर्घ अक्ष पर लम्ब रेखा तथा केन्द्र C(0, 0) से गुजरने वाली रेखा BB' **लघु अक्ष** कहलाती तथा उसकी लम्बाई $2b$ होती है। (देखे चित्र 12.29)
3. **मुख्य अक्ष** (Principal axes): दीर्घ तथा लघु दोनों ही अक्ष दीर्घवृत्त के **मुख्य अक्ष** कहलाते है।
4. **नाभिलम्ब** (Latus rectum): यह वह रेखा है जो नाभि से गुजरती है तथा दीर्घ अक्ष पर लम्ब होती है, नाभिलम्ब कहलाती है।

12.26 दीर्घवृत्त के मानक समीकरण का अनुरेखण (Tracing of standard equation of the ellipse)

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण है $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

समीकरण (1) से $$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)} \qquad (2)$$

तथा $$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{(b^2-y^2)} \qquad (3)$$

समीकरण (2) में x की जगह $-x$ रखने पर हम देखते है कि y के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता। अतः दीर्घवृत्त y- अक्ष के सापेक्ष सममित है। इसी प्रकार समीकरण (3) में y की जगह $-y$ रखने पर x के मान में कोई परिवर्तन नही होता। अतः दीर्घवृत्त x– अक्ष के सापेक्ष सममित है।

समीकरण (2) में यदि $x>a$, तो y काल्पनिक होता है अतः दीर्घवृत्त का कोई भी भाग, इसके शीर्ष A के दांई और शीर्ष A' के बाई ओर नहीं होगा।

इसी प्रकार समीकरण (3) में यदि $y>b$ हो तो x काल्पनिक होता है, अतः दीर्घवृत्त का कोई भी भाग B के ऊपर तथा B' के नीचे नहीं होगा। इसीलिए दीर्घवृत्त एक बन्द वक्र है।

समीकरण (2) से हम देखते है कि जब x बढ़ता है तो y घटता है। इसी प्रकार समीकरण (3) से, जब y बढ़ता है तो x घटता है। अतः दीर्घवृत्त एक वृत्त के समान दिखायी देता है जो एक व्यास के अनुदिश निकला हुआ है तथा इसके लम्ब व्यास के अनुदिश चपटा है।

उपर्युक्त तथ्यों एवं जानकारी के आधार पर वक्र को खींचने पर चित्र 12.29 की आकृति प्राप्त होती है।

12.27 दीर्घवृत्त का दूसरा रूप (Another form of the ellipse)

यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ में $b>a$ हो तो $a^2=b^2\left(1-e^2\right)$ होगा। दीर्घवृत्त के इस रूप में x– अक्ष लघु अक्ष तथा y– अक्ष दीर्घ अक्ष होती है, यहाँ दीर्घ अक्ष की लम्बाई $2b$ तथा लघु अक्ष की लम्बाई $2a$ होती है।

इसकी नाभियों S एवं S' के निर्देशाँक क्रमशः $(0, be)$ एवं $(0, -be)$ होते है तथा नियताओं के समीकरण $y=\pm b/e$ होते है, यहाँ नाभिलम्ब की लम्बाई $2a^2/b$ होगी।

12.28 दीर्घवृत्त की दूसरी नाभि और दूसरी नियता (Second focus and second directrix of the ellipse)

चित्र 12.29 के अनुसार x– अक्ष पर मूल बिन्दु की बायीं तरफ एक बिन्दु S' तथा एक अन्य बिन्दु K' इस प्रकार लिए जाएँ कि

$$CS'=CS=ae \qquad \text{तथा} \qquad CK'=CK=a/e$$

$\therefore$ रेखा K'M' का समीकरण होगा

$$x=-a/e \qquad (1)$$

अब दीर्घवृत्त पर बिन्दु $P(x, y)$ से रेखा K'Z' पर लम्ब PM' डाले। अब यदि S' को नाभि एवं रेखा K'M' को नियता मानें तो दीर्घवृत्त की परिभाषानुसार

$$PS'=ePM' \qquad \text{या} \qquad (PS')^2=e^2(PM')^2 \qquad (2)$$

चूंकि बिन्दु S' के निर्देशांक $(-ae, 0)$ है अतः समीकरण (2) से,

$$(x+ae)^2+y^2=e^2(x+a/e)^2$$

या $$x^2+2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2+2aex+a^2$$

या $$x^2\left(1-e^2\right)+y^2=a^2\left(1-e^2\right)$$

या $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2\left(1-e^2\right)}=1$$

या $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ जहाँ } b^2=a^2\left(1-e^2\right)$$

परन्तु यह उसी दीर्घवृत्त का समीकरण है जिसमें नाभि S एवं नियता KM है। अतः दीर्घवृत्त में दो नाभि एवं दो नियता होती है।

12.29 नाभिक गुण (Focal Property)

दीर्घवृत्त की परिभाषा से

$$SP = e \cdot PM = eNK = e(CK - CN) \quad (1)$$

तथा
$$S'P = ePM' = eNK' = e(CN + CK') \quad (2)$$

अतः
$$SP + S'P = e(CK + CK') = e\left(\frac{a}{e} + \frac{a}{e}\right) = 2a = \text{दीर्घ अक्ष}$$

अर्थात् दीर्घवृत्त पर किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का योग अचर होता है तथा यह दीर्घ अक्ष की लम्बाई के बराबर होता है। उपर्युक्त महत्वपूर्ण गुणधर्म के आधार पर दीर्घवृत्त की परिभाषा निम्न प्रकार से दी जा सकती है:

"दीर्घवृत्त उस चलित बिन्दु का बिन्दुपथ होता है जिसकी दो स्थिर बिन्दुओं (नाभियों) से दूरियों का योग अचर होता है।"

12.30 दीर्घवृत्त के नाभिलम्बों की लम्बाई (Length of the latus-rectum of the ellipse)

चित्र 12.29 में LSL' एक नाभिलम्ब है तथा L एवं L' इसके सिरे है जो कि दीर्घवृत्त पर स्थित है, यहाँ L एवं L' के लिये $x = ae$ है। माना $SL = y'$ है। तब L के निर्देशांक (ae, y') होंगे। चूंकि बिन्दु L, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित है

अतः
$$\frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

या
$$y'^2 = \frac{b^4}{a^2} \qquad \left[\because b^2 = a^2\left(1 - e^2\right)\right]$$

या
$$y' = \pm\frac{b^2}{a}$$

$\therefore$ नाभिलम्ब की लम्बाई
$$= LL' = 2SL = \frac{2b^2}{a}$$

यहाँ नाभिलम्ब के सिरों L एवं L' के निर्देशांक क्रमशः $\left(ae, b^2/a\right)$ एवं $\left(ae, -b^2/a\right)$ होंगे।

इसी प्रकार दूसरी नाभिलम्ब, जो S' से गुजरती है, के सिरों के निर्देशांक $\left(-ae, -b^2/a\right)$ एवं $\left(-ae, b^2/a\right)$ होंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 15: उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (–1, 1), नियता $x - y + 3 = 0$ और उत्केन्द्रता $e = 1/2$ हो।

हल : माना कि दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु P(*h*, *k*) है तब परिभाषानुसार

P की नाभि से दूरी = *e* (P की नियता से दूरी)

या
$$PS = e(PM)$$

या
$$(PS)^2 = e^2(PM)^2$$

या
$$(h+1)^2 + (k-1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{h-k+3}{\sqrt{2}}\right)^2$$

या
$$8\left(h^2 + k^2 + 2h - 2k + 2\right) = (h - k + 3)^2$$

या
$$7h^2 + 2hk + 7k^2 + 10h - 10k + 7 = 0$$

अतः बिन्दु $P(h, k)$ का बिन्दुपथ $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 = 0$ जो कि अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण है।

उदाहरण 16: निम्नलिखित दीर्घवृत्तों की उत्क्रेन्द्रता, नाभिलम्ब और नाभियों के निर्देशाँक ज्ञात कीजिए:

(i) $3x^2+4y^2=12$ (ii) $9x^2+5y^2-30y=0$

हल : (i) दीर्घवृत्त के समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \tag{1}$$

यहाँ $a^2=4$ तथा $b^2=3$

(i) उत्क्रेन्द्रता : चूँकि $b^2=a^2\left(1-e^2\right)$ $\therefore$ $3=4\left(1-e^2\right)\Rightarrow e=1/2$

(ii) नाभिलम्ब : $=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 3}{2}=3$

(iii) नाभि के निर्देशांक : $(ae, 0)$ तथा $(-ae, 0)$ अर्थात् $(1, 0)$ और $(-1, 0)$

(ii) यहाँ दीर्घवृत्त का समीकरण है

$$9x^2+5y^2-30y=0$$

या $$9x^2+5(y-3)^2=45$$

या $$\frac{x^2}{5}+\frac{(y-3)^2}{9}=1 \tag{1}$$

मूल बिन्दु को $(0, 3)$ पर स्थानान्तरित करने पर,

$$\frac{X^2}{5}+\frac{Y^2}{9}=1, \text{ यहाँ } a^2=5 \text{ तथा } b^2=9 \text{ अतः } b>a \tag{2}$$

(i) **उत्क्रेन्द्रताः** $a^2=b^2\left(1-e^2\right)$ से $5=9\left(1-e^2\right)\Rightarrow e=\dfrac{2}{3}$

(ii) **नाभिलम्बः** $=\dfrac{2a^2}{b}=\dfrac{2\cdot 5}{3}=\dfrac{10}{3}$

(iii) **नाभि के निर्देशांकः** दीर्घवृत्त (2) की नाभि के निर्देशांक $(0, \pm be)$ क्योंकि नाभि Y–अक्ष पर स्थित है अर्थात् नाभि $(0, +2)$ होगी।

दिये गये दीर्घवृत्त (1) की नाभि के निर्देशांक होंगे $(0, 3\pm 2)$ अर्थात् $(0, 1)$ तथा $(0, 5)$

उदाहरण 17: उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष एवं नाभियों के निर्देशांक क्रमशः$(\pm 5, 0)$ तथा $(\pm 4, 0)$ हो।

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण है

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

इसके शीर्ष तथा नाभियों के निर्देशांक क्रमशः $(\pm a, 0)$ तथा $(\pm ae, 0)$ है। दिये गये निर्देशांकों से तुलना करने पर, $a=5$ तथा $ae=4$

अतः $a=5$ तथा $e=4/5$

पुनः $e=\sqrt{\left(1-b^2/a^2\right)}$ से $4/5=\sqrt{\left(1-b^2/25\right)}$ $\Rightarrow$ $b=3$

a तथा b का मान (1) में रखने पर $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

यही अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण है।

उदाहरण 18: उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी उत्क्रेन्द्रता 3/5 तथा नाभिलम्ब 6 है।

हल : माना अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण है

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (a>b) \tag{1}$$

दिया हुआ है, नाभिलम्ब $=\dfrac{2b^2}{a}=6$

या $2\dfrac{a^2(1-e^2)}{a}=6$

या $a\left(1-\dfrac{9}{25}\right)=3 \qquad \therefore\ a=\dfrac{75}{16}$

समीकरण (2) से $2b^2=6\times\dfrac{75}{16}$

या $b=\dfrac{15}{4}$

अतः a एवं b के मान (2) में रखने पर, $256x^2+400y^2=5625$, यही अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण है।

प्रश्नमाला 12.5

1. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी
   (i) नाभि $(-1,\ 1)$, नियता $x-y+4=0$ तथा उत्क्रेन्द्रता $e=1/\sqrt{5}$ हो।
   (ii) नाभि $(-2,\ 3)$, नियता $3x+4y=1$ तथा उत्क्रेन्द्रता $e=1/3$ हो।
2. निम्न दीर्घवृत्तों की उत्क्रेन्द्रता, नाभिलम्ब और नाभि के निर्देशांक ज्ञात करो।
   (i) $4x^2+9y^2=1$ (ii) $25x^2+4y^2=100$ (iii) $3x^2+4y^2-12x-8y+4=0$
3. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसके अक्ष निर्देश अक्ष हो तथा यह बिन्दुओं $(6,2)$ एवं $(4,3)$ से गुजरता हो।
4. उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिये जिसकी नाभिलम्ब उस की लघु अक्ष की आधी हो।
5. एक बिन्दु का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिये जो इस प्रकार गमन करे कि उसकी बिन्दु $(1,0)$ तथा $(-1,0)$ से दूरियों का योग सदैव 3 रहता है। यह बिन्दुपथ कौनसा वक्र है।

12.31 दीर्घवृत्त एवं सरल रेखा का प्रतिच्छेदन (Intersection of an ellipse and a straight line)

माना सरल रेखा तथा दीर्घवृत्त के समीकरण क्रमशः है

$$y=mx+c \tag{1}$$

तथा

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

समीकरण (1) से y का मान (2) में रखने पर

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

या $x^2\left(a^2m^2+b^2\right)+2a^2mcx+a^2\left(c^2-b^2\right)=0$ (3)

यह एक द्विघात समीकरण है जिसके दो मूल होंगे। अतः यह दर्शाता है कि रेखा (1) दीर्घवृत्त (2) को हमेशा दो बिन्दुओं पर काटेगी।

यदि रेखा (1) दीर्घवृत्त (2) को स्पर्श करती है तो समीकरण (3) के मूल समान होंगे। अर्थात्

$$\left(2a^2mc\right)^2 - 4\left(a^2m^2+b^2\right)a^2\left(c^2-b^2\right)=0, \qquad \left(B^2=4AC\right)$$

या $$4a^4m^2c^2 - 4a^2\left(a^2m^2c^2 - a^2b^2m^2 + b^2c^2 - b^4\right)=0$$

या $$a^2b^2m^2 - b^2c^2 + b^4 = 0$$

या $$b^2\left(a^2m^2 - c^2 + b^2\right)=0$$

या $$a^2m^2 - c^2 + b^2 = 0$$

या $$c = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

अतः रेखा (1) दीर्घवृत्त (2) को स्पर्श करेगी यदि

$$c = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \text{ हो।} \qquad (4)$$

c का मान समीकरण (1) में रखने पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx \pm \sqrt{\left(a^2m^2+b^2\right)}$ प्राप्त होता है। अतः रेखा $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ दीर्घवृत्त $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ को स्पर्श करती है तथा स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक होंगे।

$$\left(\mp\frac{a^2m}{\sqrt{\left(a^2m^2+b^2\right)}},\ \pm\frac{b^2}{\sqrt{\left(a^2m^2+b^2\right)}}\right)$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 19: दीर्घवृत्त $x^2+4y^2=8$ तथा सरल रेखा $y=2x-3$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घवृत्त एवं सरल रेखा के समीकरण क्रमशः

$$x^2+4y^2=8 \qquad (1)$$

तथा $$y=2x-3 \qquad (2)$$

हैं। समीकरण (1) एवं (2) को सरल करने पर,

$$x^2+4\left(2x-3\right)^2=8 \quad \text{या} \quad 17x^2-48x+28=0$$

$\Rightarrow$ $x=2,\ 14/17$ अतः (2) से $y=1,\ -23/17$

अतः प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक (2, 1) तथा $\left(\frac{14}{17}, \frac{-23}{17}\right)$ होंगे।

उदाहरण 20: यदि, रेखा $y=x+c$ दीर्घवृत्त $2x^2+3y^2=6$ को स्पर्श करे तो c का मान क्या होगा?

हल : रेखा एंव दीर्घवृत्त का समीकरण क्रमशः हैं

$$y=x+c \qquad (1)$$

तथा $$2x^2+3y^2=6. \qquad (2)$$

समीकरण (2) में y का मान समीकरण (1) से रखने पर

$$2x^2+3\left(x+c\right)^2=6 \quad \text{या} \quad 5x^2+6cx+\left(3c^2-6\right)=0 \qquad (3)$$

चूँकि रेखा (1) दीर्घवृत्त (2) को स्पर्श करती है अतः

$$\left(6c\right)^2-4.5\left(3c^2-6\right)=0 \quad \text{या} \quad 24c^2=120 \quad \Rightarrow \quad c=\pm\sqrt{5}$$

उदाहरण 21: रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ के दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्श रेखा होने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

हल : y का मान रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ से दीर्घवृत्त

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ में रखने पर, $\qquad \frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{p-x\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\frac{1}{b^2}=1$

या $\quad x^2\left(a\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\right) - 2a^2px\cos\alpha + \left(a^2p^2 - a^2b^2\sin^2\alpha\right) = 0 \qquad (1)$

दी हुई रेखा दीर्घवृत्त को स्पर्श करेगी यदि समीकरण (1) के दोनों मूल समान हो अर्थात्

$$\left(-2a^2p\cos\alpha\right)^2 - 4\left(a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\right)\left(a^2p^2 - a^2b^2\sin^2\alpha\right) = 0$$

या $\quad 4a^2b^2\sin^2\alpha\left\{a^2\cos^2\alpha - p^2 + b^2\sin^2\alpha\right\} = 0$

अतः $p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$

प्रश्नमाला 12.6

1. सिद्ध कीजिए कि रेखा $y = x + \sqrt{(5/6)}$ दीर्घवृत्त $2x^2 + 3y^2 = 1$ को स्पर्श करती है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
2. प्रदर्शित कीजिए कि रेखा $x - 3y - 4 = 0$ दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 20$ को स्पर्श करती है।
3. k के किस मान के लिए रेखा $3x - 4y = k$ दीर्घवृत्त $5x^2 + 4y^2 = 20$ को स्पर्श करती है।
4. सिद्ध कीजिए कि रेखा $x + y = \sqrt{\left(a^2+b^2\right)}$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करती है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को रेखा $\ell x + my = n$ द्वारा स्पर्श करने की शर्त ज्ञात कीजिए।
6. दीर्घवृत्त $4x^2 + 3y^2 = 5$ के लिये उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x- अक्ष के साथ 60° का कोण बनाती है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

अतिपरवलय (Hyperbola)

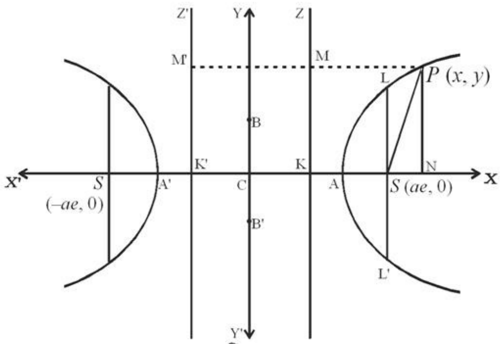
12.32 परिभाषा (Defination):

उस चलित बिन्दु का बिन्दुपथ, जो इस प्रकार से गमन करे कि इसकी एक स्थिर बिन्दु तथा एक स्थिर रेखा से लम्बवत् दूरी का स्थिर अनुपात (e) एक से अधिक हो, **अतिपरवलय** कहलाता है। स्थिर बिन्दु, स्थिर रेखा तथा गतिमान बिन्दु एक ही समतल में होने चाहिये।

12.33 अतिपरवलय का मानक समीकरण (Standard equation of Hyperbola)

माना एक स्थिर बिन्दु S तथा स्थिर रेखा ZK है। P(x, y) कोई चलित बिन्दु है। S से नियता ZK पर लम्ब SK डाला।

माना अतिपरवलय की उत्क्रेन्द्रता e है। SK को A तथा A' पर $e : 1$ के अनुपात में अन्तः तथा बाह्य विभाजन किया। माना C मूल बिन्दु है तथा AA' = $2a$



चित्र 12.30

चूंकि $e>1$

$$\therefore \qquad \frac{SA}{AK}=\frac{e}{1}$$

या $$SA=eAK \qquad (1)$$

तथा $$\frac{SA'}{KA'}=\frac{e}{1}$$

या $$SA'=eKA' \qquad (2)$$

(1) एवं (2) का योग करने पर

$$SA+SA'=e(AK+KA')$$

या $$(CS-CA)+(CS+CA')=e\{(CA-CK)+(CA'+CK)\}$$

या $$2CS=2eCA \qquad [\because CA=CA']$$

या $$CS=ae \qquad (3)$$

(2) में से (1) को घटाने पर,

$$SA'-SA=e(KA'-AK)$$

$$AA'=e\{(CA'+CK)-(CA-CK)\}$$

या $$2a=e\cdot 2CK$$

या $$CK=a/e \qquad (4)$$

अतः नाभि के निर्देशांक $(ae, 0)$ है तथा नियता का समीकरण है, $x=a/e$ अब अतिपरिवलय की परिभाषानुसार,

P की नाभि S से दूरी $=e$ {P से नियता पर लम्ब की लम्बाई}

या $$SP=ePM$$

$$\Rightarrow \qquad SP^2=e^2PM^2$$

या $$(x-ae)^2+(y-0)^2=e^2(CN-CK)^2$$

या $$(x-ae)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

या $$x^2+a^2e^2-2aex+y^2=e^2\left(x^2+\frac{a^2}{e^2}-\frac{2ax}{e}\right)$$

या $$x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$$

या $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1$$

अतः $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

जहाँ $$b^2=a^2(e^2-1)$$

अतः अतिपरिवलय का अभीष्ट समीकरण $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ होगा। $(e>1)$.

12.34 महत्वपूर्ण परिभाषाएँ (Important definitions)

1. **अनुप्रस्थ अक्ष (Transverse axis):** शीर्ष A तथा A' को मिलाने वाली रेखा ACA' अनुप्रस्थ अक्ष कहलाती है इसकी लम्बाई AA' = $2a$ होती है।
2. **संयुग्मी अक्ष (Conjugate axis):** अनुप्रस्थ अक्ष पर लम्ब तथा बिन्दु C से गुजरने वाली रेखा संयुग्मी अक्ष कहलाती है। यदि केन्द्र के दोनों ओर रेखा पर बिन्दु B तथा B' इस प्रकार हो कि $CB = CB' = b$, तब $BB' = 2b$, संयुग्मी अक्ष की लम्बाई कहलाती है।
3. **मुख्य अक्ष (Principal axes):** अतिवरलय के अनुप्रस्थ एवं संयुग्मी अक्षों को मुख्य अक्ष कहते हैं।
4. **नाभि (Focus):** अतिपरवलय की दो नाभि होती है। $S(ae, 0)$ तथा $S'(-ae, 0)$
5. **नियता (Directrix):** अतिपरवलय की दो नियता होती है जो उसके केन्द्र C से समान दूरीयों पर है तथा उनके समीकरण क्रमशः $x = a/e$ तथा $x = -a/e$ है।
6. **शीर्ष (Vertex):** बिन्दु A(a, 0) तथा A' ($-a$, 0) अतिपरवलय के शीर्ष कहलाते हैं।
7. **नाभिलम्ब (Latus rectum):** अतिपरवलय की वह जीवा जो अनुप्रस्थ अक्ष पर लम्ब तथा नाभि से होकर जाती है, नाभिलम्ब कहलाती है। चित्र (12.30) में LSL' नाभिलम्ब है, L एवं L' नाभिलम्ब के सिरे कहलाते है। माना L के निर्देशांक (ae, ℓ) है। चूंकि बिन्दु L अतिपरवलय पर स्थित है अतः

$$\frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell^2}{b^2} = e^2 - 1 \quad \text{या} \quad \ell^2 = \frac{b^2}{a^2} \qquad \left[\because b^2 = a^2\left(e^2 - 1\right)\right]$$

$\therefore \quad \ell = \pm b^2 / a$

अतः नाभिलम्ब की लम्बाई $= LSL' = 2\ell = 2b^2 / a$.

8. **नामीय गुण (Focal property):** माना अतिपरवलय का समीकरण है,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

एवं नाभियों के निर्देशांक $(\pm ae, 0)$ है।

$$\therefore \quad SP = ePM = eNK = e(CN - CK) \qquad SP = e\left(x - \frac{a}{e}\right) = ex - a \qquad (2)$$

इसी प्रकार $S'P = ePM' = eNK' = e(CN + CK')$

या $\quad S'P = e\left(\frac{a}{e} + x\right) = a + ex$

$\therefore \quad S'P - SP = 2a$ (अचर) = अनुप्रस्थ अक्ष

अतः अतिपरवलय के किसी बिन्दु P की नाभीय दूरियों का अन्तर अतिपरवलय के अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई के बराबर होता है।

12.35 विशेष प्रकार के अतिपरवलय (Special types of hyperbola)

(1) आयतीय अतिपरवलय (Rectangular Hyperbola)

यदि किसी अतिपिरवलय के अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष समान हो अर्थात् $a = b$ हो तो वह **आयतीय अतिपरवलय** कहलाता है। अतः इसका समीकरण होगा,

$$x^2 - y^2 = a^2$$

क्योंकि अतिपिरवलय में $\qquad b^2 = a^2\left(e^2 - 1\right)$

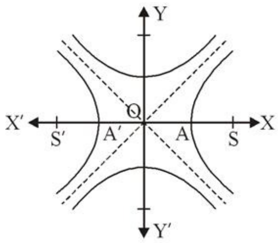
जब $a = b$ हो तब $\qquad a^2 = a^2\left(e^2 - 1\right) \Rightarrow e = \sqrt{2}$

अतः आयतीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ होती है।

(2) संयुग्मी अतिपरलवय (Conjugate Hyperbola)

यदि दो अतिपरवलय इस प्रकार हो कि एक के अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष दूसरे के संयुग्मी तथा अनुप्रस्थ अक्ष है तो वे परस्पर संयुग्मी अतिपरवलय कहलाते है।

निम्न चित्र में यदि एक अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ है तो इसके संयुग्मी अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ होगा।



चित्र 12.31

12.36 अतिपरवलय एवं सरल रेखा का प्रतिच्छेदन (Intersection of hyperbola and a straight line)

माना सरल रेखा तथा अतिपरवलय के समीकरण क्रमशः है

$$y = mx + c \tag{1}$$

तथा
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

समीकरण (1) एवं (2) को सरल करने पर,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

या
$$x^2\left(a^2m^2-b^2\right)+2a^2mcx+a^2\left(c^2+b^2\right)=0 \tag{3}$$

यह x में द्विघातीय समीकरण है जिसके दो मूल होंगे, जिन्हें समीकरण (1) में रखने पर y के दो संगत मान प्राप्त किए जा सकते है। रेखा (1) अतिपरवलय (2) को **स्पर्श करेगी** यदि समीकरण (3) के मूल समान हो

अर्थात्
$$\left(2a^2mc\right)^2-4\left(a^2m^2-b^2\right)\left\{\left(b^2+c^2\right)a^2\right\}=0 \qquad \left[B^2=4AC \text{ से}\right]$$

या
$$b^2\left(a^2m^2-b^2\right)-b^2c^2=0$$

$\Rightarrow$
$$c=\pm\sqrt{\left(a^2m^2-b^2\right)} \tag{4}$$

जो कि रेखा (1) के अतिपरवलय (2) को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध है। c का मान समीकरण (1) में रखने पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y=mx\pm\sqrt{\left(a^2m^2-b^2\right)}$$

प्राप्त होता है तथा स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक होंगे, $\left(\mp\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}},\mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 22: अतिपरवलय $(x-1)^2-2(y-2)^2=-6$ के अक्ष, नाभियां, उत्केन्द्रता तथा नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए।

हल : अतिपरवलय की समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{6})^2}-\frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2}=-1$$

(1) की मानक समीकरण से तुलना करने पर केन्द्र $(1, 2)$, अनुप्रस्थ अक्ष $=2\sqrt{3}$,

संयुग्मी अक्ष $=2\sqrt{6}$, उत्केन्द्रता $=\sqrt{\left(\frac{6+3}{3}\right)}=\sqrt{3}$ (1)

नाभियाँ $=\left[1,\ 2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}\right]$ तथा $\left[1,\ 2-\sqrt{3}\times\sqrt{3}\right]$ या $(1, 5)$ तथा $(1, -1)$

उदाहरण 23: उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (0, 0), नियता $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \ell$ तथा उत्केन्द्रता 5 / 4 हो।

हल : माना $P(h, k)$ अतिपरवलय पर कोई बिन्दु है।

अतः परिभाषानुसार P की नाभि से दूरी $= e$ (नियता की P से लम्बवत् दूरी)

$$\sqrt{\left\{(h-0)^2 + (k-0)^2\right\}} = \frac{5}{4}\left[\frac{h\cos\alpha + k\sin\alpha - \ell}{\sqrt{\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)}}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad 4\sqrt{\left(h^2 + k^2\right)} = 5\left(h\cos\alpha + k\sin\alpha - \ell\right)$$

वर्ग करने पर

$$16h^2 + 16k^2 = 25\left(h\cos\alpha + k\sin\alpha - \ell\right)^2$$

बिन्दु पथ लेने पर अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण

$$16\left(x^2 + y^2\right) = 25\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \ell\right)^2$$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 24: उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ (4, 0) तथा (–4, 0) हो तथा उत्केन्द्रता 8 हो।

हल : नाभियों के मध्य की दूरी $= \sqrt{\left[(4-4)^2 + (0-0)^2\right]} = 8$

$\therefore \quad 2ae = 8$ या $2a \times 8 = 8 \quad \therefore \quad a = 1/2$

पुनः $\quad b^2 = a^2\left(e^2 - 1\right) = \frac{1}{4}(64-1) = \frac{63}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{63}}{2}$

अतः अतिपरवलय का अभीष्ट समीकरण होगा, $\frac{x^2}{(1/2)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{63}/2\right)^2} = 1$

उदाहरण 25: यदि एक अतिपरवलय तथा इसके संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केन्द्रतायें क्रमशः e तथा e' हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$.

हल : माना अतिपरवलय का समीकरण $\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$

है तो इसके संयुग्मी अतिपरवलय का समीकरण होगा

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

(1) की उत्केन्द्रता $\qquad e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} \qquad (3)$

(2) की उत्केन्द्रता $\qquad e'^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2} \qquad (4)$

अतः समीकरण (3) एवं (4) से

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1$$

उदाहरण 26: सरल रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ द्वारा अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

हल : y का मान रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ से अतिपरवलय

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ में रखने पर, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{b^2}\left[\frac{p - x\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]^2 = 1$

या $\quad x^2\left(b^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\alpha\right) + 2a^2px\cos\alpha - \left(a^2b^2\sin^2\alpha + a^2p^2\right) = 0 \quad (1)$

दी गई रेखा अतिपरवलय को स्पर्श करेगी यदि समीकरण (1) के मूल समान हो अर्थात् $\left(B^2 = 4AC\right)$

या $\quad \left(2a^2p\cos\alpha\right)^2 = -4\left(b^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2 a\right)\left(a^2b^2\sin^2\alpha + a^2p^2\right)$

या $\quad 4a^4p^2\cos^2\alpha = -4\left[a^2b^4\sin^4\alpha + a^2b^2p^2\sin^2\alpha - a^4b^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - p^2a^4\cos^5\alpha\right]$

अतः $\quad a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha = p^2$ यही अभीष्ट प्रतिबन्ध है।

प्रश्नमाला 12.7

1. अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ के अक्षों की लम्बाइयाँ, नाभियाँ, उत्केन्द्रता, नाभिलम्ब तथा नियताओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।
2. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी
   (i) नाभि $(2, 1)$ नियता $x + 2y - 1 = 0$ तथा उत्केन्द्रता 2 है।
   (ii) नाभि $(1, 2)$ नियता $2x + y = 1$ तथा उत्केन्द्रता $\sqrt{3}$ है।
3. अतिपरवलय $x^2 - 6x - 4y^2 - 16y - 11 = 0$ के, शीर्ष, नाभियाँ, नाभिलम्ब तथा उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।
4. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि
   (i) नाभिलम्ब की लम्बाई 8 तथा संयुग्मी अक्ष $= 1/2$ (नाभियों के मध्य की दूरी)
   (ii) नाभियों के मध्य की दूरी 16 तथा संयुग्मी अक्ष $\sqrt{2}$ हो।
   (iii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई 7 तथा बिन्दु $(3, -2)$ से गुजरता हो।
5. सिद्ध कीजिए कि सरल रेखाओं $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = m$ तथा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ अतिपरवलय होता है।
6. अतिपरवलय $5x^2 - 9y^2 = 45$ तथा रेखा $y = x + 2$ के उभयनिष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए।
7. सिद्ध कीजिए कि रेखा $\ell x + my = 1$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करेगी यदि $a^2\ell^2 - b^2m^2 = 1$.
8. अतिपरवलय $4x^2 - 4y^2 = 1$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4y = 5x + 7$ के समान्तर हों।
9. सिद्ध कीजिए कि अतिपरवलय की किसी स्पर्श रेखा पर नाभि से डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दु पथ वृत्त होता है।

विविध प्रश्नमाला–12

1. वृत्त $9x^2 + y^2 + 8x = 4\left(x^2 - y^2\right)$ की त्रिज्या है :
   (A) 1 (B) 2 (C) 4 / 5 (D) 5 / 4
2. उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र प्रथम पाद में (α, β) है तथा x–अक्ष को स्पर्श करता है] होगाः
   (A) $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0$
   (C) $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 2\beta y + \alpha^2 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \alpha^2 = 0$

3. यदि रेखा $y = mx + c$ वृत्त $x^2 + y^2 = 4y$ को स्पर्श करें तो c का मान है :

(A) $2+\sqrt{1+m^2}$ (B) $2-\sqrt{1+m^2}$ (C) $2+2\sqrt{1+m^2}$ (D) $1+\sqrt{1+m^2}$

4. रेखा $3x+4y=25$ वृत्त $x^2+y^2=25$ को किस बिन्दु पर स्पर्श करती है :

(A) $(4,3)$ (B) $(3,4)$ (C) $(-3,-4)$ (D) $(3,-4)$

5. एक शांकवीय परिच्छेद परवलय होगा, यदि

(A) $e=0$ (B) $e<1$ (C) $e>1$ (D) $e=1$

6. परवलय $x^2=-8y$ की नियता का समीकरण है

(A) $y=-2$ (B) $y=2$ (C) $x=2$ (D) $x=-2$

7. परवलय $x^2+4x+2y=0$ का शीर्ष है:

(A) $(0, 0)$ (B) $(2, -2)$ (C) $(-2, -2)$ (D) $(-2, 2)$

8. यदि किसी परवलय की नाभि $(-3, 0)$ तथा नियता $x+5=0$ हो तो इसका समीकरण होगा

(A) $y^2=4(x+4)$ (B) $y^2+4x+16=0$ (C) $y^2+4x=16$ (D) $x^2=4(y+4)$

9. किसी परवलय के शीर्ष एवं नाभि क्रमशः $(2, 0)$ तथा $(5, 0)$ हो, तो इसका समीकरण होगा

(A) $y^2=12x+24$ (B) $y^2=12x-24$ (C) $y^2=-12x-24$ (D) $y^2=-12x+24$

10. परवलय $x^2=-8y$ की नाभि है

(A) $(2, 0)$ (B) $(0, 2)$ (C) $(-2, 0)$ (D) $(0, -2)$

11. परवलय $y^2=x$ की किसी स्पर्श रेखा का समीकरण है

(A) $y=mx+1/m$ (B) $y=mx+1/4m$ (C) $y=mx+4/m$ (D) $y=mx+4m$

12. यदि रेखा $2y-x=2$ परवलय $y^2=2x$ को स्पर्श करती हो, तो स्पर्श बिन्दु है

(A) $(4, 3)$ (B) $(-4, 1)$ (C) $(2, 2)$ (D) $(1, 4)$

13. परवलय $x^2=8y$ की रेखा $x+2y+1=0$ के समान्तर स्पर्श रेखा का समीकरण है

(A) $x+2y+1=0$ (B) $x-2y+1=0$ (C) $x+2y-1=0$ (D) $x-2y-1=0$

14. परवलय $y^2=4x$ का एक अभिलम्ब है

(A) $y=x+4$ (B) $y+x=3$ (C) $y+x=2$ (D) $y+x=1$

15. दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2=12$ के अर्द्धनाभिलम्ब की लम्बाई होगी

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

16. दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2=12$ की उत्केन्द्रता होगी

(A) -2 (B) ½ (C) 1 (D) 2

17. यदि रेखा $y=mx+c$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का स्पर्श करती है तो c का मान होगा

(A) $c=\frac{a}{m}$ (B) $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (C) $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ (D) $c=a\sqrt{1+m^2}$

18. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>a)$ के नाभियों के निर्देशाँक होंगे

(A) $(\pm ae, 0)$ (B) $(\pm be, 0)$ (C) $(0, \pm ae)$ (D) $(0, \pm be)$

19. आयतीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता होगी

(A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

20. अतिपरवलय $9x^2-16y^2=144$ की उत्केन्द्रता होगी

(A) 1 (B) 0 (C) 5 / 16 (D) 5 / 4

21. उस वृत्त का समीकरण लिखिए जिसका केन्द्र $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ तथा त्रिज्या a है।

22. यदि वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ के बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) पर स्पर्श रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हो तो सिद्ध कीजिए।

$x_1x_2+y_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+g^2+f^2=0$

23. r त्रिज्या वाले उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र प्रथम पाद में स्थित है तथा y–अक्ष को मूल बिन्दु से h दूरी पर स्पर्श करता है। मूल बिन्दु से होकर जाने वाली दूसरी स्पर्श रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

24. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु (α, β) पर खींची गई स्पर्श रेखा अक्षों को क्रमशः A एवं B बिन्दुओं पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $\frac{a^4}{2\alpha\beta}$ होगा, जहाँ O मूल बिन्दु है।

25. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों के साथ a^2 क्षेत्रफल वाला त्रिभुज निर्मित करती है।

26. परवलय $x^2-4x-8y=4$ की नाभि के निर्देशांक लिखिए।

27. परवलय $x^2-4x-4y+4=0$ की उत्केन्द्रता लिखिए।

28. रेखा $\ell x+my+n=0$ के परवलय $y^2=4ax$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध लिखिए।

29. उस परवलय का समीकरण लिखिए। जिसका शीर्ष (0, 0) तथा नाभि (0, $-a$) हो।

30. परवलय $9y^2-16x-12y-57=0$ के अक्ष का समीकरण लिखिए।

31. दीर्घवृत्त $\frac{x^2-ax}{a^2}+\frac{y^2-by}{b^2}=0$ के केन्द्र के निर्देशांक लिखिए।

32. रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ के दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध लिखिए।

33. अतिपरवलय का समीकरण लिखिए जिसकी अनुप्रस्थ अक्ष और संयुगी अक्ष क्रमशः 4 तथा 5 है।

34. अतिपरवलय $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ के केन्द्र के निर्देशांक लिखिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक समतल, द्विशंकु (जिसका अर्द्धशीर्ष कोण α हो) की अक्ष को कोण θ पर काटता है और समतल

   (क) शंकु के शीर्ष से गुजरता है तो प्रतिच्छेद वक्र रेखा युग्म होगा जो

   (i) वास्तविक तथा भिन्न होगा, यदि $\theta < \alpha$ (ii) वास्तविक तथा संपाती होगा, यदि $\theta = \alpha$

   (iii) काल्पनिक होगा, यदि $\theta > \alpha$

   (ख) द्विशंकु के शीर्ष से नहीं गुजरता है तो प्रतिच्छेदित वक्र–

   (i) वृत्त होगा यदि $\theta = 90^o$ (ii) परवलय होगा यदि $\theta = \alpha$

   (iii) दीर्घवृत्त होगा यदि $\theta > \alpha$ (iv) अतिपरवलय होगा $\theta < \alpha$

2. वृत्त का केन्द्रीय रूप में समीकरण

   $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$; केन्द्र (h,k), त्रिज्या $= a$

3. वृत्त का समीकरण मानक रूप में $x^2 + y^2 = a^2$

4. वृत्त का समीकरण (व्यापक रूप में) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$;

   केन्द्र $(-g,-f)$, त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

5. रेखा $y = mx + c$, वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करेगी यदि $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

6. स्पर्श रेखा : (क) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के

   (i) बिन्दु (x_1, y_1) पर $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$

   (ii) प्रवणता (m) रूप में $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ स्पर्श बिन्दु $\left(\mp\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

   (ख) वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर

   $xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0$

7. अभिलम्ब : वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के

   (i) बिन्दु (x_1, y_1) पर $xy_1 - yx_1 = 0$

   (ii) प्रवणता (m) रूप $x + my = 0$, जहाँ m वृत्त की स्पर्श रेखा की प्रवणता है।

8. परवलय का मानक समीकरण $y^2 = 4ax$

9. परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष के निर्देशांक (0, 0) नाभि के निर्देशांक$(a, 0)$, नाभि लम्ब की लम्बाई $4a$ नियता का समीकरण $x + a = 0$

10. (i) रेखा $y = mx + c$ के परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध $c = a/m$.

    (ii) स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

11. परवलय $y^2 = 4ax$ से संबंधित मानक सूत्र

    (i) बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा $yy_1 = 2a(x + x_1)$

    (ii) ढाल रूप में स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + \frac{a}{m}$

    (iii) बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$

    (iv) ढाल रूप में अभिलम्ब $y = mx - 2am - am^3$

12. दीर्घवृत्त का मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

13. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ में

(i) नाभियां $(\pm ae,\ 0)$ (ii) नियताएँ $x=\pm a/e$

(iii) नाभिलम्ब की लम्बाई $=\frac{2b^2}{a}$ (iv) उत्केन्द्रता $e=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$

14. (i) रेखा $y=mx+c$ का दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्शी होने का प्रतिबन्ध $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

(ii) स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left[\mp\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right]$

15. अतिपरवलय का मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, जहाँ $b^2=a^2\left(e^2-1\right)$

16. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$ में

(i) नाभियाँ $(\pm ae, 0)$ (ii) नियताएँ $x=\pm a/e$

(iii) नाभिलम्ब की लम्बाई $=\frac{2b^2}{a}$ (iv) उत्केन्द्रता $e=\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$

17. (i) रेखा $y=mx+c$ का अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्शी होने का प्रतिबन्ध $c=\pm\sqrt{\left(a^2m^2-b^2\right)}$

(ii) स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left[\mp\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}},\ \mp\frac{b^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right]$

18. आयतीय अतिपरवलय $x^2-y^2=a^2$ की उत्केन्द्रता $e=\sqrt{2}$

उत्तरमाला

उत्तरमाला 12.1

1. (i) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$; (ii) $x^2+y^2-29x-2by+2ab=0$

2. (i) केन्द्र (3, 4); त्रिज्या 5 ; (ii) केन्द्र $\left(\dfrac{a}{\sqrt{1+k^2}}, \dfrac{ak}{\sqrt{1+k^2}}\right)$, त्रिज्या a ; (iii) केन्द्र (0, 0) ; त्रिज्या ½

3. $x^2+y^2-2rx-2y\sqrt{r^2-\ell^2}+\left(r^2-\ell^2\right)=0$

4. $x^2+y^2-6x\pm 6\sqrt{2}y+9=0$

5. केन्द्र (4, –5), त्रिज्या $\sqrt{53}$

6. केन्द्र $\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$ त्रिज्या $\dfrac{1}{4}$

7. $x^2+y^2-7x+5y-14=0$

8. $x^2+y^2+4x-21=0$ तथा $x^2+y^2-12x+11=0$

9. $x^2+y^2-ax-by=0$

प्रश्नमाला 12.2

1. $\left[\dfrac{48\pm 3\sqrt{481}}{25}, \dfrac{36\mp 4\sqrt{481}}{25}\right]$; $\dfrac{2}{5}\sqrt{481}$

3. $2\sqrt{c^2-\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$

4. $k=40$ या -10

5. (i) $m^2\left(a^2-r^2\right)+2ma\left(c-b\right)+\left(c-b\right)^2=r^2$ (ii) $n^2=a^2\left(l^2+m^2\right)$

6. (i) $4x+3y-40=0$ तथा $5x+12y-104=0$ (ii) $y=\sqrt{3}\pm 4$

7. $c=1$

8. $5x+12y-169=0$

प्रश्नमाला 12.3

1. (i) $16x^2+8xy+y^2-74x-78y+212=0$; (ii) $y^2=4x+16$

2.

	शीर्ष	अक्ष	नाभिलम्ब	नाभि
(i)	$(-2, 4)$	$y=4$	8	$(0, 4)$
(ii)	$(4, 9/2)$	$x=4$	2	$(4, 4)$

5. $9y^2=4ax$

प्रश्नमाला 12.4

1. $(2, -3)$ 2. $\dfrac{80}{9}$ 4. $am^2 = \ell n$ 6. $a\sin^2\alpha = -p\cos\alpha$

7. (i) $8x - 12y + 27 = 0$; (ii) $x + 2y + 8 = 0$; $y + 2x + \dfrac{4}{9} = 0$

8. $-\dfrac{27}{4}$ 9. $x^2 - 5xy + 2y^2 + 42x - 20y + 16 = 0$

10. (i) $x + y - 6 = 0$; (ii) $x + y + 9 = 0$

11. (i) $2x - y - 12 = 0$; (ii) $3x - y - 33 = 0$

प्रश्नमाला 12.5

1. (i) $9x^2 + 9y^2 + 2xy + 12x - 12y + 4 = 0$

   (ii) $216x^2 + 209y^2 - 24xy + 906x + 1342y + 2924 = 0$

2.

	उत्केन्द्रता	नाभिलम्ब	नाभि
(i)	$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$	$\dfrac{4}{9}$	$\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$
(ii)	$\dfrac{\sqrt{21}}{5}$	$\dfrac{8}{5}$	$\left(0, \pm\sqrt{21}\right)$
(iii)	$\dfrac{1}{2}$	3	$(3, 1), (1, 1)$

3. $\dfrac{x^2}{52} + \dfrac{y^2}{13} = 1$ 4. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\dfrac{x^2}{9/4} + \dfrac{y^2}{5/4} = 1$; दीर्घवृत्त

प्रश्नमाला 12.6

1. $\left[-\sqrt{(3/10)}, \sqrt{(2/15)}\right]$ 3. $\mp 2\sqrt{29}$

4. $\left[\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$ 5. $a^2\ell^2 + b^2m^2 = n^2$

6. $y = \sqrt{3}x \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{65}{3}}$; $\left[\pm\dfrac{15}{2\sqrt{65}}, \mp\dfrac{10}{3}\sqrt{\dfrac{15}{65}}\right]$

प्रश्नमाला 12.7

1. अनुप्रस्थ अक्ष $= 8$ संयुग्मी अक्ष $= 6$

   उत्केन्द्रता $= 5/4$ नाभियां $(\pm 5, 0)$

   नाभिलम्ब की लम्बाई $= 9/4$ नियता $= \pm\dfrac{16}{5}$

2. (i) $x^2 - 16xy - 11y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$

   (ii) $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 14y - 22 = 0$

3. $(5, -2)$, $(1, -2)$; $(3 \pm \sqrt{5}, -2)$; 1; $\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. (i) $x^2 - 3y^2 = 144$; (ii) $x^2 - y^2 = 32$; (iii) $65x^2 - 36y^2 = 441$

7. $(-9/2, -5/2)$ 9. $4y = 5x \pm 3/2$

विविध प्रश्नमाला 12

1. (C)	2. (A)	3. (C)	4. (B)	5. (C)	6. (B)	7. (D)
8. (A)	9. (B)	10. (D)	11. (B)	12. (C)	13. (A)	14. (B)
15. (A)	16. (B)	17. (C)	18. (D)	19. (C)	20. (D)	

21. $x^2 + y^2 - 2ax\cos\alpha - 2ay\sin\alpha = 0$ 23. $(x-r)^2 + (y-h)^2 = r^2$; $(r^2 - h^2)x + 2rhy = 0$

25. $y = \pm x \pm a\sqrt{2}$ 26. (2, 1) 27. 1 28. $\ell n = am^2$ 29. $x^2 = -4ay$

30. $3y = 2$ 31. $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 32. $p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$ 33. $25x^2 - 16y^2 = 100$ 34. $(1, -2)$

13

प्रकीर्णन के माप
(Measure of Dispersion)

13.01 प्रस्तावना (Introduction) :

पिछली कक्षा में हमने केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों (माध्य,माध्यिका, बहुलक) का अध्ययन किया था। लेकिन सांख्यिकीय तथ्यों का विश्लेषण करके निष्कर्ष निकालने की प्रक्रिया में केन्द्रीय प्रवृति के माप परिपूर्ण नहीं हैं। केवल इन्हीं मापों के प्रयोग के आधार पर निष्कर्ष निकालने पर बहुधा त्रुटि रह जाती है तथा भ्रामक परिणाम प्राप्त होते हैं, केन्द्रीय प्रवृतियों से हमें श्रेणी के केन्द्रीय मान का पता चलता है जो श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है परन्तु हमें यह नहीं मालूम पड़ता कि श्रेणी के विभिन्न मान केन्द्रीय मान के कितने पास हैं या कितने दूर फैले हुए हैं। उदाहरणार्थ निम्न सारणी में दिए गए विद्यार्थियों के तीन समूहों के गणित विषय में प्राप्ताँक इस प्रकार हैं :

समूह A:	10	10	10	10	10	10
समूह B:	9	10	11	8	10	12
समूह C:	0	5	10	10	16	19

उपर्युक्त प्रत्येक समूह का माध्य 10 है परन्तु प्राप्ताँकों के इन समूहों के आकार में बहुत अन्तर है। प्रथम समूह A के सभी प्राप्ताँक समान हैं और उनका माध्य से कोई बिखराव नहीं है। अतः माध्य पूर्ण रूप से समूह का प्रतिनिधित्व कर रहा है द्वितीय समूह B में प्राप्ताँकों में भिन्नता है और माध्य से उनका विचलन -2 से $+2$ के मध्य है। अतः माध्य सभी पदों का यथोचित प्रतिनिधित्व नहीं कर रहा है। समूह C के प्राप्ताँकों के माध्य से विचलन -10 से $+9$ के मध्य है जो बहुत अधिक है अतः माध्य समूह C के प्राप्ताँकों का उचित प्रतिनिधित्व नहीं कर रहा है। अतः श्रेणी के बारे में पूर्ण ज्ञान प्राप्त करने के लिए केन्द्रीय मान ही पर्याप्त नहीं है बल्कि विभिन्न चर के मानों का केन्द्रीय मान (central value) से औसत अन्तर श्रेणी की रचना तथा स्वरूप आदि की जानकारी भी आवश्यक है। इसके लिए इस अध्याय में हम श्रेणी के विभिन्न मानों के बिखराव के माप का अध्ययन करेंगें।

13.02 प्रकीर्णन (Dispersion) :

किसी श्रेणी के पदों का माध्य से बिखराव प्रकीर्णन कहलाता है । किसी श्रेणी का प्रकीर्णन उसके विभिन्न पदों के विचरण (variation) या अन्तर का माप है ।

प्रकीर्णन के माप (Measures of dispersion) : प्रकीर्णन के माप दो प्रकार के होते हैं

(I) निरपेक्ष माप (Absolute measure)

(II) सापेक्ष माप (Relative measure)

प्रकीर्णन की सीमा या मात्रा बताने वाली संख्या निरपेक्ष होती है। प्रकीर्णन के वे माप जिनकी इकाई वही होती है जो चर के विभिन्न मानों की होती है वे निरपेक्ष माप कहलाते हैं। ये माप दो या दो से अधिक श्रेणियों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए उपयुक्त नहीं होते हैं। प्रकीर्णन के सापेक्ष माप अनुपात या प्रतिशत में ज्ञात किए जाते हैं। अतः यह चर के विभिन्न मानों की इकाई पर निर्भर नहीं करते। प्रकीर्णन का सापेक्ष माप, निरपेक्ष माप व माध्य जिससे प्रकीर्णन ज्ञात किया गया है, का अनुपात होता है। इस प्रकार ज्ञात किए गए अनुपात को प्रतिशत के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। सापेक्ष माप को प्रकीर्णन गुणांक भी कहा जाता है। दो या अधिक श्रेणियों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए सापेक्ष माप अधिक उपयुक्त रहते हैं।

साधारणतया सांख्यिकी में प्रकीर्णन के निम्नलिखित माप काम में लिए जाते हैं :

1. परास या विस्तार (Range)
2. चतुर्थक विचलन (Quartile deviation)
3. माध्य विचलन (Mean deviation)
4. मानक विचलन एवं प्रसरण (Standard deviation and variance)

13.03 परास या विस्तार (Range) :

(क) चरम मानों पर आधारित परास : श्रेणी में चर के उच्चतम मान (H) और निम्नतम मान (L) के अन्तर को परास (R) या विस्तार कहते हैं। उदाहरणार्थः

यदि एक कक्षा के विद्यार्थियों में सबसे लम्बे विद्यार्थी की लम्बाई 72 इंच तथा सबसे छोटे विद्यार्थी की लम्बाई 58 इंच है, तो कक्षा में विद्यार्थियों की लम्बाई का परास 72–58 = 14 इंच होगा।

यदि चर संतत श्रेणी के रूप में दिये गये हों, तो सबसे बड़े वर्ग की उच्च सीमा तथा सबसे छोटे वर्ग की निम्न सीमा का अन्तर ही परास कहलाता है।

उदाहरण 1: यदि कोई श्रेणी $5-10, 10-15, 15-20, 20-25, 25-30, 30-35$ के वर्गों में विभाजित है तो श्रेणी का परास $35-5=30$ होगा।

परास वास्तव में प्रकीर्णन का एक निरपेक्ष (absolute) मान है, जो चर मूल्यों के केवल चरम मानों पर ही निर्भर करता है। अतः दो श्रेणियों के प्रकीर्णन की तुलना करने के लिए यह विधि विशेष उपयोगी नहीं है। जैसे एक श्रेणी बहुत बड़ी हो, दूसरी श्रेणी बहुत छोटी हो तो एक का परास अधिक होगा व दूसरी का कम। परन्तु यह भी हो सकता है कि जिसका परास कम है उसके चर मूल्यों में बिखराव असमान हो तथा जिसका परास अधिक है उसके चर मूल्यों में बिखराव में समानता हो।

उदाहरण 2: हम निम्न दो श्रेणियों का अवलोकन करते हैं :

श्रेणी 'क' – 2, 3, 5, 8, 11, 25, 27

श्रेणी 'ख' – 4, 8, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56

श्रेणी 'क' में 7 पद हैं तथा 'ख' में 13 पद हैं। दोनों के परास क्रमशः 25 और 52 हैं। यहाँ हम देखते हैं कि श्रेणी 'क' के चर मूल्यों में बिखराव असमान होते हुए भी परास कम है जबकि श्रेणी 'ख' के बिखराव में समानता होते हुए भी परास अधिक है। अतः प्रकीर्णन के माप को और अधिक युक्ति संगत बनाने के लिए परास गुणाँक का प्रयोग करते है :

परास गुणांक (Coefficient of range) $(\text{C.R.}) = (H-L)/(H+L)$

ऊपर दिये गए उदाहरण 1 के लिए

परास गुणांक $(\text{C.R.}) = \dfrac{H-L}{H+L} = \dfrac{35-5}{35+5} = \dfrac{30}{40} = .75$ या 75%

उदाहरण 3: निम्न बारम्बारता बंटन का परास एवं परास गुणांक ज्ञात कीजिए :

वर्ग	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
बारम्बारता	6	13	10	5	3

हल : सबसे छोटा वर्ग 10–20 हैं तथा इसकी निम्न सीमा 10 है।

अतः न्यूनतम मूल्य (L) = 10

सबसे बड़े वर्ग 50–60 की उपरि सीमा 60 है। अतः अधिकतम मूल्य (H) = 60

$\therefore$ परास (R) = H–L = 60–10 =50

परास गुणाँक $(\text{C.R}) = \dfrac{H-L}{H+L} = \dfrac{60-10}{60+10} = 0.714$ या 71.4%

(ख) अन्तर चतुर्थक परास (Inter–Quartile Range) : चर श्रेणी के तृतीय और प्रथम चतुर्थकों के अन्तर को अन्तर–चतुर्थक परास कहते हैं। यह परास की अपेक्षा अधिक प्रतिनिधित्व करने वाला माप है। इसे बंटन के मध्यवर्ती 50% (Middle 50%) मूल्यों का परास भी कहते हैं। इसको निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं :

अन्तर चतुर्थक परास (I.Q.R.) $= Q_3 - Q_1$

अन्तर चतुर्थक परास गुणाँक $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

जहाँ Q_3 तथा Q_1 की गणना निम्न सूत्रों से करते हैं

$$Q_1 = \ell + \frac{(N/4)-F}{f} \times h, \quad Q_3 = \ell + \frac{3(N/4)-F}{f} \times h$$

यहाँ ℓ चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा, h वर्ग अन्तराल, F चतुर्थक वर्ग के पूर्व वर्ग की संचयी बारम्बारता, f चतुर्थक वर्ग की बारम्बारता तथा N पदों की कुल संख्या है।

(ग) दशमक एवं शतमक परास (Decile and percentile range) : चर श्रेणी की सम्पूर्ण बारम्बारताओं को दस समान भागों में विभाजित करने वाले विभाजन मूल्य को दशमक तथा सम्पूर्ण बारम्बारताओं को सौ बराबर भागों में विभाजित करने वाले विभाजन मूल्य को शतमक कहते हैं।

दशमक (Decile) की सहायता से परास निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है :

दशमक परास = $D_9 - D_1$

जहाँ i वाँ दशमक $D_i = l + \frac{(i(N/10)-F)}{f} \times h, \quad i = 1, 2, 3, ..., 9$

शतमक परास चर श्रेणी के मध्यवर्ती 80% सामान्य पदों पर आधारित होता है। यह 90 वाँ और 10 वाँ शतमक अंतर होता है जिसे शतमक परास कहते है। इसकी निम्न सूत्र से गणना की जाती है :

शतमक परास $= P_{90} - P_{10}$

जहाँ i वाँ दशमक $P_i = l + \frac{(i(N/100)-F)}{f} \times h, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 99$

उदाहरण 4: निम्न बारम्बारता बंटन से अन्तर चतुर्थक परास एवं चतुर्थक परास गुणांक, दशमक परास एवं शतमक परास की गणना कीजिए :

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारम्बारता	1	8	12	6	3

हल : दिए गए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0–10	1	1
10–20	8	9
20–30	12	21
30–40	6	27
40–50	3	30

चतुर्थक परास की गणना :

$$Q_3 = \ell + \frac{3(N/4)-F}{f} \times h = 30 + \frac{3\times(30/4)-21}{6} \times 10 = 30 + \frac{1\cdot5\times10}{6} = 30 + 2\cdot5 = 32\cdot5$$

$$Q_1 = \ell + \frac{(N/4)-F}{f} \times h = 10 + \frac{(30/4)-1}{8} \times 10 = 10 + \frac{6\cdot5\times10}{8} = 10 + 8\cdot12 = 18\cdot12$$

अन्तर चतुर्थक परास $= Q_3 - Q_1 = 32\cdot5 - 18\cdot12 = 14\cdot38$

अन्तर चतुर्थक परास गुणाँक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{32.5 - 18\cdot12}{32.5 + 18\cdot12} = \frac{14\cdot38}{50\cdot62} = 0\cdot284$

दशमक परास की गणना :

$$\frac{9N}{10}=\frac{9\times30}{10}=27$$

27 के बराबर या इससे ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 27 है जिसके संगत वर्ग 30–40 है

$\therefore \quad l=30,\ f=6,\ F=21,\ h=10$

अतः $D_9=30+\frac{9\times(30/10)-21}{6}\times10=30+\frac{6\times10}{6}=30+10=40$

पुनः $\frac{1N}{10}=\frac{1\times30}{10}=3$

3 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 9 है जिसके संगत वर्ग 10–20 है

$\therefore \quad l=10,\ f=8,\ F=1,\ h=10$

अतः $D_1=10+\frac{1\times(30/10)-1}{8}\times10=10+\frac{2\times10}{8}=10+2\cdot5=12\cdot5$

$\therefore$ दशमक परास $=D_9-D_1=40-12\cdot5=27\cdot5$

शतमक परास की गणना :

$$\frac{90N}{100}=\frac{90\times30}{100}=27$$

27 के बराबर या इससे ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 27 है जिसके संगत वर्ग 30–40 है

$\therefore \quad l=30,\ f=6,\ F=21,\ h=10$

अतः $P_{90}=30+\frac{90\times(30/100)-21}{6}\times10=30+\frac{6\times10}{6}=30+10=40$

$$\frac{10N}{100}=\frac{10\times30}{100}=3$$

3 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 9 है जिसके संगत वर्ग 10–20 है

$\therefore \quad l=10, f=8, F=1, h=10$

अतः $P_{10}=10+\frac{10\times(30/100)-1}{8}\times10=10+\frac{2\times10}{8}=10+2\cdot5=12\cdot5$

$\therefore$ शतमक परास $=P_{90}-P_{10}=40-12\cdot5=27\cdot5$

13.04 चतुर्थक विचलन (Quartile deviation) :

चतुर्थक विचलन तृतीय और प्रथम चतुर्थकों के अन्तर का आधा होता है। अन्तर चतुर्थक परास का आधा मूल्य चतुर्थक विचलन होता है। इसी कारण इसे अर्द्ध–अन्तर चतुर्थक परास (Semi–inter quartile range) भी कहते है

इसे निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है :

चतुर्थक विचलन $(Q.D.)=\frac{Q_3-Q_1}{2}$

चतुर्थक विचलन गुणांक (Coefficient of quartile deviation): चतुर्थक विचलन प्रकीर्णन का निरपेक्ष माप है। दो या अधिक चर श्रेणियों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए सापेक्ष माप ज्ञात करना पड़ता है। इसे चतुर्थक विचलन का गुणांक कहते हैं और इसकी निम्न सूत्र द्वारा गणना की जाती है:

चतुर्थक विचलन गुणाँक $=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$

उदाहरण 5: 31 छात्रों की लम्बाई इंचों में दी गई हैं : 55, 56, 57, 57, 58, 58, 59, 59, 60, 60, 60, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 63, 64, 64, 65, 65, 65, 66, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 70 इनका चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ कुल पद 31 हैं

श्रेणी का प्रथम चतुर्थक $Q_1 = \frac{31+1}{4} = 8$, अतः 8 वें पद का मूल्य = 59

श्रेणी का तृतीय चतुर्थक $Q_3 = \frac{3(31+1)}{4} = 24$, अतः 24 वें पद का मूल्य = 66

इसलिए चतुर्थक विचलन = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{66-59}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

असंतत श्रेणी में चतुर्थक विचलन ज्ञात करने के लिए नीचे एक उदाहरण दिया गया है।

उदाहरण 6: निम्न बारम्बारता बंटन का चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणाँक ज्ञात कीजिए।

वजन (किग्रा)	**32**	**35**	**38**	**43**	**50**	**56**	**60**
बारम्बारता	**2**	**4**	**8**	**9**	**4**	**3**	**1**

हल : दी गई तालिका से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

वजन (किग्रा)	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
32	2	2
35	4	6
38	8	14
43	9	23
50	4	27
56	3	30
60	1	31

$Q_1 = \frac{(31+1)}{4} = 8$ अर्थात् 8 वें पद का मूल्य = 38 किग्रा

$Q_3 = \frac{3(31+1)}{4} = 24$ अर्थात् 24 वें पद का मूल्य = 50 किग्रा

चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{50-38}{2} = \frac{12}{2} = 6$

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{50-38}{50+38} = \frac{12}{88} = 0\cdot136$ या $13\cdot6\%$

संतत श्रेणी में चतुर्थक विचलन निकालने की विधि वही है जो सामान्य श्रेणी में होती है। इसमें Q_1 तथा Q_3 की गणना निम्न सूत्रों से करते हैं

$$Q_1 = \ell + \frac{(N/4) - F}{f} \times h \qquad \text{तथा} \qquad Q_3 = \ell + \frac{(3N/4) - F}{f} \times h$$

जहाँ ℓ = चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा, h = वर्ग अन्तराल, N = कुल बारम्बारता, f = चतुर्थक वर्ग की बारम्बारता, F = चतुर्थक वर्ग के पूर्व वाले वर्ग की संचयी बारम्बारता है।

उदाहरण 7: निम्न बारम्बारता बंटन का चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए :

मजदूरी (रु. में)	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
बारम्बारता	11	26	63	81	35	21	13

हल :

मजदूरी	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
30–40	11	11
40–50	26	37
50–60	63	100
60–70	81	181
70–80	35	216
80–90	21	237
90–100	13	250

$$\frac{N+1}{4}=\frac{(250+1)}{4}=\frac{251}{4}=62\cdot 75 \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$Q_1=50+\frac{62.75-37}{63}\times 10=50+\frac{25\cdot 75}{63}\times 10=54\cdot 09$$

$$\frac{3(N+1)}{4}=\frac{3(250+1)}{4}=\frac{753}{4}=188\cdot 25 \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$Q_3=70+\frac{188\cdot 25-181}{35}\times 10=70+\frac{7\cdot 25}{35}\times 10=72\cdot 07$$

अतः चतुर्थक विचलन $=\dfrac{Q_3-Q_1}{2}=\dfrac{72\cdot 07-54\cdot 09}{2}=8\cdot 99$

तथा चतुर्थक विचलन गुणांक $=\dfrac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}=\dfrac{72\cdot 07-54\cdot 09}{72\cdot 07+54\cdot 09}=\dfrac{17\cdot 98}{126\cdot 16}=\cdot 14$

प्रश्नमाला 13.1

1. चतुर्थक विचलन गुणांक का सूत्र लिखिए।
2. किसी चर श्रेणी का $Q_1=61$ व $Q_3=121$ है, तो उसका चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए।
3. निम्नलिखित आंकड़ों के चतुर्थक विचलन तथा चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए।
   3, 8, 11, 13, 17, 19, 20, 22, 23, 27, 31
4. निम्नलिखित सारणी में परास एवं परास गुणांक ज्ञात कीजिए।

x	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
f	4	5	6	3	2	1	3	5

5. निम्न श्रेणी के अन्तर चतुर्थक परास एवं उसके गुणांक की गणना कीजिए।

x	1	3	5	7
f	10	15	3	2

6. निम्न आंकड़ो से परास गुणांक ज्ञात कीजिए।

आकार	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
बारम्बारता	2	4	6	8

7. निम्न आंकड़ों के आधार पर दशमक परास एवं शतमक परास ज्ञात कीजिए।

x	$0-10$	$10-20$	$20-30$	$30-40$	$40-50$	$50-60$	$60-70$	$70-80$
f	3	9	8	5	7	5	7	6

8. निम्न बारम्बारता बंटन में दशमक परास एवं शतमक परास ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक x	$0-10$	$10-20$	$20-30$	$30-40$	$40-50$
बारम्बारता f	5	8	20	14	3

13.05 माध्य विचलन (Mean deviation) :

किसी भी श्रेणी में चर के विभिन्न मानों का, उसके सांख्यिकीय माध्य (समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक) से लिए गए विचलनों के निरपेक्ष मानों का समान्तर माध्य उसका माध्य विचलन कहलाता है।

(i) **जब आँकड़े अवर्गीकृत हों** : यदि किसी चर के मान $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ हों तथा इनका सांख्यिकीय माध्य A हो तो

A से माध्य विचलन $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - A|,$ (1)

यहाँ $|x_i - A|$, x_i का A से विचलन का निरपेक्ष मान है अर्थात् $|x_i - A|$ का अर्थ है कि $x_i - A$ का मान सदैव धनात्मक ही लेना है।

आगे हम $\sum_{i=1}^{n}$ को $\sum$ लिखेंगे ।

(ii) **अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए** : यदि चर के विभिन्न मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ की बारम्बारताएं क्रमशः $f_1, f_2, \ldots, f_n$ हों तथा A इसका सांख्यिकी माध्य हो, तो

A से माध्य विचलन $= \frac{1}{N}\sum f_i |x_i - A|,$ जहाँ $N = \sum f_i$. (2)

(iii) **वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए :** वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए उपरोक्त सूत्र (2) का ही उपयोग किया जाता है। यहां $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ प्रत्येक वर्ग के मध्यमान को प्रदर्शित करता है ।

(iv) **माध्य विचलन गुणांक (Coefficient of mean deviation):**

$$= \frac{\text{माध्य विचलन}}{A}$$

टिप्पणी :

(1) प्रकीर्णन का माप, परिकलन व समझना बहुत आसान हैं। यह श्रेणी के सभी मानों पर निर्भर करता है तथा चरम मानों का इस पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इसकी सबसे बड़ी कमी यह है कि इसकी गणना में विचलनों को हमेशा धनात्मक चिह्नों के साथ लेते हैं । चाहे गणितीय दृष्टि से अशुद्ध एवं अवैज्ञानिक है।

(2) माध्यिका से लिया गया माध्य विचलन अन्य किसी मान से लिए गए माध्य विचलन से कम होता है।

(3) सुविधा के लिए समान्तर माध्य से लिए गए माध्य विचलन को हम केवल माध्य विचलन कहेंगे ।

(4) माध्य विचलन गुणांक, प्रकीर्णन का सापेक्ष माप है, यह चर के मानों की इकाई पर निर्भर नहीं करता है।

(क) माध्य से माध्य विचलन (Mean deviation from mean) :

(i) **जब आँकड़े अवर्गीकृत हों, परिकलन विधि** :

(i) माध्य $\bar{x}$ से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए । यहाँ माध्य $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

(ii) इन विचलनों का योग ज्ञात कीजिए।

(iii) अब (ii) में प्राप्त योग को पदों की संख्या से भाग देकर विचलन ज्ञात कीजिए ।

माध्य विचलन $= \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$

उदाहरण 8: एक कक्षा के 8 छात्रों का भार किग्रा में निम्नलिखित प्रकार से है भार किग्राः 42, 47, 52, 47, 37, 60, 55, 38 माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

x_i	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
42	5·25
47	0·25
52	4·75
47	0·25
37	10·25
60	12·75
55	7·75
38	9·25
$\Sigma x_i = 378$	$\Sigma \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 50.50$

माध्य $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n} = \dfrac{378}{8} = 47 \cdot 25$

माध्य विचलन $= \dfrac{\Sigma \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n} = \dfrac{50 \cdot 50}{8} = 6 \cdot 31$

(II) **अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए परिकलन विधि :**

(i) माध्य x से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए । यहाँ $\overline{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{N}, N = \Sigma f_i$

(ii) अब (i) में प्राप्त विचलनों को उनकी संगत बारम्बारता से गुणा कर उनका योग ज्ञात कीजिए ।

(iii) अब (ii) में प्राप्त योग को, बारम्बारताओं के कुल योग से भाग देकर माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

माध्य विचलन $= \dfrac{\Sigma f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{N}$, जहाँ $N = \Sigma f_i$

उदाहरण 9: निम्न आँकड़ों से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

x	3	9	17	23	27
f	8	10	12	9	5

हल : दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

x	f	fx	$\lvert x-15 \rvert$	$f\lvert x-15 \rvert$
3	8	24	12	96
9	10	90	6	60
17	12	204	2	24
23	9	207	8	72
27	5	135	12	60
	$N = \Sigma f_i = 44$	$\Sigma f_i x_i = 660$		$\Sigma f_i \lvert x_i - 15 \rvert = 312$

माध्य $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{N} = \dfrac{660}{44} = 15$

माध्य विचलन $= \dfrac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{N} = \dfrac{312}{44} = 7 \cdot 09$

(III) **वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए परिकलन विधि** :

इस बंटन के लिए माध्य विचलन (II) की भांति ही करेंगे । यहां चर के मानों के स्थान पर प्रत्येक वर्ग के मध्यमान लिए जाएँगे।

उदाहरण 10: किसी कक्षा के छात्रों द्वारा प्राप्तांकों का निम्न बारम्बारता बंटन दिया गया है :

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारम्बारता	3	28	42	20	7

हल : दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

वर्ग	बारम्बारता f	अन्तराल का मध्यमान x	fx	$\|x-25\|$	$f\|x-25\|$
0–10	3	5	15	20	60
10–20	28	15	420	10	280
20–30	42	25	1050	0	0
30–40	20	35	700	10	200
40–50	7	45	315	20	140
	$N = \Sigma f_i$ =100		$\Sigma f_i x_i$ = 2500		$\Sigma f_i \|x_i - 25\|$ =680

$\therefore \quad \bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{N} = \dfrac{2500}{100} = 25$

माध्य विचलन $\dfrac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{N} = \dfrac{680}{100} = 6 \cdot 80$

उदाहरण 11: निम्नलिखित बारम्बारता बंटन के लिए मूल बिन्दु 20 से लिया गया माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

x	10	12	14	16	18	20	22	24
f	5	8	21	24	18	15	7	2

हल : दिए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं

x	f	$\|x_i - 20\|$	$f_i\|x_i - 20\|$
10	5	10	50
12	8	8	64
14	21	6	126
16	24	4	96
18	18	2	36
20	15	0	0
22	7	2	14
24	2	4	8
	$\Sigma f_i = 100$		$\Sigma f_i \|x_i - 20\| = 394$

मूल बिन्दु 20 से लिया गया माध्य विचलन $= \dfrac{1}{N} \Sigma f_i |x_i - 20|$

$= \dfrac{394}{100} = 3 \cdot 94$

उदाहरण 12: मूल बिन्दु एवं स्केल परिवर्तन से निम्न आँकड़ों का माध्य विचलन एवं माध्य विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए ।

वर्ग	0 – 3	3 – 6	6 – 9	9–12	12–15	15–18	18–21
बारंम्बारता	2	7	10	12	9	6	4

हल : दिए गए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

माना $a = 10{\cdot}5$, $h = 3$, जहाँ 'a' वर्ग 9–12 का मध्य बिन्दु है

वर्ग	बारम्बारता f_i	मध्यमान x_i	$u_i = \frac{x_i - 10.5}{3}$	$f_i u_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
0–3	2	1·5	–3	–6	9·18	18·36
3–6	7	4·5	–2	–14	6·18	43·26
6–9	10	7·5	–1	–10	3·18	31·80
9–12	12	10·5	0	0	0·18	2·16
12–15	9	13·5	1	9	2·82	25·38
15–18	6	16·5	2	12	5·82	34·92
18–21	4	19·5	3	12	8·82	35·28
	$N = \Sigma f_i = 50$			$\Sigma f_i u_i = 3$		$\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 191{\cdot}16$

$$\bar{x} = a + h\frac{\Sigma f_i u_i}{N} = 10\cdot5 + 3 \times \frac{3}{50} = 10\cdot68$$

$$\text{माध्य विचलन } = \frac{\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{N} = \frac{191\cdot16}{50} = 3\cdot8232$$

$$\text{माध्य विचलन गुणांक } = \frac{\text{माध्य विचलन}}{\bar{x}} = \frac{3\cdot8232}{10\cdot68} = 0\cdot358$$

(ख) माध्यिका से माध्य विचलन (Mean deviation from median)

(I) **अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए :**

परिकलन विधि : (i) पहले हम माध्यिका ज्ञात करेंगे इसके लिए विचर के सभी n मानों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखेंगे। अब

(अ) माध्यिका $M = (n+1)/2$ वें पद का मान (जब n विषम हों)

(आ) माध्यिका $M = n/2$ वें तथा $(n/2)+1$ वें पदों के मानों का समान्तर माध्य (जब n सम संख्या हो)

(ii) माध्यिका M से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए ।

(iii) इन विचलनों का योग ज्ञात कीजिए ।

(iv) अब (iii) में प्राप्त योग को पदों की संख्या से भाग देकर माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ।

माध्यिका से माध्य विचलन $(\delta_m) = \frac{\Sigma \lvert x_i - M \rvert}{n}$

उदाहरण 13: निम्न आँकड़ों का माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

38, 70, 48, 34, 42, 55, 63, 46, 54, 44

हल : आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर चर के मान होंगे :

34, 38, 42, 44, 46, 48, 54, 55, 63, 70 यहां $n = 10$

$\therefore$ माध्यिका = 5 वें तथा 6 ठें पदों के मानों का माध्य

$$M = \frac{46+48}{2} = 47$$

अब हम दिए गए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

x	$\lvert x-M \rvert$
38	9
70	23
48	1
34	13
42	5
55	8
63	16
46	1
54	7
44	3
$n=10$	$\frac{\Sigma\lvert x_i - M\rvert}{n} = 86$

माध्यिका से माध्यविचलन $(\delta_m) = \frac{\Sigma\lvert x_i - 47\rvert}{10} = \frac{86}{10} = 8\cdot6$

(II) **अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए परिकलन विधि** :

(i) यदि किसी विचर के मान की बारम्बारता व्यक्त करने वाली श्रेणी दी जाय तो माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले पदों को विचर के मान के आरोही या अवरोही क्रम में लिखा जाता है और इसके पश्चात् बारम्बारताओं की संचयी बारम्बारता ज्ञात की जाती है। संचयी बारम्बारता से मध्य पद निकाला जाता है। इस मध्य पद से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता के संगत विचर का मान ही माध्यिका होती है।

(ii) माध्यिका M से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए।

(iii) इन विचलनों का योग ज्ञात कीजिए ।

(iv) अब (iii) में प्राप्त योग को पदों की संख्या से भाग देकर माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ।

माध्यिका से माध्य विचलन $(\delta_m) = \frac{\Sigma f_i\lvert x_i - M\rvert}{N}$

उदाहरण 14: निम्न बंटन का माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

चर x	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**
बारम्बारता f	**2**	4	5	**3**	2	1	**4**

हल :

चर x	बारम्बारता f	संचयी बारम्बारता cf	$\lvert x - M\rvert$	$f\lvert x - M\rvert$
4	2	2	4	8
6	4	6	2	8
8	5	11	0	0
10	3	14	2	6
12	2	16	4	8
14	1	17	6	6
16	4	21	8	32
	$N = \Sigma f_i = 21$			$\Sigma f_i\lvert x_i - M\rvert = 68$

यहां $\frac{N}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$ जो संचयी बारम्बारता के मान 11 में है। अतः माध्यिका M=8 है ।

$\therefore$ माध्यिका से माध्य विचलन $(\delta_m) = \frac{1}{N}\Sigma f_i\lvert x_i - M\rvert = \frac{68}{21} = 3\cdot238$

(III) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए परिकलन विधि

(i) उपर्युक्त (II) की भाँति ही संचयी बारम्बारता के मध्य पद से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता के संगत वर्ग का पता लगाया जाता है जिसे माध्यिका वर्ग कहेंगे। अब माध्यिका निम्न सूत्र से ज्ञात की जा सकती है

$$\text{माध्यिका } (M) = \ell + \left[\frac{(N/2) - F}{f}\right] \times h$$

जहां ℓ = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा, N = बारम्बारता का योग, F = माध्यिका वर्ग से पूर्व वाले वर्ग की संचयी बारम्बारता, f = माध्यिका वर्ग की बारम्बारता, h = वर्ग अन्तराल

परिकलन विधि :

(ii) माध्यिका M से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए ।

(iii) इन विचलनों का योग ज्ञात कीजिए ।

(iv) अब (iii) में प्राप्त योग को पदों की संख्या से भाग देकर माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ।

माध्यिका से माध्य विचलन $(\delta_m) = \dfrac{\Sigma f_i |x_i - M|}{N}$

उदाहरण 15: 100 विद्यार्थियों के निम्नलिखित प्राप्तांकों से माध्यिका ज्ञात कर उससे माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
विद्यार्थियों की संख्या	8	30	40	12	10

हल : दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

प्राप्तांक का वर्ग	मध्यमान x	विद्यार्थियों की संख्या f	संचयी बारम्बारता cf	$\|x-M\|$	$f\|x-M\|$
0–10	5	8	8	18	144
10–20	15	30	38	8	240
20–30	25	40	78	2	80
30–40	35	12	90	12	144
40–50	45	10	100	22	220
		$N = \Sigma f_i = 100$			$\Sigma f_i \|x_i - M\| = 828$

यहां $\dfrac{N}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 78 है जिसके संगत वर्ग अन्तराल 20–30 हैं।

$$\text{अतः माध्यिका } M = \ell + \frac{(N/2) - F}{f} \times h = 20 + \frac{50 - 38}{40} \times 10 = 20 + \frac{12}{4} = 23$$

$$\text{माध्यिका से माध्य विचलन } (\delta_m) = \frac{1}{N}\Sigma f_i |x_i - M| = \frac{828}{100} = 8 \cdot 28$$

(ग) बहुलक से माध्यविचलन (Mean deviation from mode) δ_z :

(I) अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए परिकलन विधि :

(i) आँकड़ों में सबसे अधिकबार आने वाला मूल्य (चर) ज्ञात करते हैं, जो बहुलक (z) कहलाता हैं ।

(ii) आँकड़ों में से बहुलक को घटाकर निरपेक्षमान $|x - z|$ ज्ञात करते हैं।

(iii) निरपेक्ष मानों का योग $\Sigma|x - z|$ ज्ञात करते हैं ।

(iv) बहुलक से माध्य विचलन $(\delta_z) = \dfrac{1}{n}\Sigma|x - z|$ से प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण 16: निम्नलिखित आँकड़ों द्वारा बहुलक व उससे माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

8, 10, 15, 10, 12, 15, 8, 10, 8, 10, 12, 13.

हल : दिये गये आँकड़ों में 10 सर्वाधिक 4 बार आया है। अतः बहुलक $Z = 10$

चर x	$\lvert x-Z \rvert$
8	2
10	0
15	5
10	0
12	2
15	5
8	2
10	0
8	2
10	0
12	2
13	3
	$\Sigma \lvert x_i - Z \rvert = 23$

बहुलक से माध्यविचलन $(\delta_z) = \frac{1}{n}\Sigma \lvert x_i - Z \rvert = \frac{23}{12} = 1.916$

(II) अवर्गीकृत बंटन के लिए परिकलन विधि :

अवर्गीकृत बंटन में जिस चर की बारम्बारता सबसे अधिक हों उस चर का मूल्य ही बहुलक (Z) होता है। अब बहुलक से माध्य ज्ञात करने की शेष प्रक्रिया उपर्युक्त स्थिति (I) की भांति ही होगी।

(III) वर्गीकृत बंटन के लिए परिकलन विधि :

(i) सबसे अधिक बारम्बारता वाले बहुलक वर्ग को ज्ञात करते हैं ।

(ii) सूत्र $z = l + \frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2} \times h$ से बहुलक ज्ञात करते हैं ।

जहाँ f_0 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता, f_1= बहुलक वर्ग से पूर्व के वर्ग की बारम्बारता, f_2 = बहुलक वर्ग से पश्चात् के वर्ग की बारम्बारता, l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा, h= वर्ग अन्तराल

(iii) वर्ग अन्तराल के मध्यमान से बहुलक को घटाकर निरपेक्ष मान ज्ञात करते हैं।

(iv) निरपेक्ष मानों को बारम्बारताओं से गुणा कर योगफल में बारम्बारताओं के योग का भाग देकर उससे माध्य विचलन ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 17: निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग	**140–150**	**150–160**	**160–170**	**170–180**	**180–190**	**190–200**
बारम्बारता	**4**	**6**	**10**	**12**	**9**	**3**

हल : यहाँ $Z = 174$ लेने पर

वर्ग	मध्यमान x	बारम्बारता f	$\lvert x-z \rvert$	$f\lvert x-z \rvert$
140–150	145	4	29	116
150–160	155	6	19	114
160–170	165	10	9	90
170–180	175	12	1	12
180–190	185	9	11	99
190–200	195	3	21	63
		$N = 44$		$\Sigma f_i \lvert x_i - z \rvert = 494$

यहां सबसे अधिक बारम्बारता 12 है जिसके संगत वर्ग अन्तराल 170–180 है।

अतः बहुलक $z = \ell + \dfrac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2} \times h$

$$= 170 + \frac{12-10}{2\times 12 - 10 - 9} \times 10 = 170 + \frac{2\times 10}{5} = 174$$

बहुलक से माध्य विचलन $= \dfrac{1}{N}\Sigma f_i \left| x_i - z \right| = \dfrac{494}{44} = 11\cdot 22$

प्रश्नमाला 13.2

प्रश्न 1 व 2 में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

2. 28, 60, 38, 30, 32, 45, 53, 36, 44, 34

प्रश्न 3 व 4 के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

3. 13, 10, 12, 13, 15, 18, 17, 11, 14, 16, 12

4. 26, 32, 35, 39, 41, 62, 36, 50, 43

प्रश्न 5 व 6 के आँकड़ों के लिए बहुलक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

5. 2, 4, 6, 4, 8, 6, 4, 10, 4, 8

6. 2.2, 2.5, 2.1, 2.5, 2.9, 2.8, 2.5, 2.3

प्रश्न 7 व 8 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

7.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

8.

x_i	20	40	60	80	100
f_i	2	12	14	8	4

प्रश्न 9 व 10 के आँकडों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

9.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

10.

x_i	10	16	22	25	30
f_i	3	5	6	7	8

प्रश्न 11 व 12 के आँकडों के लिए बहुलक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

11.

x_i	3	4	5	6	7	8
f_i	2	4	6	3	2	1

12.

x_i	10	20	30	40	50	60	70	80
f_i	2	8	16	26	20	16	7	5

प्रश्न 13 व 14 के आँकडों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

13.

आय (प्रतिदिन)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
संख्या	4	8	9	10	7	5	4	3

14.

ऊँचाई (सेमी में)	95 – 105	105 – 115	115 – 125	125 – 135	135 – 145	145 – 155
संख्या	9	13	26	30	12	10

प्रश्न 15 व 16 के आँकडों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

15.

अंक	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
संख्या	3	4	7	8	2	1

16.

आयु	16 – 20	21 – 25	26 – 30	31 – 35	36 – 40	41 – 45	46 – 50	51 – 55
संख्या	5	6	12	14	26	12	16	9

प्रश्न 17 व 18 के बंटन के लिए बहुलक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

17.

प्राप्तांक	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
संख्या	8	24	42	20	6

18.

ऊँचाई (इंच में)	52 – 55	55 – 58	58 – 61	61 – 64
छात्र संख्या	10	20	35	10

13.06 मानक विचलन (Standard deviation) :

माध्य विचलन धन (+) तथा ऋण (–) के चिह्नों का ध्यान न रखते हुए कुल विचलनों का औसत होता है। वास्तव में यह बीजगणित के सिद्धान्तों की अवहेलना है परन्तु हमें कुल विचलन लेने होते है उनकी दिशा को महत्व नहीं देना होता इसलिए हम सब विचलनों को, चिह्नों के ध्यान दिये बिना, जोड़ लेते है। इस गणितीय अशुद्धि अथवा अवहेलना को ठीक करने के लिए विचलन ज्ञात करने की एक और पद्धति काम में लाई जाती है। इस पद्धति के अन्तर्गत समान्तर माध्य निकालकर इससे सब चरों के मानों से विचलन निकाल लेते है और फिर सब विचलनों के वर्ग (squares) निकाल लेते है। अन्त में इन वर्ग संख्याओं को जोड़कर उनका औसत ले लेते हैं तथा प्राप्त अंकों का वर्गमूल निकाल लेते हैं। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होता है वह **मानक विचलन** (Standard deviation) कहलाता है।

परिभाषाएँ :

मानक विचलन (Standard deviation) : श्रेणी के विभिन्न चर मूल्यों के समान्तर माध्य से प्राप्त विचलन के वर्गों के समान्तर माध्य के वर्गमूल को **मानक विचलन** कहते हैं।

$$\text{मानक विचलन } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

मानक विचलन गुणांक (coefficient of standard deviation): मानक विचलन एक निरपेक्ष मान है। दो श्रेणियों का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए मानक विचलन का सापेक्ष माप का प्रयोग करते हैं, जो मानक विचलन गुणाँक (coefficient of standard deviation) कहलाता है। इसका सूत्र निम्न प्रकार है :

$$\text{मानक विचलन गुणाँक} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \text{ या } \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}}$$

प्रसरण (Variance) : माध्य से लिए गए विचलनों के वर्गों के माध्य को प्रसरण कहते हैं, अर्थात्

$$\text{प्रसरण } (\sigma^2) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

विचरण गुणांक (coefficient of variation) : दो या दो से अधिक श्रेणियों के प्रकीर्णन की तुलना करने के लिए मानक विचलन गुणांक निकाला जाता है। जिसका मान सदैव एक से कम अर्थात् दशमलव भिन्न में ही आता है जिससे अनुमान लगाने में असुविधा होती है। इसी कारण विचरण गुणाँक का प्रयोग किया जाता है। मानक विचलन गुणाँक को 100 से गुणा करने पर जो प्रतिशत आता है उसे ही विचरण गुणाँक कहते हैं। वस्तुतः विचरण गुणाँक मानक विचलन गुणाँक का प्रतिशत रूप ही है। इसे निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है :

$$\text{विचरण गुणाँक (Coefficient of Variation)} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

अब हम विभिन्न प्रकार के आँकड़ों के लिए मानक विचलन की गणना करेंगे।

(I) **अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए** : यदि आँकड़ों में n पद क्रमशः $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ हों तथा इनका समान्तर माध्य $\bar{x}$ हो तो

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$

उपर्युक्त सूत्र का सरलीकृत रूप निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$\sigma = \frac{1}{n}\sqrt{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

उदाहरण 18: पांच छात्रों ने गणित विषय में क्रमशः 23, 46, 16, 25 और 20 अंक प्राप्त किए। उनके प्राप्ताँको का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : चर मूल्यों का समान्तर माध्य $\bar{x} = \dfrac{23+46+16+25+20}{5} = \dfrac{130}{5} = 26$

x	$x - \bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
23	−3	9
46	20	400
16	−10	100
25	−1	1
20	−6	36
		$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 546$

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{546}{5}} = \sqrt{109\cdot 2} = 10\cdot 45$

(II) **अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए** : यदि किसी चर के विभिन्न मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ की बारम्बारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ हों तथा इनका समान्तर माध्य $\bar{x}$ हो तो

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}}$, जहाँ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{N}, N = \Sigma f_i$.

उदाहरण 19: निम्न आँकड़ों से मानक विचलन की गणना कीजिए :

x	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**
f	**5**	**8**	**21**	**24**	**18**	**15**	**7**	**2**

हल :

x	f	fx	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
10	5	50	−6·5	42·25	211·25
12	8	96	−4·5	20·25	162·00
14	21	294	−2·5	6·25	131·25
16	24	384	−0·5	0·25	6·00
18	18	324	1·5	2·25	40·50
20	15	300	3·5	12·25	183·75
22	7	154	5·5	30·25	211·75
24	2	48	7·5	56·25	112·50
	$N = 100$	$\Sigma f_i x_i = 1650$			$\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2 = 1059\cdot 00$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{1650}{100} = 16 \cdot 50$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1059}{100}} = 3 \cdot 25$$

मानक विचलन के परिकलन की लघु रीतियाँ

(Short–cut methods for calculation of standard deviation) :

(i) परिभाषा अनुसार

$$\sigma^2{}_x = \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i \bar{x})$$

$$= \frac{1}{N} \left(\sum f_i x_i{}^2 + \bar{x}^2 \sum f_i - 2\bar{x} \sum f_i x_i \right)$$

$$= \frac{1}{N} \left(\sum f_i x_i{}^2 + N\,\bar{x}^2 - 2N\,\bar{x}^2 \right) \qquad \left[\because N = \sum f_i, \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \left(\sum f_i x_i{}^2 - N\,\bar{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i x_i{}^2 - \left(\frac{1}{N} \sum f_i x_i \right)^2$$

अतः $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum f_i x_i{}^2 - \left(\frac{1}{N} \sum f_i x_i \right)^2}$

(ii) यदि कल्पित माध्य = a लें तथा $x_i - a = d_i$ मानें तो

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i (x_i - a + a - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i (d_i - d)^2, \qquad \text{जहाँ } d_i = x_i - a$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i d_i{}^2 - \left(\frac{1}{N} \sum f_i d_i \right)^2 = \sigma_d^2$$

अतः $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum f_i d_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum f_i d_i \right)^2} = \sigma_d$, (सरलीकृत रूप)

(iii) **पद विचलन विधि (Step deviation method) :**

यदि वर्गीकृत बारम्बारता श्रेणी में वर्ग अन्तराल समान हो तो कल्पित माध्य (a) से विचलन ज्ञात करते समय समान वर्ग अन्तराल के बराबर उभयनिष्ठ गुणाँक बाहर निकाल लिया जाता है। इससे गणना कार्य अत्यन्त सरल हो जाता है। शेष गणना प्रक्रिया पूर्व की भाँति रहती है। केवल सूत्र निम्न प्रकार से प्रयुक्त होता है

$$\sigma_x = h \times \sqrt{\frac{1}{N}\sum f_i u_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum f_i u_i\right)^2} = h\sigma_u,$$

जहाँ $u_i = \frac{x_i - a}{h} = \frac{d_i}{h}$ तथा $d_i = hu_i$

इस विधि में माध्य $\bar{x} = a + h\frac{\sum f_i u_i}{N}$

टिप्पणी : संकेताक्षरों की दृष्टि से मानक विचलन $\sigma = \sigma_x = \sigma_d = h\sigma_u$

उदाहरण 20: निम्न आँकड़ों से मानक विचलन, मानक विचलन गुणाँक तथा विचरण गुणाँक की गणना कीजिए :

वर्ग	**0–2**	**2–4**	**4–6**	**6–8**	**8–10**
बारम्बारता	**2**	**5**	**15**	**7**	**1**

हल :

वर्ग	मध्यमान x	बारम्बारता f	fx	fx^2
0–2	1	2	2	2
2–4	3	5	15	45
4–6	5	15	75	375
6–8	7	7	49	343
8–10	9	1	9	81
		$N = \Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 150$	$\Sigma f_i x_i^2 = 846$

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{846}{30} - \left(\frac{150}{30}\right)^2}$$

$$= \sqrt{28.2 - 25} = 1 \cdot 79$$

मानक विचलन गुणांक (C.S.D.) $= \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1 \cdot 79}{5} = 0 \cdot 36$

विचरण गुणाँक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = 0 \cdot 36 \times 100 = 36$

उदाहरण 21: निम्नलिखित बंटन का मानक विचलन, मानक विचलन गुणाँक तथा विचरण गुणाँक ज्ञात कीजिए।

x	9	12	15	18	21	24	27	30
f	20	60	150	250	200	120	50	40

हल : माना कल्पित माध्य $a = 18$

x	f	$d = x - 18$	d^2	fd	fd^2
9	20	−9	81	−180	1620
12	60	−6	36	−360	2160
15	150	−3	9	−450	1350
18	250	0	0	0	0
21	200	3	9	600	1800
24	120	6	36	720	4320
27	50	9	81	450	4050
30	40	12	144	480	5760
	$N =$ 890			$\Sigma f_i d_i$ =1260	$\Sigma f_i d_i^2$ =21060

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma f_i d_i^2 - \left(\frac{1}{N}\Sigma f_i d_i\right)^2} = \sqrt{\frac{21060}{890} - \left(\frac{1260}{890}\right)^2} = \sqrt{23\cdot 66 - 2\cdot 004} = \sqrt{21\cdot 656} = 4\cdot 65$

माध्य $\qquad \bar{x} = a + \frac{1}{N}\Sigma f_i d_i = 18 + \frac{1260}{890} = 19\cdot 41$

मानक विचलन गुणाँक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4\cdot 65}{19\cdot 14} = 0\cdot 242$

विचरण गुणाँक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \ = 0\cdot 242 \times 100 = 24\cdot 2$

(III) **वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए** : समान वर्ग अन्तराल वाले वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए लघुरीतियों के अन्तर्गत बताई पद विचलन विधि का प्रयोग कर मानक विचलन ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 22: निम्नलिखित बंटन का माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

वर्ग	**0–10**	**10–20**	**20–30**	**30–40**	**40–50**
छात्रों की संख्या	**5**	**8**	**15**	**16**	**6**

हल : इस प्रश्न का हल हम पद विचलन विधि से निकालेंगे

माना कल्पित माध्य $a = 25$, जो वर्ग 20–30 का मध्यमान है।

वर्ग	मध्यमान x	छात्रों की संख्या f	$u_i = \frac{x-25}{10}$	u_i^2	$f_i u$ $f_i u_i$	$f_i u^2$ $f_i u_i^2$
0–10	5	5	−2	4	−10	20
10–20	15	8	−1	1	−8	8
20–30	25	15	0	0	0	0
30–40	35	16	1	1	16	16
40–50	45	6	2	4	12	24
		$N = 50$		10	$\Sigma f_i u_i$ = 10	$\Sigma f_i u_i^2$ = 68

माध्य $\bar{x} = a + h \times \frac{\sum f_i u_i}{N} = 25 + \frac{10 \times 10}{50} = 27$

मानक विचलन $\sigma = h \times \sqrt{\frac{1}{N} \sum f_i u_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum f_i u_i\right)^2}$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{68}{50} - \left(\frac{10}{50}\right)^2} = 10 \times \sqrt{1 \cdot 32} = 10 \times 1 \cdot 1489 = 11 \cdot 489$$

प्रश्नमाला 13.3

प्रश्न 1 व 2 के आँकड़ों के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

1.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

2.

x_i	82	83	87	88	92	94	99
f_i	3	2	3	2	6	3	3

3. लघु विधि द्वारा माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

x_i	70	71	72	73	74	75	76	77	78
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

प्रश्न 4 व 5 में दिए गए बारंबारता बंटन के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

4.

वर्ग	0 – 30	30 – 60	60 – 90	90 – 120	120 – 150	150 – 180	180 – 210
बारंबारता	2	3	5	10	3	5	2

5.

वर्ग	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
बारंबारता	5	8	15	16	6

6. लघु विधि द्वारा माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (सेमी)	70 – 75	75 – 80	80 – 85	85 – 90	90 – 95	95 – 100	100 – 105	105 – 110	110 – 115
छात्रों की संख्या	3	4	7	7	15	9	6	6	3

7. नीचे दी गई तालिका में वृत्तों के व्यासों का मानक विचलन ज्ञात कीजिए

व्यास (मिमी में)	43 – 46	47 – 50	51 – 54	55 – 58	59 – 62
वृत्तों की संख्या	15	17	21	22	25

8. दिए गए आँकड़ों से मानक विचलन, मानक विचलन गुणाँक तथा विचरण गुणाँक की गणना कीजिए।

वर्ग	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
बारंबारता	2	5	15	7	1

9. निम्नलिखित बंटन का कल्पित माध्य 35 से मानक विचलन ज्ञात कीजिए

35, 25, 33, 50, 37, 35, 33, 37, 30

10. निम्न श्रेणी में माध्य, माध्यिका एवं बहुलक से माध्य विचलन एवं गुणाँक ज्ञात कीजिए

मासिक किराया (रुपयों में)	किरायेदारों की संख्या
10 से कम	3
20 से कम	8
30 से कम	16
40 से कम	26
50 से कम	37
60 से कम	50
70 से कम	56
80 से कम	60

विविध प्रश्नमाला–13

1. पांच छात्रों के गणित में प्राप्ताँक 20, 25, 15, 35 और 30 है तो इसका परास होगा–

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30

2. अन्तर चतुर्थक परास का सूत्र है–

(A) Q_3+Q_1 (B) Q_3-Q_1 (C) Q_3-Q_2 (D) Q_3-Q_4

3. किसी वस्तु का अधिकतम मूल्य 500 रु तथा न्यूनतम मूल्य 75 रु होने पर परास गुणाँक होगा–

(A) 0.739 (B) 0.937 (C) 7.39 (D) 73.9

4. चर श्रेणी 10, 20, 30, 40, 50, 60 का परास गुणाँक है:

(A) 3 / 2 (B) 5 / 6 (C) 7 / 5 (D) 5 / 7

5. माध्य विचलन सबसे कम होता है:

(A) माध्य से (B) माध्यिका से (C) बहुलक से (D) मूल बिन्दु से

6. चार विद्यार्थियों के प्राप्ताँक 25, 35, 45 व 55 हैं, इनका माध्य विचलन है:

(A) 10 (B) 1 (C) 0 (D) 40

7. बंटन 2, 4, 5, 3, 8, 7, 8 का माध्यिका से लिया गया माध्य विचलन है:

(A) 13 / 7 (B) 1 / 2 (C) 11 / 7 (D) 2

8. किसी चर श्रेणी का माध्य $\bar{x}=773$ तथा माध्य विचलन 64.4 है, तो उसका माध्य विचलन गुणाँक है:

(A) 0.065 (B) 12.003 (C) 0.083 (D) 0.073

9. आँकड़ों 6, 10, 4, 7, 4, 5 का मानक विचलन है:

(A) $\sqrt{13/3}$ (B) 13 / 3 (C) $\sqrt{26}$ (D) $\sqrt{26}/6$

10. एक कक्षा के छात्रों के प्राप्तांको का मानक विचलन 1.4 है तो बंटन का प्रसरण होगा–

(A) 1.2 (B) 0.38 (C) 1.96 (D) 1.4

11. यदि प्रसरण $\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2}{k}-\left(\frac{\sum fd}{30}\right)^2}$ है तो k का मान है:

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 60

12. एक श्रेणी का विचरण गुणाँक 30% है तथा मानक विचलन 15 है, तो उसका माध्य है:

(A) 0.5 (B) 5 (C) 2 (D) 50

13. किसी श्रेणी में $\sum x^2=100, n=5$ तथा $\sum x=20$ हो, तो मानक विचलन है:

(A) 16 (B) 2 (C) 4 (D) 8

14. एक नगर में सात दिनों का तापक्रम 18, 12, 6, –7, –12, 5, –4 सेंटीग्रेड में दिया गया है तो परास मान सेन्टीग्रेड में होगा–

(A) 6 (B) 30 (C) 22 (D) 14

15. यदि $N = 10, \sum x = 120$ तथा $\sigma_x = 60$ हो तो विचरण गुणांक है:

(A) 5 (B) 50 (C) 500 (D) 0.5

16. माध्य से लिए विचलनों का बीजगणितीय योग होता है:

(A) ऋणात्मक (B) धनात्मक (C) प्रत्येक में अलग–अलग (D) शून्य

17. यदि $\bar{x} = 6, \sum x = 60$ तथा $\sum x^2 = 1000$ हो, तो σ_x का मान है:

(A) 6 (B) 8 (C) 64 (D) 10

18. परास गुणांक परिभाषित किया जा सकता है:

(A) $\frac{H-L}{2}$ (B) $\frac{H+L}{2}$ (C) $\frac{H-L}{H+L}$ (D) $\frac{H+L}{H-L}$

19. यदि किसी श्रृंखला के सभी पदों का मूल्य एक समान हो, तो प्रकीर्णन का मान ज्ञात कीजिए।

20. व्यक्तिगत श्रृंखला में मानक विचलन ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

21. किसी बंटन का मानक विचलन 20.5 तथा समान्तर माध्य 60 हो, तो उसका मानक विचलन गुणाँक ज्ञात कीजिए।

22. निम्न बारंबारता बंटन से अन्तरचतुर्थक परास, अन्तरचतुर्थक परास गुणाँक, चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणाँक ज्ञात कीजिए।

अंक से अधिक	0	15	30	45	60	75	90	105
छात्रों की संख्या	150	140	100	80	70	30	14	0

23. पद विचलन विधि से निम्न आवृत्ति बंटन का माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20	21 – 25	26 – 30	31 – 35
बारंबारता	5	7	18	25	20	4	1

24. निम्न आंकड़ों के बहुलक से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए तथा इसका गुणांक निकालिए।

केन्द्रीय आकार	6	7	8	9	10	11	12
आवृत्ति	3	6	9	13	8	5	4

25. निम्न आंकड़ों से प्रसरण ज्ञात कीजिए।

केन्द्रीय आकार	32 – 38	38 – 44	44 – 50	50 – 56	56 – 62	62 – 68
छात्रों की संख्या	3	6	9	13	8	5

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. विक्षेपण : किसी श्रेणी के चरों के मानों का माध्य से बिखराव प्रकीर्णन कहलाता है।
2. परासः श्रेणी में चर के उच्चतम मान (H) और निम्नतम मान (L) के अन्तर को परास कहते हैं तथा परास गुणाँक $(C.R.) = \frac{H-L}{H+L}$
3. अन्तर चतुर्थक परास $(I.Q.R.) = Q_3 - Q_1$
4. चतुर्थक विचलन $(Q.D.) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ = अर्द्ध अन्तर चतुर्थक परास
5. चतुर्थक विचलन गुणाँक $(C.Q.D.) = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
6. माध्य विचलन : किसी भी श्रेणी में चर के विभिन्न मानों का उसके सांख्यिकीय माध्य (समान्तर माध्य, माध्यिका या बहुलक) से लिये गये विचलनों के निरपेक्ष मानों का समान्तर माध्य उसका माध्य विचलन कहलाता है।

(i) जब आँकड़े वर्गीकृत हों

A से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum f_i |x_i - A|}{N}$, जहाँ A सांख्यिकीय माध्य है।

(ii) अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए :

A से माध्य विचलन $= \dfrac{1}{N}\sum f_i |x_i - A|$, जहाँ $N = \sum f_i$

(iii) जब आँकड़े वर्गीकृत रूप में हों तो उपर्युक्त चरण (ii) के सूत्र को काम में लिया जाता है। यहाँ x_i संगत वर्ग का मध्यमान है।

7. माध्य विचलन गुणाँक $= \dfrac{\text{माध्य विचलन}}{A}$, जहाँ A वह माध्य है जिससे माध्य विचलन लिया गया है।

8. प्रसरण व मानक विचलनः श्रेणी के चर के मानों के समान्तर माध्य से विचलनों के वर्गों के माध्य को प्रसरण कहते हैं। प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल मानक विचलन कहलाता है।

(i) जब आँकड़े अवर्गीकृत हों :

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x_i}{n}\right)^2}$

(ii) जब आँकड़े अवर्गीकृत या वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के रूप में हो तब

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{N}} = \sqrt{\dfrac{\sum f_i x_i^2}{N} - \left(\dfrac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2}$

9. मूल बिन्दु परिवर्तित करने पर : यदि कल्पित माध्य a हो, तो

(i) अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum d_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum d_i}{n}\right)^2}$, जहाँ $d_i = x_i - a$

(ii) अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए

$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\dfrac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2}$

(iii) मूल बिन्दू तथा स्केल परिवर्तन (पद विचलन) के लिए : यदि कल्पित माध्य a तथा वर्गीकृत बारम्बारता के प्रत्येक वर्ग का वर्ग अंतराल h हो तो $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$ लेने पर,

मानक विचलन $\sigma = h\sqrt{\dfrac{\sum f_i u_i^2}{N} - \left(\dfrac{\sum f_i u_i}{N}\right)^2}$

मानक विचलन गुणाँक $= \dfrac{\sigma}{\overline{x}}$

विचरण गुणाँक $= \dfrac{\sigma}{\overline{x}} \times 100$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 13.1

1. $\dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 - Q_1}$ **2.** 30 **3.** 6, 0.352 **4.** 7, 0.44 **5.** 2, 0.5

6. 0.5 **7.** 59.44, 59.44 **8.** 34.375, 34.375

प्रश्नमाला 13.2

1. 3 **2.** 8.4 **3.** 2 **4.** 7 **5.** 1 **6.** 0.2 **7.** 6.32

8. 16 **9.** 3.33 **10.** 5.1 **11.** 1 **12.** 13.1 **13.** 15.792 **14.** 11.28

15. 10.34 **16.** 7.35 **17.** 7.38 **18.** 2.075

प्रश्नमाला 13.3

1. 19, 43.4 **2.** 90, 29.09 **3.** 74, 1.69 **4.** 107, 2276 **5.** 27, 132 **6.** 93, 105.52, 10.27

7. 5.55 **8.** 17.9, 0.358, 35.8 **9.** 6.376 **10.** 15.18, 15.36, 15.22, 0.348, 0.363, 0.351

विविध प्रश्नमाला 13

1. (B) **2.** (B) **3.** (A) **4.** (D) **5.** (B) **6.** (A) **7.** (D)

8. (C) **9.** (A) **10.** (C) **11.** (C) **12.** (D) **13.** (B) **14.** (B)

15. (C) **16.** (D) **17.** (B) **18.** (C) **19.** 0 **20.** $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum x^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x}{n}\right)^2}$

21. 0.34 **22.** 46.875; 0.48; 23.4375; 0.48 **23.** $\overline{x} = 17, \sigma_x = 6.44$

24. $\delta_z = 1.265$, $\delta_z = 0.141$ **25.** 113.4

14

प्रायिकता
(Probability)

14.01 भूमिका (Introduction):

प्रायिकता के सिद्धान्त की उत्पत्ति 17वीं शताब्दी में यूरोप में हुई। वहाँ के उद्योगपतियों एवं व्यापारियों ने उनसे सम्बन्धित व्यवसाय के परिणामों के पूर्वानुमान करने के प्रयास किए, जिससे अधिक से अधिक लाभ हो सके। इन लोगों ने अपनी समस्याओं को तत्कालीन गणितज्ञों गेलीलियों, पास्कल, फर्मा कारडेनों आदि के सामने रखा। गणितज्ञों ने इन समस्याओं के समाधान हेतु गणितीय विधियों का विकास किया, जिससे गणित की इस शाखा की उत्पति हुई। 18वीं एवं 19वीं शताब्दी में प्रमुख गणितज्ञों लॉप्लास, गॉस और बरनौली आदि ने इस सिद्धान्त का और विकास किया। 20वीं शताब्दी में प्रायिकता सिद्धान्त पर आधारित प्रतिचयन सिद्धान्त, निर्णय सिद्धान्त आदि का प्रतिपादन हुआ, जिनका श्रेय आर. एस. फिशर तथा कार्ल पियर्सन आदि को जाता है। हमने प्रायिकता को परिभाषित करने के लिए सम प्रायिकता या सम संभाव्य परिणामों का उपयोग किया है। यह परिभाषा तार्किक दृष्टि से उचित प्रतीत नहीं होती है। इसलिए रूस के गणितज्ञ A.N. Kolomigrove ने एक अन्य प्रायिकता सिद्धान्त का विकास किया। जिसे अभिगृहीत आधारित प्रायिकता सिद्धान्त कहते है। उन्होंने 1933 में प्रकाशित अपनी पुस्तक 'प्रायिकता का आधार (Foundation of probability), में प्रायिकता की व्याख्या के लिए कुछ स्वतः प्रमाणित तथ्य (अभिगृहीत) निर्धारित किए।

आधुनिक युग में प्रायिकता के सिद्धान्त का उपयोग विभिन्न क्षेत्रों में भविष्य के संबंध में निर्णय लेने हेतु किया जा रहा है, जैसे किसी राज्य या देश का बजट बनाने में, बीमा कम्पनियों में, संयोग पर आधारित खेलों में, कृषि, अर्थशास्त्र, वैज्ञानिक अनुसंधान में, सैनिक विशेषज्ञ सुरक्षा सम्बन्धी नीति निर्धारण में, व्यापक रूप से व्यवसाय के क्षेत्र में, प्राकृतिक एवं भौतिक विज्ञान के क्षेत्र में, समाज एवं राज्य व्यवस्था की महत्त्वपूर्ण नीति निर्धारण में किया जाता है।

पूर्व में हमने प्रायिकता की संकल्पना को विभिन्न परिस्थितियों की अनिश्चितता की माप के रूप में पढ़ा है। हमारे सामने प्रतिदिन विभिन्न ऐसी घटनाएँ घटित होती है। जिनके एक से अधिक निश्चित और अपरिमित परिणाम हो सकते है। ऐसी घटनाओं के परिणामों का पूर्वानुमान करके व्यक्ति लाभ उठाने का प्रयास भी करता है। किसी भी घटना से संबंधित पूर्व सूचनाओं व परिस्थितियों के आधार पर परिणामों की संभावनाओं का पता करने के सिद्धान्त को प्रायिकता कहते हैं।

वर्तमान में प्रायिकता ज्ञात करने हेतु दो भिन्न विधियाँ प्रयोग में लायी जाती है। जिसमें से प्रथम जिसे चिरप्रतिष्ठित प्रायिकता सिद्धान्त (Classical theory of probability) कहते हैं इसमें किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए हम घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या का कुल परिणामों की संख्या के साथ अनुपात ज्ञात करते हैं। द्वितीय जिसे प्रायिकता की अभिगृहीती दृष्टिकोण (Axiomatic Approach to probability) कहते है इसमें प्रायिकताएँ निर्धारित करने के लिए अभिगृहीतों या नियमों को वर्णित (depict) किया गया है।

दोनो विधियों को भली प्रकार समझने के लिए कुछ महत्वपूर्ण शब्दों को इनके संदर्भ में जानना आवश्यक है। इन्हें आगे के अनुच्छेद में इन्हें चिरप्रतिष्ठित प्रायिकता सिद्धान्त तथा अभिगृहीती दृष्टिकोण के अनुसार ही परिभाषित करने का प्रयास किया गया है।

14.02 परिभाषाएँ (Definations):

(A) प्रायिकता का चिरप्रतिष्ठित दृष्टिकोण

1. यादृच्छिक प्रयोग (Random experiment) : एक प्रयोग जिसके बारे में सभी संभव परिणाम पहले से ही ज्ञात हों तथा प्रयोग के किसी विशेष परिणाम के आने का निश्चित अनुमान नहीं लगाया जा सके, यादृच्छिक प्रयोग कहलाता है। जैसे एक सिक्के के उछाल में चित्त या पट दो परिणाम पहले से ज्ञात हैं, लेकिन निश्चित परिणाम नहीं बताया जा सकता। अतः सिक्के को उछालना यादृच्छिक प्रयोग है।

2. अभिप्रयोग एवं घटना (Trial and event) : किसी भी संदर्भ का कोई प्रयोग जिसका कई सम्भावित परिणामों में से एक परिणाम अवश्य होता हो, एक अभिप्रयोग कहलाता है तथा इसके सम्भावित परिणाम घटनाएँ कहलाती हैं। उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के को उछालना एक अभिप्रयोग है और चित्त (H) या पट (T) आना एक घटना है।

(ii) एक पासे को उछालना एक अभिप्रयोग है और 1,2,3,4,5,6 में से किसी एक अंक का आना घटना है।

(iii) ताश की गड्डी में से दो पत्ते खींचना अभिप्रयोग है और संभावित परिणाम ${}^{52}C_2$ में से दोनों पत्तो का राजा होना ${}^{4}C_2$ एक घटना है।

3. सरल घटना (Simple Event) : किसी अभिप्रयोग में एक समय में केवल एक घटना घटित हो तो उसे सरल घटना कहते हैं। उदाहरणार्थ : एक थैले में कुछ काली तथा सफेद गेंदें हैं उसमें से एक गेंद निकालना सरल घटना है।

4. निश्शेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ (Exhaustive events or total number of cases): किसी अभिप्रयोग के समस्त सम्भावित परिणाम उस अभिप्रयोग की निश्शेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ कहलाती हैं। उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के को उछालना एक अभिप्रयोग है और चित्त (H) या पट (T) आ सकते हैं। अतः इस अभिप्रयोग में 2 निश्शेष घटनाएँ हैं।

(ii) एक पासे को उछालने पर 1, 2, 3, 4, 5, या 6 अंक आ सकता हैं। अतः इस अभिप्रयोग में 6 निश्शेष घटनाएँ हैं।

5. अनुकूल घटनाएँ या स्थितियाँ (Favourable events or cases) किसी अभिप्रयोग में किसी विशिष्ट घटनाओं की अनुकूल स्थितियाँ उस प्रयोग के उन परिणामों की संख्या है जिसमें वह विशिष्ट घटना घटित होती है। उदाहरणार्थ :

(i) एक पासे को उछालने पर सम अंक आने की अनुकूल घटनाएँ 2,4,6 अर्थात् 3 हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचने में राजा आने की अनुकूल स्थितियाँ ${}^4C_1$ अर्थात् 4 हैं।

(iii) दो पासों को उछालने पर योग 5 आने के लिए 4 अनुकूल स्थितियाँ हैं : (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)

6. स्वतंत्र व आश्रित घटनाएँ (Independent and dependent events):

(i) **स्वतन्त्र घटनाएँ** : दो या दो से अधिक घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती हैं यदि किसी एक के घटित होने या न होने का प्रभाव शेष घटनाओं के घटित होने या न होने पर नहीं पड़ता है।

उदाहरणार्थ : एक सिक्के तथा एक पासे के साथ साथ उछालने पर सिक्के पर पट तथा पासे पर 4 आना स्वतन्त्र घटनाएँ हैं।

(ii) **आश्रित घटनाएँ** : दो या दो से अधिक घटनाएँ इस प्रकार हों कि एक के घटित होने का प्रभाव दूसरे पर पड़ता हो तो उन्हें आश्रित घटनाएँ कहते हैं।

उदाहरणार्थ : ताश की साधारण गड्डी से खींचे गये एक पत्ते का पान का पत्ता होना तदुपरान्त बिना इस पत्ते को गड्डी में मिलाएँ पुनः खींचे गए पत्ते का हुकुम का पत्ता होना दोनो आश्रित घटनाएँ हैं।

7. परस्पर अपवर्जी या असंयुक्त घटनाएँ (Mutually exclusive or disjoint events) : दो या दो से अधिक घटनाएँ परस्पर अपवर्जी या असंयुक्त घटनाएँ कहलाती हैं यदि इनमें से कोई दो घटनाएँ एक साथ घटित नहीं हो सके अर्थात् यदि एक घटना घटित होती है, तो शेष घटनाएँ घटित नहीं हो सके। उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के को उछालने पर चित्त या पट आना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचने पर राजा होना या रानी होना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

8. समप्रायिक घटनाएँ (Equally likely events) : यदि किसी प्रयोग में सभी घटनाओं के घटित होने की समान सम्भावना हो तो ऐसी घटनाओं को समप्रायिक घटनाएँ कहते हैं। उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के को उछालने पर चित्त (H) या पट (T) आना समप्रायिक घटनाएँ हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से पत्ते के खींचने पर लाल या काला पत्ता होना समप्रायिक घटनाएँ हैं।

9. मिश्र घटनाएँ (Compound events) : यदि दो या दो से अधिक घटनाएँ एक साथ घटित हों तो वे मिश्र घटनाएँ या संयुक्त घटनाएँ कहलाती हैं।

उदाहरणार्थ : दो थैलों में कुछ नीली व कुछ लाल गेंदें रखी हैं। किसी एक थैले का चुनाव कर उसमें से एक गेंद निकालना एक मिश्र घटना है क्योंकि दो थैलों में से एक का चयन कर और फिर चुने हुए थैले में से एक गेंद निकालना साथ–साथ घटित होने वाली घटना है।

(B) प्रायिकता का अभिगृहितीय दृष्टिकोण में आवश्यक परिभाषाएँ

1. प्रतिदर्श बिन्दु तथा प्रतिदर्श समष्टि (Sample point and sample space) : किसी अभिप्रयोग का प्रत्येक परिणाम एक प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है तथा इन सभी प्रतिदर्श बिन्दुओं का समुच्चय उस अभिप्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है। इसे प्रायः S से व्यक्त किया जाता है। उदाहरणार्थः

(i) दो सिक्कों के उछाल में प्रतिदर्श बिन्दु (H,H), (H,T), (T,H), (T,T) हैं

तथा $S=\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$ प्रतिदर्श समष्टि हैं।

(ii) 3 बालक और 2 बालिकाओं में से 2 को चुना जाता है। इस अभिप्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि होगी (बालक B_1,B_2,B_3, बालिका G_1,G_2) :

$$S=\{B_1B_2,B_2B_3,B_3B_1,B_1G_1,B_1G_2,B_2G_1,B_2G_2,B_3G_1,B_3G_2,G_1G_2\}$$

2. प्रारंभिक घटना (Elementary events) : यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि का एक अवयव वाला उपसमुच्चय प्रारंभिक घटना कहलाती है।

स्पष्टतः यादृच्छिक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम के साथ एक प्रारम्भिक घटना जुड़ी होती है तथा विलोमतः

उदाहरणार्थ : एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि S={HH, HT, TH, TT,} है यहाँ इस प्रतिदर्श समष्टि की चार प्रारंभिक घटनाएं $E_1 = \{HH\}$, $E_2 = \{HT\}$, $E_3 = \{TH\}$ यहाँ $E_4 = \{TT\}$ है।

3. मिश्र घटना (Compound event) : एक प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि S के वे उपसमुच्चय जो प्रतिदर्श समष्टि S के एक अवयव वाले उपसमुच्चयों के असंयुक्त सम्मिलन से बने समुच्चयों को मिश्र घटनाएँ कहते है। उदाहरणार्थ : एक पासे को उछालने पर विचार कीजिए। इस प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है। प्रारंभिक घटनाएँ

$E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2\}, .., E_6 = \{6\}$ हैं। यहाँ $A_1 = \{2, 4, 6\}$, $A_2 = \{1, 3, 5\}$ इत्यादि मिश्र घटनाएँ कहलाएँगी।

4. असंभव व निश्चित घटनांए (Impossible and certain events) : माना एक यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि S है तो ϕ तथा S इसके उपसमुच्चय होने के कारण घटनाएँ है। घटना ϕ को असंभव घटना तथा S को निश्चित घटना कहते है।

उदाहरणार्थः एक पासे को उछालने की घटना से सम्बन्धित प्रयोग पर विचार करे तथा इसमें $A_1 = 1$ से कम अंक आने की घटना $A_2 = 8$ से कम अंक आने की घटना हो तो A_1 निश्चित रूप से असंभव घटना होगी तथा A_2 निश्चित घटना होगी।

5. घटना का घटित होना (Occurrence of an event) : प्रतिदर्श समिष्ट S का उपसमुच्चय A किसी घटना का निरूपित करता है। यदि ω उस यादृच्छिक प्रयोग का एक परिणाम है तथा $\omega \in A$ तो कहा जा सकता है कि घटना घटित हुई तथा यदि $\omega \notin A$ तो कहा जा सकता है कि घटना घटित नहीं हुई।

उदाहरणार्थः एक निष्पक्ष पासे को फेंकने का यादृच्छिक प्रयोग पर विचार करते है। माना सम संख्या आने की घटना A है तो $A = \{2, 4, 6\}$ यदि एक प्रयोग में परिणाम 6 प्राप्त होता है एवं $6 \in A$ तब हम कह सकते है कि इस प्रयोग में घटना घटित हुई यदि परिणाम 5 प्राप्त होता है तो हम कहेंगे कि इस प्रयोग में घटना घटित नहीं हुई।

6. घटनाओं का बीजगणित (Algebra of events) : घटनाओं के बीजगणित को निम्न सारणी के माध्यम से आसानी से समझा जा सकता हैः

घटना का मौखिक विवरण	समुच्चय सिद्धान्त संकेतों में समानार्थक
A नहीं	$\overline{A}$
A या B (A या B में से कम से कम एक)	$A \cup B$
A तथा B	$A \cap B$
A परन्तु B नहीं	$A \cap \overline{B}$
न तो A एवं न ही B	$\overline{A} \cap \overline{B} = \left(\overline{A \cup B}\right)$
A तथा B में से यथार्थतः एक	$\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cup B\right)$
A, B तथा C में से यथार्थतः दो	$\left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$
A, B तथा C में से कम से कम एक	$A \cup B \cup C$
A, B तथा C में से सभी	$A \cap B \cap C$

7. परस्पर अपवर्जी या असंयुक्त (Mutually exclusive or disjoint event): माना एक यादृच्छिक प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि S है तथा A_1 व A_2 दो घटनाएँ है तो A_1 तथा A_2 परस्पर अपवर्जी होगी यदि $A_1 \cap A_2 = \phi$.

स्पष्टतः एक यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रारंभिक घटनाएं परस्पर अपवर्जी होती है। घटनाएं जो परस्पर अपवर्जी नहीं है वह अनुकूल घटनाएँ कहलाती है।

8. परस्पर अपवर्जी निःशेष घटनाओं का निकाय (Mutually exclusive and exhaustive system of events): माना एक यादृच्छिक प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि S है तथा $A_1, A_2, ... A_n$, S के उपसमुच्चय इस प्रकार है कि

(i) $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$ तथा (ii) $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = S$

तो यह परस्पर अपवर्जी निश्शेष घटनाओं का निकाय निर्मित करता है।

प्रश्नमाला 14.1

1. बल्लों के एक कार्टून में से 3 बल्ब यादृच्छया निकाले जाते हैं। प्रत्येक बल्ब को जांचा जाता है और उसे खराब (D) या ठीक (N) में वर्गीकृत करते हैं। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।
2. एक ताश की गड्डी से 4 पत्ते निकाले जाते हैं, तो n(E) क्या होगा, जबकि E एक बादशाह, एक बेगम, एक गुलाम व एक इक्का निकालने की घटना है।
3. एक पासा फेंका जाता है। यदि पासे पर 4 दर्शाना E घटना है तथा सम संख्या आना F घटना है। क्या E तथा F परस्पर अपवर्जी घटना है?
4. दो पासों को एक साथ उछाला जाता है, तो
   (i) युग्मक होने का प्रतिदर्श समष्टि क्या है? (ii) अंको योग 8 होने का प्रतिदर्श समष्टि क्या है?

14.03 प्रायिकता की परिभाषा (Defination of Probability):

प्रायिकता की चिरप्रतिष्ठित परिभाषा (Classical defination of probability):

यदि किसी अभिप्रयोग के कुल n परिणाम समप्रायिक, परस्पर अपवर्जी एवम् निश्शेष हों और उनमें से m परिणाम किसी विशेष घटना A के अनुकूल हों तो A की प्रायिकता अनुपात m/n द्वारा परिभाषित की जाती है जिसे संकेत P(A) से व्यक्त करते हैं।

अतः $$P(A) = \frac{\text{A की अनुकूल स्थितियाँ}}{\text{A की निःश्शेष स्थितियाँ}} = \frac{m}{n}, \text{ (संख्यात्मक माप)}$$

यदि किसी अभिप्रयोग में घटना A का घटना निश्चित हो तो $m = n$ होगा तथा

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1,$$

यदि किसी घटना A का घटना असम्भव हो तो $m = 0$ तथा

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0,$$

इसलिए किसी भी घटना A के लिए $0 \le P(A) \le 1$

अर्थात् किसी भी घटना की प्रायिकता 0 से कम तथा 1 से अधिक नहीं हो सकती है और प्रायिकता की सीमा 0 से 1 तक होती है। घटना A के घटित न होने की प्रायिकता $P(\bar{A})$ द्वारा प्रदर्शित की जाती है।

अतः $$P(\bar{A}) = \frac{\text{घटना A की प्रतिकूल स्थितियाँ}}{\text{घटना A की निश्शेष स्थितियाँ}} = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

प्रायिकता की अभिगृहीतीय दृष्टिकोण में परिभाषा (Defination of probability in axiomatic approach):

माना एक यादृच्छिक प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि S है तथा A इस समष्टि का उपसमुच्चय है जो एक घटना को दर्शाता है तो घटना A की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{\text{A में अवयवों की संख्या}}{\text{S में अवयवों की संख्या}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{A में प्रारंभिक घटनाओं की संख्या}}{\text{S में प्रारंभिक घटनाओं की संख्या}}$$

इससे स्पष्ट है कि $P(\phi) = 0$, $P(S) = 1$ तथा $0 \le P(A) \le 1$.

14.04 संयोगानुपात (Odds) :

यदि किसी अभिप्रयोग में निःशेषी घटनाएँ n तथा किसी घटना A के अनुकूल स्थितियाँ m हो तो घटना A के प्रतिकूल स्थितियाँ $n-m$ होंगी। तब A के पक्ष में संयोगानुपात $m:(n-m)$ और विपक्ष में संयोगानुपात $(n-m):m$ होगा।

घटना A के पक्ष में संयोगानुपात $= \dfrac{m}{n-m} = \dfrac{\frac{m}{n}}{\frac{n-m}{n}} = \dfrac{P(A)}{P(\bar{A})}$

घटना A के विपक्ष में संयोगानुपात $= \dfrac{n-m}{m} = \dfrac{\frac{n-m}{n}}{\frac{m}{n}} = \dfrac{P(\bar{A})}{P(A)}$

प्रमेय : किसी यादृच्छिक अभिप्रयोग में किसी घटना A के लिए सिद्ध कीजिए कि $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

प्रमाण: यदि किसी अभिप्रयोग में निःशेषी घटनाएँ n तथा किसी घटना A के अनुकूल स्थितियाँ m हो तो घटना A के प्रतिकूल स्थितियाँ $n-m$ होंगी।

घटना A के घटित न होने की प्रायिकता

$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$$

पुनः अभिगृहिती दृष्टिकोण में

$$P(\bar{A}) = \frac{\bar{A} \text{ में प्रारंभिक घटनाओं की संख्या}}{S \text{ में प्रारंभिक घटनाओं की संख्या}}$$

$$= \frac{n(S) - n(A)}{n(S)} = 1 - \frac{n(A)}{n(S)} = 1 - P(A)$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: एक पासे के उछालने पर सम अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः एक पासे के फेंकने पर 6 तरह के अंक आ सकते हैं। अतः घटना की निश्शेष स्थितियाँ = 6, प्रदत्त घटना के लिए सम अंक 2,4,6 आयेंगे। जिनकी संख्या 3 हैं, अतः घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 3

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 3/6 = 1/2$

उदाहरण 2: दो पासों के उछालने पर अंको का योग 7 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः दो पासों के फेंकने पर $6 \times 6 = 36$ परिणाम प्राप्त हो सकते हैं। अतः प्रदत्त घटना के लिए निश्शेष स्थितियाँ = 36

अंकों का योग 7 आने के लिए निम्नलिखित युग्म बनते हैं

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) जिनकी संख्या 6 है।

अतः घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 6

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 6/36 = 1/6$

उदाहरण 3: यदि एक लीप वर्ष का यादृच्छिक चयन किया गया हो तो इस वर्ष में 53 सोमवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः हमें ज्ञात है कि लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं। अतः 52 पूर्ण सप्ताह तथा दो दिन शेष बचते हैं। इन दो दिनों की सात संभावनाएँ निम्नलिखित प्रकार से हो सकती हैं। 1. सोमवार और मंगलवार 2. मंगलवार और बुधवार 3. बुधवार और बृहस्पतिवार 4. बृहस्पतिवार और शुक्रवार 5. शुक्रवार और शनिवार 6. शनिवार और रविवार 7. रविवार और सोमवार।

अतः प्रदत्त घटना के लिए निश्शेष स्थितियाँ = 7 इन सात संभावित स्थितियों में से दो में सोमवार आते हैं। अतः प्रदत्त घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 2

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 2/7$

उदाहरण 4: बारह टिकटों पर एक–एक संख्या 1 से 12 तक लिखी गयी हैं। यदि उनमें से कोई एक टिकट का यादृच्छिक चयन किया जाये तो इस पर लिखी हुयी संख्या के 2 या 3 के गुणज होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: 1 से 12 तक अंकों में 2 या 3 के गुणज 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12 हैं। अतः समप्रायिक 12 स्थितियों में से 8 अनुकूल हैं।

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

उदाहरण 5: ताश की 52 पत्तों की गड्डी में से यादृच्छिक रूप से दो पत्ते निकाले जाते हैं। सिद्ध किजिए कि दोनो के गुलाम आने की प्रायिकता $\dfrac{1}{221}$ होगी।

हल : गड्डी के 52 पत्तों में से दो पत्ते निकालने की निश्शेष स्थितियाँ= ${}^{52}C_2$

गड्डी के 4 गुलाम में से 2 निकालने की अनुकूल स्थितियाँ = ${}^{4}C_2$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2} = \dfrac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{52\times51}{2\times1}} = \dfrac{4\times3}{2\times1} \times \dfrac{2\times1}{52\times51} = \dfrac{1}{221}$

उदाहरण 6: तीन सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं, तो (i) केवल दो चित्त तथा (ii) कम से कम दो चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : तीन सिक्कों को उछालने पर निश्शेष स्थितियाँ = $2^3 = 8$

[HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT]

(i) केवल 2 चित्त आने की अनुकूल स्थितियाँ = 3

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 3/8$

(ii) कम से कम दो चित्त आने की अनुकूल स्थितियाँ = 4

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 4/8 = 1/2$

उदाहरण 7: एक थैले में 3 सफेद एवं 5 काली गेंदें रखी गई हैं। यदि 2 गेंदें यादृच्छिक रूप से निकाली जाती हैं, तो दोनों गेंदें काली होने के पक्ष में संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।

हल: थैले में गेंदों की कुल संख्या = 3+5 = 8

8 में से 2 गेंदें निकालने की निश्शेष स्थितियाँ = ${}^{8}C_2 = 28$

5 काली गेंदों में से 2 काली गेंदें निकालने की अनुकूल स्थितियाँ = ${}^{5}C_2 = 10$

$\therefore$ प्रतिकूल स्थितियाँ = 28−10 = 18

अतः घटना के पक्ष में संयोगानुपात = अनुकूल स्थितियाँ : प्रतिकूल स्थितियाँ = 10 : 18 = 5 : 9

उदाहरण 8: 4 पुरूष, 3 महिलाएं और 5 बच्चों के एक समूह से 4 व्यक्ति यादृच्छया चुने जाते हैं। चुने गये व्यक्तियों में ठीक दो बच्चे होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : कुल व्यक्ति = 4+3+5 = 12

12 व्यक्तियों में से 4 व्यक्तियों के चयन करने की निश्शेष स्थितियाँ = ${}^{12}C_4$

प्रत्येक चुनाव में ठीक 2 बच्चे होने चाहिये जिनका चयन ${}^{5}C_2$ तरीकों से किया जा सकता है। 2 बच्चों के साथ शेष 2 व्यक्ति, 4 पुरूष + 3 महिलाएं = 7 व्यक्तियों में से चुने जायेंगें जिनके चयन के ${}^{7}C_2$ तरीके हैं। अतः अभीष्ट चयन के लिए अनुकूल स्थितियाँ = ${}^{5}C_2 \times {}^{7}C_2$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{{}^{5}C_2 \times {}^{7}C_2}{{}^{12}C_4} = \dfrac{\frac{5\times4\times7\times6}{2\times1\times2\times1}}{\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}} = \dfrac{5\times7\times6}{11\times5\times9} = \dfrac{14}{33}$

प्रश्नमाला 14.2

1. एक पासे को उछालने पर 4 से बड़ा अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता हैं। दोनों बार चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. 1 से 17 तक की प्राकृत संख्याओं में से एक संख्या का यादृच्छिक चयन किया जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह एक अभाज्य संख्या हो।
4. एक सिक्के के लगातार तीन उछालों में एकान्तरतः चित्त या पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. यदि दो पासों को एक साथ उछाला जाता है तो युग्मक (doublet) अथवा 9 प्रदर्शित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. एक अलीप वर्ष में केवल 52 रविवार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
7. ताश की एक गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता खींचा जाता है, उस पत्ते के इक्का होने के पक्ष में संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।
8. 12 विद्यार्थियों की एक कक्षा में 5 लड़के और शेष लड़कियाँ हैं। एक विद्यार्थी के चयन में लड़की होने के विपक्ष में संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।
9. n व्यक्ति एक गोल मेज के चारों तरफ बैठते हैं। दो विशिष्ट व्यक्तियों के एक साथ बैठने के विपक्ष में क्या संयोगानुपात होंगें।
10. तीन पत्र तथा तीन उनके संगत लिफाफे हैं यदि सभी पत्र लिफाफों में यदृच्छया रखे जाते हैं, तो सभी पत्रों के सही लिफाफों में न रखने की क्या प्रायिकता है ?
11. प्रथम दो सौ पूर्णाकों में से एक अंक यादृच्छया चुना जाता है, इसकी 6 या 8 से विभाजित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
12. तीन पासों के एक फेंक में अंकों का योग 15 से अधिक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
13. शब्द ANGLE के अक्षर यादृच्छिक क्रम से एक पंक्ति में व्यवस्थित किए जाते हैं। स्वरों के एक साथ आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
14. एक ताश की गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। इसके इक्का, राजा या रानी होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
15. एक थैले में 6 सफेद, 7 लाल और 5 काली गेंदें हैं। इनमें से 3 गेंदें यादृच्छिक रूप से एक के बाद एक निकाली जाती हैं। इन तीनों गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता क्या होगी, जबकि निकाली गयी गेंद वापस थैले में न रखी जाए ?

14.05 प्रायिकता का योग प्रमेय या पूर्ण प्रायिकता का प्रमेय (Addition theorem of probability or theorem of total probability):

जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हों–

प्रमेय 1 : दो परस्पर अपवर्जी घटनाओं में से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता दोनों घटनाओं के घटित होने की प्रायिकता के योग के बराबर होती हैं। यदि A व B दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों, तो

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

या

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

प्रमाणः माना की घटनाओं की निश्शेषी स्थितियाँ n तथा घटना A और B की अनुकूल स्थितियाँ क्रमशः m_1 तथा m_2 हैं

$$\therefore \qquad P(A) = \frac{m_1}{n}, \; P(B) = \frac{m_2}{n}$$

चूँकि A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं अतः इनकी अनुकूल स्थितियाँ पूर्णतया भिन्न–भिन्न होंगी एवं A व B में से कोई एक घटना घटित होने की अनुकूल स्थितियाँ m_1+m_2 होंगी :

$$P(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A)+P(B)$$

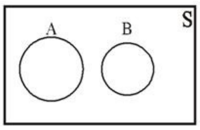
$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

समुच्चय सिद्धान्त से प्रमाणः

मानलो कि S प्रतिदर्श समष्टि तथा A तथा B इसकी दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो इनका कोई भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं होगा और दोनों घटनाएँ एक साथ घटित नहीं होगी।

चूँकि घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी हैं। अतः $(A \cup B)$ में अवयवों की संख्या A तथा B में अलग – अलग अवयवों की संख्या के योगफल के समान (या बराबर) होगी।

अतएव $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$



चित्र 14.01

$$P(A \cup B) = P(A+B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B)}{n(S)}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

व्यापकीकरण : n परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो किसी एक घटना के घटित होने की प्रायिकता उन सभी घटनाओं के घटित होने की अलग–अलग प्रायिकता के योग के बराबर होती हैं, अर्थात्

$$P(A_1+A_2+A_3+...A_n) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)$$

जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी न हों–

प्रमेय 2. यदि A व B दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ नहीं हो तब इनमें से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता निम्न प्रकार होती हैं:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

या $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

प्रमाणः माना की घटनाओं की निश्शेषी स्थितियाँ n तथा A और B की अनुकूल स्थितियाँ क्रमशः m_1 तथा m_2 है।

$$\therefore \quad P(A) = \frac{m_1}{n}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n}$$

चूँकि A तथा B कोई दो घटनाएँ हैं इसलिए यह संभव है कि वे परस्पर अपवर्जी न हो। अतः इनमें कुछ उभयनिष्ठ घटनाएँ हो सकती हैं। माना A तथा B में उभयनिष्ठ अनुकूल घटनाएँ m_3 हैं।

$$P(AB) = \frac{m_3}{n}$$

घटनाएँ (A+B) के अनुकूल घटनाएँ $m_1 + m_2 - m_3$

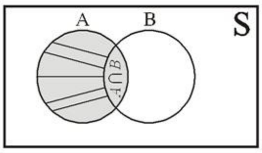
$$\therefore \quad P(A+B) = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n}$$

या $$P(A+B) = \mathrm{P(A) + P(B) - P(AB)}$$

या $$P(A \cup B) = \mathrm{P(A) + P(B) - P(}A \cap B\mathrm{)}$$

समुच्चय सिद्धान्त से प्रमाणः

माना एक अभिप्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि S है तथा समुच्चय A घटना A के घटित होने और समुच्चय B घटना B के घटित होने को प्रदर्शित करता है तथा घटनाएँ परस्पर अपवर्जी नहीं हैं अतः A,B की उभयनिष्ठ घटनाएँ समुच्चय $A \cap B$ द्वारा प्रदर्शित की जाती है।



चित्र 14.02

$(A \cup B) = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$

तथा $B = (B - A) \cup (A \cap B)$

$\therefore \; P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ (i)

तथा $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$ (ii)

$P(A \cup B) = P[(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)]$

$= P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$ [(i) व (ii) से]

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

या $\quad P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

उपप्रमेयः यदि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हों तो,

$A \cap B = \varnothing$ तथा $P(A \cap B) = 0$

$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

या $\quad \mathbf{P(A+B) = P(A) + P(B)}$

14.06 प्रायिकता का गुणन प्रमेय या मिश्र प्रायिकता का नियम

(Multiplication theorem of probability or theorem of compound probability):

कोई दो घटनाओं A तथा B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता, A की प्रायिकता तथा B की प्रतिबन्धित प्रायिकता (जब A घटित हो चुकी हो) के गुणनफल के बराबर होती है (या B की प्रायिकता तथा A की प्रतिबन्धित प्रायिकता के गुणनफल के बराबर होती है)

अर्थात् $P(AB) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$ या $P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$

$P(AB) = P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right)$ या $P(A \cap B) = P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right)$

प्रमाणः मानलो समप्रायिक तथा परस्पर अपवर्जी घटनाओं की कुल संख्या n हैं जिसमें से m घटनाएँ A के अनुकूल हैं तथा m_1 घटनाएँ A तथा B दोनों के एक साथ घटित होने के अनुकूल है तब घटनाएँ A के अनुकूल घटनाओं m में सम्मिलित होंगी।

$$P(AB) = \frac{m_1}{n} = \frac{m_1}{m} \times \frac{m}{n}$$

परन्तु $\quad P(A) = \frac{m}{n}$

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{A \text{ तथा } B \text{ के एक साथ घटित होने की घटनाएँ}}{A \text{ के अनुकूल घटनाएँ}} = \frac{m_1}{m}$$

$$P(AB) = P(A).\, P\left(\frac{B}{A}\right)$$

या $\quad P(AB) = P\left(\frac{B}{A}\right).\, P(A)$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$P(AB) = P(B).\, P\left(\frac{A}{B}\right)$ या $P(AB) = P\left(\frac{A}{B}\right).\, P(B)$

अतः $\quad P(AB) = P(B).\, P\left(\frac{A}{B}\right)$ या $P(AB) = P(A).\, P\left(\frac{B}{A}\right)$

उपप्रमेयः यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हों, तो

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$$

$$P(AB) = P(A).\, P(B)$$

व्यापकीकरणः यदि $A_1, A_2, \ldots, A_n$ स्वतंत्र घटनाएँ हों, तो

$P(A_1A_2A_3 \ldots A_n) = P(A_1).\, P(A_2).\, P(A_3) \ \ldots P(A_n)$

14.07 कम से कम एक घटना की प्रायिकताः

यदि n स्वतंत्र घटनाओं के घटित होने की प्रायिकता क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$ हों तो उनमें से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करना।

माना $A_1, A_2, ..., A_n$ स्वतंत्र घटनाएं हैं जिनके घटित होने की प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$ है

तब $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, ... P(A_n) = p_n$ तथा

$$P(\bar{A}_1) = 1 - p_1, \quad P(\bar{A}_2) = 1 - p_2, ..., P(\bar{A}_n) = 1 - p_n$$

चूँकि $A_1, A_2, ..., A_n$ स्वतंत्र घटनाएँ है अतः $\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_n$ भी स्वतंत्र घटनाएँ होंगी।

अतः प्रायिकता के गुणन प्रमेय से किसी भी घटना के घटित न होने की प्रायिकता

$$= P(\bar{A}_1, \bar{A}_2 .....\bar{A}_n)$$

$$= P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) ..... P(\bar{A}_n)$$

$$= (1-p_1)(1-p_2) ...... (1-p_n)$$

अतः कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

= 1– (किसी भी घटना के घटित न होने की प्रायिकता)

$$= 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) ..... P(\bar{A}_n)$$

$$= 1 - \{(1-p_1)(1-p_2) ...... (1-p_n)\}$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 9: दो पासे उछालने पर दोनों के अंको का योग 7 या 11 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : दो पासे फेंकने पर निश्शेषी स्थितियाँ $= 6 \times 6 = 36$

योग 7 आने के लिए अनुकूल स्थितियाँ (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6) = 6

$$\therefore \quad P(7) = \frac{6}{36}$$

योग 11 आने के लिए अनुकूल स्थितियाँ (6,5), (5,6) = 2

$$\therefore \quad P(11) = \frac{2}{36}$$

क्योंकि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं, अतः कुल प्रायिकता

$$P(7+11) = P(7) + P(11) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

उदाहरण 10: किसी थैले में 2 सफेद, 4 काली ओर 5 लाल गेंदे हैं। तीन गेंदें यादृच्छया निकाली जाती हैं। तीनों गेंदों के समान रंग की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

$\because$ थैले में कुल 2+4+ 5 =11 गेंदें हैं जिसमें तीन गेंदें निकालने के कुल तरीके = $^{11}C_3$

तीनों गेंदें समान रंग की काली या लाल हो सकती हैं :

तीनों गेंदों के लाल होने की प्रायिकता $= \dfrac{^5C_3}{^{11}C_3} = \dfrac{10}{165}$

तीनों गेंदों के काली होने की प्रायिकता $= \dfrac{^4C_3}{^{11}C_3} = \dfrac{4}{165}$

$\because$ ये दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं, अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{10}{165} + \dfrac{4}{165} = \dfrac{14}{165}$

उदाहरण 11: ताश की गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसके इक्का या पान का पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : माना निकाले गए पत्ते के इक्का होने की घटना को A तथा पान का पत्ता होने की घटना को B से व्यक्त करते हैं। यहाँ A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ नहीं हैं क्योंकि निकाला गया पत्ता पान का इक्का होने पर दोनों घटनाएँ एक साथ घटित होंगी अतः प्रायिकता के योग प्रमेय से

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

घटना A के लिए निश्शेषी स्थितियाँ = $^{52}C_1 = 52$

तथा गड्डी में इक्कों की संख्या 4 है जिसकी अनुकूल स्थितियाँ = $^{4}C_1 = 4$

$$\therefore \; P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

घटना B के लिए निश्शेषी स्थितियाँ = $^{52}C_1 = 52$ घटना B के लिए अनुकूल स्थितियाँ = $^{13}C_1 = 13$ (गड्डी में पान के 13 पत्ते हैं।)

$$\therefore \; P(B) = \frac{13}{52}$$

घटना A तथा B के साथ–साथ घटित होने की अनुकूल स्थिति = 1

$$\therefore \; P(AB) = \frac{1}{52} \text{ (जब पान का इक्का हो।)}$$

अतः
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A+B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

उदाहरण 12: A, B, C भिन्न–भिन्न प्रतियोगिताओं में भाग लेते हैं। A के सफल होने की प्रायिकता 2 / 5 है, B की 1 / 8 तथा C की 5 / 8 है।

प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) तीनों सफल हों (ii) कम से कम एक सफल हो।

हल : यहाँ $P(A) = \frac{2}{5}$ अतः $P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(B) = \frac{1}{8}$ अतः $P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$P(C) = \frac{5}{8}$ अतः $P(\bar{C}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

(i) सफल होने की घटनाएँ परस्पर स्वतंत्र हैं, अतः तीनों के सफल होने की प्रायिकता, मिश्र प्रायिकता नियम से= P(ABC)= P(A).P(B).P(C)

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{8} = \frac{1}{32}$$

(ii) कम से कम एक के सफल होने की प्रायिकता

$$= 1 - P(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})$$
$$= 1 - P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})$$
$$= 1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{8} = 1 - \frac{63}{320} = \frac{257}{320}$$

उदाहरण 13: मोहन 60% स्थितियों में सत्य बोलता है। सोहन 80% स्थितियों में सत्य बोलता है। किसी कथन पर उनका एक दूसरे से विरोधाभास होने की प्रायिकता क्या होगी।

हलः माना A तथा B क्रमशः मोहन तथा सोहन के सत्य बोलने की घटना को व्यक्त करते है, तब

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

(i) मोहन सत्य बोले व सोहन असत्य बोले $= A\bar{B}$

(ii) मोहन असत्य बोले व सोहन सत्य बोले $= \bar{A}B$

चूंकि $A, \bar{B}$ तथा $\bar{B}, A$ स्वतंत्र घटनाएँ हैं :

$$\therefore \quad P(\bar{A}B) = P(\bar{A}).\,P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$$

$$P(A\bar{B}) = P(A).\,P(\bar{B}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$$

पुनः $A\bar{B}$ तथा $\bar{A}B$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं

$$\therefore \ P(\bar{A}B + A\bar{B}) = P(\bar{A}).\,P(B) + P(A).\,P(\bar{B}) = \frac{8}{25} + \frac{3}{25} = \frac{11}{25}$$

उदाहरण 14: किसी कक्षा में छात्रों की अंकतालिकाएँ देखने से ज्ञात हुआ कि 40% छात्र गणित विषय में उत्तीर्ण है, 25% छात्र भौतिकी में उत्तीर्ण हैं एवं 15% छात्र गणित एवं भौतिकी दोनों में उत्तीर्ण हैं, कक्षा का एक छात्र यादृच्छया चुना जाता है। यदि यह छात्र गणित में उत्तीर्ण हो तब उसके भौतिकी में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः माना चुने गये छात्र के गणित विषय में उत्तीर्ण होना घटना A है और भौतिकी में उत्तीर्ण होना घटना B है। तब दिया है कि

$$P(A) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \text{ तथा } P(B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ और } P(AB) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

अब हमें $P\left(\frac{B}{A}\right)$ ज्ञात करनी हैं क्योंकि चुने गये छात्र यदि गणित में उत्तीर्ण हो तो भौतिकी में भी उसके उत्तीर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात करनी हैं। प्रायिकता की गुणन प्रमेय के अनुसार

$$P(AB) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$$

या
$$\frac{3}{20} = \frac{2}{5} \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता
$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{3}{20} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{8}$$

उदाहरण 15: एक पुस्तक की तीन स्वतंत्र समालोचकों द्वारा अनुकूल समीक्षा किये जाने के पक्ष में संयोगानुपात क्रमशः 5:2, 4:3 एवं 3:4 हैं। तीनों समालोचकों में से बहुमत पुस्तक के पक्ष में होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि E_1, E_2 तथा E_3 तीन समालोचकों द्वारा पुस्तक की अनुकूल किये जाने की घटनाएँ हैं। ज्ञात है कि

$$P(E_1) = \frac{5}{7}, \quad P(E_2) = \frac{4}{7}, \quad P(E_3) = \frac{3}{7}$$

$$\therefore \quad P(\bar{E}_1) = \frac{2}{7}, \quad P(\bar{E}_2) = \frac{3}{7}, \quad P(\bar{E}_3) = \frac{4}{7}$$

तीनों समालोचकों का बहुमत पुस्तक के पक्ष में होने की स्थितियाँ निम्न होगी।

1. $E_1E_2E_3$ 2. $\bar{E}_1E_2E_3$ 3. $E_1\bar{E}_2E_3$ 4. $E_1E_2\bar{E}_3$

जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः होगी :

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1)\,P(E_2)\,P(E_3) = \frac{5}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7} = \frac{60}{343}$$

$$P(\bar{E}_1E_2E_3) = P(\bar{E}_1)\,P(E_2)\,P(E_3) = \frac{2}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7} = \frac{24}{343}$$

$$P(E_1\bar{E}_2E_3) = P(E_1)\,P(\bar{E}_2)\,P(E_3) = \frac{5}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7} = \frac{45}{343}$$

$$P(E_1E_2\bar{E}_3) = P(E_1)\,P(E_2)\,P(\bar{E}_3) = \frac{5}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7} = \frac{80}{343}$$

उपरोक्त घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं। अतः अभीष्ट प्रायिकता

$$P(E_1E_2E_3) + P(\bar{E}_1E_2E_3) + P(E_1\bar{E}_2E_3) + P(E_1E_2\bar{E}_3)$$

$$= \frac{60}{343} + \frac{24}{343} + \frac{45}{343} + \frac{80}{343} = \frac{209}{343}$$

प्रश्नमाला 14.3

1. [illegible] A की प्रायिकता $2/11$ है तो घटना 'A नहीं' की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. ग्राम पंचायत में चार पुरूष व छः महिला सदस्य हैं यदि एक समिति के लिए यादृच्छया एक सदस्य चुना जाता है, तो एक महिला के चुने जाने की कितनी संभावना है?
3. एक पासा उछाले जाने पर निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
   (i) एक अभाज्य संख्या का आना, (ii) 1 या 1 से छोटी संख्या आना, (iii) 6 से छोटी संख्या का आना
4. एक सिक्का चार बार उछाला जाता है। इन उछालों में से कम से कम तीन बार चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. यदि एक सिक्के तथा एक पासे को एक साथ उछाला जाए, तो सिक्के पर चित्त तथा पासे पर समसंख्या आने की प्रायिकता क्या होगी ?
6. 20 मनुष्यों की कम्पनी में 5 स्नातक है। यदि यादृच्छिक रूप में 3 मनुष्य चुने जायें तो क्या प्रायिकता है कि उनमें से एक स्नातक है ?
7. किसी समस्या के हल करने के लिए A के विपक्ष में संयोगानुपात 4:3 है, B के पक्ष में संयोगानुपात 7:5 है। क्या संभावना है कि
   (i) समस्या हल हो जाएगी। (ii) समस्या हल नहीं होगी (iii) केवल एक के द्वारा ही हल हो पाएगी।
8. एक उपकरण तभी काम करेगा जबकि उसके तीनों घटक A,B और C काम कर रहें हो। एक वर्ष में A के खराब होने की प्रायिकता 0.15, B की 0.05 और C की 0.10 है। वर्ष के अन्त होने से पहले उपकरण के खराब होने की प्रायिकता क्या है ?
9. एक ताश की गड्डी में से दो बार में दो–दो पत्ते यादृच्छिक रूप से निकाले जाते हैं। यदि पहली बार निकाले गए पत्ते गड्डी में वापस नहीं रखे जाते हैं, तो पहली बार में दो इक्के और दूसरी बार में दो बादशाह निकलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
10. A और B दो घटनाएँ है जिसमें $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ तथा $P(AB) = \frac{1}{12}$ है, तो $P\left(\frac{B}{A}\right)$ ज्ञात कीजिए।
11. कल्पना करें कि पुरूष व बच्चों का अनुपात $1:2$ है, प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक परिवार में 5 बच्चों में (i) सभी लड़के होंगे (ii) उनमें से तीन लड़के एवं दो लड़कियाँ होंगी।
12. A एक निशाने को 6 में से 3 बार सही लगा सकता है, B, 4 में से 2 बार सही लगा सकता है तथा C, 4 में से एक बार सही लगा सकता है। वे एक साथ निशाना लगाते हैं। बताइए कि कम से कम दो व्यक्तियों द्वारा सही निशाना लगाए जाने की प्रायिकता क्या होगी ?

विविध उदाहरण

उदाहरण 16: A तथा B दो पासों को बारी–बारी से उछालने हैं। यदि B के 7 उछालता से पहले A, 6 उछालता है तो A जीतता है और यदि A के 6 उछालता से पहले B, 7 उछालता है तो B जीतता है। यदि A उछालता प्रारम्भ करे, तो सिद्ध कीजिए कि A के जीतने की प्रायिकता 30 / 61 है।

हलः माना दो पासों पर अंको का योग 6 आना घटना E_1 हैं।

घटना E_1 के लिए निश्शेषी स्थितियाँ $= 6^2 = 36$

तथा अनुकूल स्थितियाँ (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) और (5,1)

अर्थात् कुल अनुकूल स्थितियाँ 5 हैं।

$$\therefore\ P(E_1) = \frac{5}{36} \quad \text{अतः} \quad P(\bar{E}_1) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$$

पुनः माना कि दो पासों पर अंको का योग 7 आना घटना E_2 है

घटना E_2 के लिए निश्शेषी स्थितियाँ = 36

तथा अनुकूल स्थितियाँ = (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5) और (1,6)

अर्थात् कुल अनुकूल स्थितियाँ 6 हैं।

$$\therefore\ P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{अतः} \quad P(\bar{E}_2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

यदि A खेल प्रारम्भ करता है तो उसके जीत की संभावनाएँ

(i) पहली ही फेंक में जीतने की प्रायिकता $P(E_1) = \frac{5}{36}$

(ii) पहली फेंक में 6 न आवे, B के पहली फेंक में 7 न आवे और A की दूसरी फेंक में 6 आने की घटना क्रमशः $\bar{E}_1, \bar{E}_2, E_1$ तथा

प्रायिकता $P(\bar{E}_1\bar{E}_2E_1) = P(\bar{E}_1).\ P(\bar{E}_2).\ P(E_1) = \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36}$

(iii) इसी प्रकार A के तीसरी फेंक में जीतने की प्रायिकता

$$P(\bar{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_1\bar{E}_2E_1) = P(\bar{E}_1).\ P(\bar{E}_2).\ P(\bar{E}_1).\ P(\bar{E}_2).\ P(E_1) = \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36}$$

इसी प्रक्रिया से आगे की फेंकों के लिए प्रायिकताएँ ज्ञात की जा सकती हैं। अतः A के जीतने की प्रायिकता

$$= \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36} + \ldots = \frac{5/36}{1 - \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}} = \frac{30}{61}$$

(अनन्त गुणोत्तर श्रेढ़ी के योग से)

उदाहरण 17: एक थैले में 6 लाल और 4 सफेद गेंदें हैं। थैले में से दो बार 2–2 गेंदें निकाली जाती हैं। पहली बार दो लाल और दूसरी बार दो सफेद गेंदें निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि पहली बार गेंदें निकालने के पश्चात् उन्हें वापिस थैले में

(i) डाल दिया जाता है (ii) नहीं डाला जाता है।

हल : (i) जब गेंदें थैले में वापिस डाल दी जाती हैं :

थैले में कुल गेंदें = 6 + 4 = 10

$\therefore$ थैले में से दो गेंदें निकालने के तरीके $= {}^{10}C_2$

6 लाल गेंदों में से 2 गेंदें निकालने के कुल तरीके $= {}^{6}C_2$

$\therefore$ पहली बार दो लाल गेंद आने की प्रायिकता $= \frac{{}^{6}C_2}{{}^{10}C_2}$

4 सफेद गेंदों में से 2 गेंदें निकालने के तरीके $= {}^4C_2$

$\therefore$ दूसरी बार दो सफेद गेंद आने की प्रायिकता $= \dfrac{{}^4C_2}{{}^{10}C_2}$

उपर्युक्त घटनाएँ स्वतंत्र है, अतः

अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{{}^6C_2}{{}^{10}C_2} \times \dfrac{{}^4C_2}{{}^{10}C_2} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{45}$

(ii) जब गेंदें थैले में वापिस नहीं डाली जाती :

दूसरी बार थैले में 10–2 = 8 गेंदें शेष रह जाती हैं

दूसरी बार दो सफेद गेंद आने की प्रायिकता $= \dfrac{{}^4C_2}{{}^8C_2}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{{}^6C_2}{{}^{10}C_2} \times \dfrac{{}^4C_2}{{}^8C_2} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{14} = \dfrac{1}{14}$

उदाहरण 18: यदि A, B, C किसी यादृच्छिक प्रयोग के संगत तीन घटनाएँ हों तो सिद्ध कीजिए कि $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

हल: माना $E = B \cup C$ तब

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E)$$

$$= P(A) + P(E) - P(A \cap E) \qquad (1)$$

अब $\quad P(E) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) \qquad (2)$

समुच्चयों के संघ व सर्वनिष्ठ नियमों से

$$A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

अतः $\quad P(A \cap E) = P(A \cap B) + (A \cap C) - P\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\}$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \qquad (3)$$

समीकरण (2) व (3) का समीकरण (1) में प्रयोग करने पर

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

उदाहरण 19: जब ताश के 52 पत्तों की गड्डी से 5 पत्तों का एक समूह बनाया जाता है तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। इसमें (i) सारे बादशाह हों (ii) न्यूनतम तीन बादशाह हों।

हल: समूहों की कुल संभावित संख्या $= {}^{52}C_5$

(i) 4 बादशाहों सहित समूहों की संख्या $= {}^4C_4 \times {}^{48}C_1$

$\therefore$ P (सारे बादशाह) $= \dfrac{{}^4C_4 \times {}^{48}C_1}{{}^{52}C_5} = \dfrac{1}{54145}$

(ii) P (न्यूनतम 3 बादशाह) = P (3 बादशाह) + P (4 बादशाह)

$$= \frac{{}^4C_3 \times {}^{48}C_2}{{}^{52}C_5} + \frac{{}^4C_4 \times {}^{48}C_1}{{}^{52}C_5} = \frac{94}{54145} + \frac{1}{54145} = \frac{19}{10829}$$

विविध प्रश्नमाला–14

1. एक सिक्के को n बार उछालने पर $n(S)$ है
   (A) $2n$ (B) 2^n (C) n^2 (D) $n/2$
2. दो पासों के उछालने पर उनका योगफल 3 आने की प्रतिदर्श समष्टि है
   (A) $(1, 2)$ (B) $\{(2, 1)\}$ (C) $\{(3, 3)\}$ (D) $\{(1, 2), (2, 1)\}$
3. एक सिक्का तथा एक पासा एक साथ उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या है
   (A) 12 (B) 6 (C) 64 (D) 36
4. किसी अभिप्रयोग का प्रत्येक परिणाम कहलाता है
   (A) प्रतिदर्श समष्टि (B) यादृच्छिक परीक्षण (C) प्रतिदर्श बिन्दु (D) क्रमित–युग्म
5. तीन सिक्को के उछालने पर कम से कम शीर्ष आने की घटना E हो, तो n(E) होगा
   (A) 6 (B) 3 (C) 4 (D) 8
6. यदि $E_1 \cap E_2 = \phi$ हो, तो E_1 व E_2 घटनाएं होंगी
   (A) अपवर्जी (B) स्वतंत्र (C) आश्रित (D) पूरक
7. एक लीप वर्ष में 53 सोमवार होने की अनुकूल घटनाएँ होंगी
   (A) 7 (B) 2 (C) 1 (D) 14
8. एक कलश में 4 सफेद, 3 काली तथा 2 लाल गेंदे हैं। तीनों गेदें अलग–अलग रंग की होने की अनुकूल स्थितियाँ होंगी
   (A) 9 (B) 24 (C) 12 (D) 7
9. दो परस्पर अपवर्जी घटनाओं में $P(A \cup B)$ का मान है
   (A) $P(A)+P(B)$ (B) $P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
   (C) $P(A) \cdot P(B)$ (D) $P(A) \cdot P(B/A)$
10. तीन विद्यार्थियों A, B तथा C के द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायिकताएं क्रमशः 1/3, 1/3 तथा 1/4 हैं तो कम से कम एक द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायिकता है
    (A) 1 / 24 (B) 1 / 4 (C) 3 / 4 (D) 1 / 9
11. दो पासों के एक साथ उछाले जाने पर उन पर प्रदर्शित अंकों का अन्तर एक होने की प्रायिकता होगी
    (A) 5 / 18 (B) 1 / 4 (C) 2 / 9 (D) 7 / 36
12. ताश की गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है, इसके लाल पत्ता होने की प्रायिकता है
    (A) 1 / 4 (B) 1 / 2 (C) 3 / 4 (D) 26 / 51
13. दो पासों को उछालने पर अंकों का योग 4 का गुणज आने की प्रायिकता है:
    (A) 1 / 4 (B) 1 / 3 (C) 1 / 9 (D) 5 / 9
14. 1, 2, 3, 4, 5, 6 एवं 8 अंकों से 5 अंकों की संख्याएँ बनायी जाए तो दोनों सिरों पर सम अंक आने की प्रायिकता है:
    (A) 5 / 7 (B) 4 / 7 (C) 3 / 7 (D) 2 / 7
15. तीन पासों की फेंक में तीनों पर समान अंक आने की प्रायिकता है:
    (A) 1 / 36 (B) 3 / 22 (C) 1 / 6 (D) 1 / 18
16. एक तैराकी दौड़ में A के पक्ष में संयोगानुपात 2:3 तथा B के विपक्ष में संयोगानुपात 4:1 है। A या B के दौड़ जीतने की प्रायिकता है:
    (A) 1 / 5 (B) 2 / 5 (C) 3 / 5 (D) 4 / 5
17. एक पंक्ति में यादृच्छिक रूप से 10 विद्यार्थी बैठे हैं। दो विशेष प्रकार के विद्यार्थी पास–पास नहीं बैठने की प्रायिकता है:
    (A) 1 / 5 (B) 2 / 5 (C) 3 / 5 (D) 4 / 5
18. एक ढ़ेरी में 12 मद है जिसमे 4 दोषपूर्ण है। 3 मद यादृच्छिक रूप से एक के बाद एक करके बिना ढ़ेरी में वापस रखे निकाले जाते है। उनमें कोई भी दोषपूर्ण नहीं होने की प्रायिकता है:
    (A) 3 / 55 (B) 13 / 55 (C) 14 / 55 (D) 17 /55

19. किसी निश्चित घटना की प्रायिकता होगीः

(A) 0 (B) 1 / 2 (C) 1 (D) 2

20. एक परिवार में तीन बच्चों में से कम से कम एक लड़का हो तो उस परिवार में 2 लड़के और 1 लड़की होने की प्रायिकता हैः

(A) 1 / 2 (B) 1 / 3 (C) 1 / 4 (D) 3 / 4

21. एक अध्यापक के कक्षा में परीक्षा लेने की प्रायिकता 1 ⁄ 5 है। यदि एक विद्यार्थी दो बार अनुपस्थित रहे, तो वह कम से कम एक परीक्षा नहीं दे सकने की प्रायिकता हैः

(A) 9 / 25 (B) 11 / 25 (C) 13 / 25 (D) 23 / 25

22. किसी वर्ष में जो लीप वर्ष न हो में 53 रविवार आने की प्रायिकता बताइए।

23. A और B दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ ऐसी है कि $p(A) = 0.3, P(B) = K$ और $P(A \cup B) = 0.5$ तो K का मान ज्ञात कीजिए।

24. 'PEACE' शब्द के अक्षरों से बनने वाले शब्दों में दोनों E के साथ आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

25. एक थैले में 6 लाल तथा 8 काली गेंदे है। चार–चार गेंदों को दो बार उससे निकाला जाता है। पहली बार के चारों गेंदो को निकालकर पुनः उसमें रख दिया जाता है। क्या प्रायिकता होगी कि पहली बार चारों गेंदें लाल तथा दूसरी बार चारों गेंदें काली हों?

26. एक व्यक्ति 5 में से 3 बार सत्य बोलता है। उसका कथन है कि 6 सिक्कों को उछालने पर 2 चित्त आयें तो इस घटना के वास्तविक रूप में सत्य होने की क्या प्रायिकता है ?

27. दो पासों का एक साथ उछालने पर इस बात की क्या प्रायिकता है कि उन पर न तो समान अंक आये और न ही अंको का योग 9 आये।

28. तीन सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि–

(1) ठीक दो शीर्ष हों (2) कम से कम दो शीर्ष हों

(3) अधिक से अधिक दो शीर्ष हों (4) तीनों शीर्ष हों।

29. एक घुड़दौड़ में 4 घोड़े A, B, C, D दौड़ते हैं। A, B, C व D के पक्ष में संयोगानुपात क्रमशः 1:3, 1:4, 1:5 तथा 1:6 है। इनमें से किसी एक के जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

30. अगले 25 वर्षों में एक व्यक्ति के जीवित रहने की प्रायिकता 3 ⁄ 5 और उसकी पत्नी के उन्हीं 25 वर्षों जीवित रहने की प्रायिकता 2 ⁄ 3 हैं। निम्नलिखित प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिएः

(1) दोनों के जीवित रहने की। (2) किसी के भी जीवित न रहने की।

(3) कम से कम एक के जीवित रहने की। (4) केवल पत्नी के जीवित रहने की।

31. किसी तथ्य में A और B स्वतंत्र गवाह है। A के सत्य बोलने की प्रायिकता x तथा B के सत्य बोलने की प्रायिकता y है। यदि किसी कथन पर A और B दोनों सहमत हो तो सिद्ध कीजिए कि इस कथन के सत्य होने की प्रायिकता $= \frac{xy}{1 - x - y + 2xy}$ होगी।

32. A,B,C तीन पुरूष बारी–बारी से एक सिक्का उछालते हैं। जिसके पहले चित्त आये उसी की जीत होती है। यदि A की बारी पहले हो तो उनकी जीत की संभावनाएँ क्या हैं ?

33. सुलक्षणा और सुनयना बारी–बारी से एक सिक्का उछालती है। जिसके पहले चित्त आये उसी की जीत होती है। यदि सुलक्षण की बारी पहले आये तो दोनों के जीतने की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

34. संख्याओं के निम्न दो समूहों में से एक–एक अंक का चुनाव किया जाता हैः

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

p_1 दोनों अंकों का योग 10 होने तथा p_2 दोनों अंकों का योग 8 होने की प्रायिकता हो तो $p_1 + p_2$ ज्ञात कीजिए।

35. यदि $P(A)= 0.4,\ P(B) = 0.8, P(B/A) = 0.6$ तो $P(A/B)$ और $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए।

36. यदि $P(E)= 0.35,\ P(F) = 0.45, P(E \cup F) = 0.65$ तो $P(F/E)$ ज्ञात कीजिए।

37. एक पासे की पाँच उछालों में केवल 1 अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. **अभिप्रयोग एवं घटना :** किसी भी संदर्भ का कोई प्रयोग जिसका कई सम्भावित परिणामों में से एक परिणाम अवश्य होता हो, एक अभिप्रयोग कहलाता है तथा इसके सम्भावित परिणाम घटनाएँ कहलाती हैं।
2. **निःशेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ :** किसी अभिप्रयोग के समस्त सम्भावित परिणाम उस अभिप्रयोग की निश्शेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ कहलाती हैं।
3. **अनुकूल घटनाएँ या स्थितियाँ :** किसी अभिप्रयोग में किसी विशिष्ट घटनाओं की अनुकूल स्थितियाँ उस प्रयोग के उन परिणामों की संख्या है जिससे वह विशिष्ट घटना घटित होती है।
4. **परस्पर अपवर्जी एवं असंयुक्त घटनाएँ :** दो या दो से अधिक घटनाएँ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहलाती हैं यदि इनमें से कोई दो घटनाएँ एक साथ घटित नहीं हो सके अर्थात् यदि एक घटना घटित होती है, तो शेष घटनाएँ घटित नहीं हो सके।
5. (1) **स्वतन्त्र घटनाएँ :** दो या दो से अधिक घटनाएँ स्वतन्त्र घटनाएँ कहलाती है यदि किसी के घटित होने का प्रभाव शेष घटनाओं के घटित होने पर नहीं पड़ता है।

   (2) **आश्रित घटनाएँ:** दो या दो से अधिक घटनाएँ इस प्रकार हो कि एक के घटित होने का प्रभाव दूसरे पर पड़ता हो तो उन्हें आश्रित घटनाएँ कहते हैं।
6. **प्रतिदर्श बिन्दु तथा प्रतिदर्श समष्टि :** किसी अभिप्रयोग का प्रत्येक परिणाम एक प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है तथा इन सभी प्रतिदर्श बिन्दुओं का समुच्चय उस अभिप्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है। इसे प्रायः S से व्यक्त किया जाता है।
7. **प्रारंभिक घटना :** यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि का एक अवयव वाला उपसमुच्चय प्रारंभिक घटना कहलाती है।
8. **मिश्र घटना :** एक प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि S के वे उपसमुच्चय जो प्रतिदर्श समष्टि S के एक अवयव वाले उपसमुच्चयों के असंयुक्त सम्मिलन से बने समुच्चयों को मिश्र घटनाएं कहते है।
9. **असंभव व निश्चित घटना :** माना एक यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि S है तो ϕ तथा S इसके उपसमुच्चय होने के कारण घटनाएं है। घटना ϕ को असंभव घटना तथा S को निश्चित घटना कहते है।
10. **प्रायिकताः** घटना A के अनुकूल होने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{\text{घटना A के अनुकूल घटनाएँ}}{\text{निश्शेष घटनाएँ}} = \frac{m}{n}$$

या $$P(A) = \frac{\text{A में अवयवों की संख्या}}{\text{S में अवयवों की संख्या}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

घटना A के नहीं घटने की प्रायिकता

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{घटना A प्रतिकूल घटनाएँ}}{\text{निश्शेष घटनाएँ}} = \frac{n-m}{n}$$

11. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

या $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

12. प्रायिकता की सीमा $0 \le P(A) \le 1$
13. घटना A के पक्ष में संयोगानुपात $= \dfrac{m}{n-m} = \dfrac{P(A)}{P(\bar{A})}$
14. घटना A के विपक्ष में संयोगानुपात $= \dfrac{n-m}{m} = \dfrac{P(\bar{A})}{P(A)}$

15. **प्रायिकता का योग प्रमेय या पूर्ण प्रायिकता का प्रमेय :**

(1) अपवर्जी घटनाओं में से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता दोनों घटनाओं की प्रायिकता के योग के बराबर होती है।

$P(A+B) = P(A) + P(B)$ या $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A+B+C+....) = P(A) + P(B) + P(C) +.... = P(A \cup B \cup C...)$

(2) अपवर्जी घटनाएँ नहीं हो तब

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

या $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

16. **प्रायिकता का गुणन प्रमेय या मिश्र प्रायिकता का नियम :** कोई दो घटनाओं A तथा B के साथ घटित होने की प्रायिकता

$$P(AB) = P(A).\, P\left(\frac{B}{A}\right) \text{ या } P(A \cap B) = P(A).\, P\left(\frac{B}{A}\right)$$

या $$P(AB) = P(B).\, P\left(\frac{A}{B}\right) \text{ या } P(A \cap B) = P(B).\, P\left(\frac{A}{B}\right)$$

यदि A, B स्वतंत्र घटनाएँ हो तो

$P(AB) = P(A).\, P(B)$ या $P(A \cap B) = P(A).\, P(B)$

व्यापकीकरणः यदि $A_1, A_2, \ldots, A_n$ स्वतंत्र घटनाएँ हो, तो

$P(A_1A_2A_3, \ldots, A_n) = P(A_1).\, P(A_2).\, P(A_3), \ldots, P(A_n)$

17. यदि $A_1, A_2, \ldots, A_n$ स्वतंत्र घटनाएँ है जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, \ldots, p_n$ हैं।

अतः कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

= 1 − किसी भी घटना के घटित न होने की प्रायिकता

$= 1 - P(\bar{A}_1)\, P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_n)$

$= 1 - \{(1-p_1)\, (1-p_2) \ldots (1-p_n)\}$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 14.1

1. {DDD, DDN, DND, NDD, DNN, NDN, NND, NNN} **2.** 256 **3.** नहीं

4. (i) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)} (ii) {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}

प्रश्नमाला 14.2

1. 1/3 **2.** 1 / 4 **3.** 7 / 17 **4.** 1 / 4 **5.** 5 / 18 **6.** 6 / 7 **7.** 1 : 12

8. 5 : 7 **9.** $\frac{n-3}{2}$ **10.** 5 / 6 **11.** 1 / 4 **12.** 5 / 108 **13.** 2 / 5 **14.** 3 / 13

15. 5 / 204

प्रश्नमाला 14.3

1. 9 / 11 **2.** 3 / 5 **3.** (i) 1 / 2; (ii) 1 / 6; (iii) 5 / 6 **4.** 5 / 16 **5.** 1 / 4 **6.** 137 / 228

7. (i) 16 / 21; (ii) 5 / 21; (iii) 43 / 84 **8.** 0.27325 **9.** 6 / 270725 **10.** 1 / 4

11. (i) 1 / 32; (ii) 5 / 16 **12.** 3 / 8

विविध प्रश्नमाला 14

1. (B) **2.** (D) **3.** (A) **4.** (C) **5.** (C) **6.** (A) **7.** (B)

8. (B) **9.** (A) **10.** (C) **11.** (A) **12.** (B) **13.** (A) **14.** (D)

15. (A) **16.** (C) **17.** (D) **18.** (C) **19.** (C) **20.** (B) **21.** (A)

22. $\frac{1}{7}$ **23.** 0.2 **24.** 2 / 5 **25.** (i) $\frac{150}{143143}$ **26.** $\frac{45}{143}$ **27.** $\frac{13}{18}$

28. $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}$ **29.** $\frac{319}{420}$ **30.** $\frac{2}{5}, \frac{2}{15}, \frac{13}{15}, \frac{4}{15}$ **32.** $\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}$ **33.** $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

34. $\frac{16}{81}$ **35.** 0.3, 0.96 **36.** $\frac{3}{7}$ **37.** $5\left(\frac{1}{6}\right)^5$

परिशिष्ट–अ

Logarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

परिशिष्ट–अ

Logarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

परिशिष्ट–ब

Antilogarithms

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Antilogarithms

Degrees	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20